Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова

школа 2000...

Математика

Алгебра · Функции · Анализ данных

7 класс

Часть 2

Учебник для средней школы

Издательство Ювента

УДК 373:51
ББК 22.1я721
П 29

Ассоциация «Школа 2000...»

Центр системно-деятельностной педагогики «Школа 2000...» АПК и ППРО РФ
Институт системно-деятельностной педагогики

Программа математического развития
для дошкольников, начальной и средней школы

«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

Научный руководитель
доктор педагогических наук ***Л. Г. Петерсон***

Петерсон Л. Г., Абраров Д. Л., Чуткова Е. В.

П 29 Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. Учебник для 7 класса. Часть 2 / Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова. — М.: Издательство «Ювента», 2011. — 152 с.: ил.

ISBN 978-5-85429-512-3

Учебник ориентирован на развитие мышления, интереса к математике и творческих способностей учащихся, формирование ключевых деятельностных компетенций и готовности к саморазвитию.

Содержит большое количество разноуровневых заданий, позволяющих сформировать прочную систему математических знаний, соответствующих современным требованиям ГИА, ЕГЭ и дающих возможность качественной подготовки учащихся к математическим конкурсам и олимпиадам (на уроках и во внеурочной деятельности).

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон («Школа 2000...»). Является непосредственным продолжением непрерывного курса математики для дошкольников, начальной школы и 5—6 классов средней школы программы «Учусь учиться» (Премия Президента РФ в области образования за 2002 год).

Апробация учебника проведена в 2009/2010 учебном году. Учебник рекомендован Ученым советом Академии повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования для использования во всех типах школ и для индивидуальной работы с учащимися.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-85429-512-3

Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА. ФУНКЦИИ. АНАЛИЗ ДАННЫХ

Учебник для 7 класса
Часть 2

ЮВЕНТА
2011

Чтобы учебником было удобно пользоваться, в нем введены следующие обозначения:

К – задачи по новой теме для работы в классе,

Д – задачи для домашней работы,

П – повторение ранее пройденного,

С – задачи на смекалку,

□ – задания базового уровня,

□ – более сложные задания по новым темам и темам повторения,

□* – задания, требующие умения находить нестандартные способы решения;

▼ – завершение доказательства теоремы,

☺☺☺ – материал для тех, кому интересно.

Глава 4

Введение в теорию многочленов

§ 1. Степень с натуральным показателем

1. Понятие степени с натуральным показателем

Истинная и законная цель всех наук состоит в том, чтобы наделять жизнь человеческую новыми изобретениями и богатствами.

Фрэнсис Бэкон (1561–1626),
английский философ и политический деятель

Последовательность чисел:

$$3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729$$

устроена таким образом, что в ней каждое следующее число в три раза больше предыдущего. Мы уже знаем, что эту же последовательность можно записать иначе:

$$3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5,\ 3^6.$$

Вторая запись последовательности более наглядно показывает ее структуру. Составляя эту запись, мы использовали уже известное нам понятие степени натуральных чисел, что позволяет короче записывать выражения, содержащие одинаковые множители.

А как короче записать, например, выражение $0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75$? Чтобы распространить наши знания о степени на множество рациональных чисел, уточним соответствующие определения.

Под натуральной степенью n числа $a \in N$ мы понимали произведение n множителей, каждый из которых равен a. Аналогичным образом мы будем понимать и натуральную степень рационального числа.

Определение 1. Пусть n – натуральное число, большее 1. Тогда **n-й степенью рационального числа a** называется произведение n множителей, каждый из которых равен a. При этом повторяющийся множитель a называют **основанием степени**, а число повторяющихся множителей n – **показателем степени**.

Вычисление произведения, состоящего из n множителей, каждый из которых равен a, называют **возведением числа a в n-ю степень.**

Для n-й степени числа a, как и раньше, будем использовать обозначение: a^n. Эта запись читается как «a в степени n» . Тогда определение степени на математическом языке можно записать следующим образом:

$$\forall\ a \in Q,\ n \in N,\ n > 1: \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}}.$$

Теперь, пользуясь введенным понятием степени рационального числа, мы можем записать:

$$0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}75^5.$$

Как и раньше, **квадратом числа** будем называть вторую степень этого числа ($a^2 = a \cdot a$), а **кубом числа** – его третью степень ($a^3 = a \cdot a \cdot a$).

В нашем определении мы говорили о натуральном показателе степени, большем 1, поскольку произведение чисел не может содержать менее двух множителей. Теперь «доопределим» понятие натуральной степени рационального числа для случая показателя, равного 1.

Исходя из фундаментального принципа развития математической теории (принципа «неразрушения»), дадим определение первой степени рационального числа, согласованное с определением первой степени натурального числа, которое мы использовали раньше.

Определение 2. Степенью рационального числа a с натуральным показателем 1 называется само это число. То есть

$$\forall\ a \in Q\colon a^1 = a.$$

Запись больших чисел с помощью степени очень удобна, поэтому ее часто используют в разных науках, например в астрономии, где расстояния выражаются огромными числами. А для того чтобы проводить вычисления с этими числами, необходимо уметь выполнять арифметические действия со степенями. Установим сначала несколько свойств и правил, которые помогут нам правильно выполнять такие вычисления.

Для начала ответим на вопрос, можем ли мы сразу определить знак любой степени числа, пусть даже с очень большим показателем? Например, можем ли мы, не вычисляя значения самой степени, определить знак числа $\left(\frac{3}{8}\right)^{7562}$ или числа $(-56{,}799)^{329}$? Для того чтобы ответить на этот вопрос, докажем несколько теорем.

Теорема 1. Любая натуральная степень положительного рационального числа – это число положительное.

Доказательство:

Натуральная степень положительного рационального числа представляет собой произведение положительных чисел (или само число). Поскольку при умножении любого числа положительных чисел получается положительное число, то значение степени будет положительным, что и требовалось доказать. ▼

Значит, мы сразу можем сказать, что $\left(\frac{3}{8}\right)^{7562} > 0$.

Теорема 2. Отрицательное число, возведенное в четную степень, есть число положительное, а отрицательное число, возведенное в нечетную степень, – число отрицательное.

Доказательство:

Четная степень отрицательного числа содержит четное число отрицательных множителей. Из них можно составить целое число пар, в каждой из которых при умножении двух отрицательных чисел получается положительное число. Значит, четная степень отрицательного числа является числом положительным.

А нечетная степень отрицательного числа содержит целое число пар отрицательных множителей и еще один отрицательный множитель. Поэтому нечетная степень отрицательного числа является числом отрицательным, что и требовалось доказать. ▼

Значит, поскольку число 329 – нечетное, то $(-56{,}799)^{329} = -56{,}799^{329} < 0$.

Теорема 3. Нуль в любой натуральной степени равен нулю.

Доказательство:

Любая натуральная степень нуля представляет собой произведение нулей (или само число 0). Это произведение всегда равно нулю, что и требовалось доказать. ▼

Например, $0^{954} = 0$.

Итак, мы ввели новое для нас арифметическое действие для рациональных чисел – возведение в натуральную степень, и установили некоторые правила, упрощающие определение знака степени. Теперь нам важно разобраться с тем, какой принят порядок действий в выражениях, содержащих степени.

Поскольку степень фактически представляет собой произведение нескольких множителей, то запись степени можно рассматривать как запись произведения, заключенного в скобки. Это позволяет нам сформулировать следующее правило, устанавливающее порядок действий в выражениях, содержащих степени.

Порядок действий в выражениях, содержащих степени

В выражениях со степенями без скобок сначала производят возведение в степень, затем умножение и деление, а уже потом – сложение и вычитание. Если в выражениях есть скобки, то сначала в указанном порядке выполняют действия в скобках, а потом в том же порядке – остальные действия.

Пример. Вычислите значение выражения $1 + 2^3 \cdot ((-3)^2 \cdot 5 - 8 : 2) + 4^2$.

Решение:

Сначала вычислим значение выражения в скобках: $(-3)^2 \cdot 5 - 8 : 2$. Согласно порядку действий в выражениях со степенями, сначала возведем (-3) в степень, затем выполним умножение и деление и после этого – выполним вычитание:

$$(-3)^2 \cdot 5 - 8 : 2 = 9 \cdot 5 - 8 : 2 = 45 - 4 = 41.$$

Теперь подставим в исходное выражение вместо скобок вычисленное значение. Затем выполним возведение в степень, после этого умножение и, наконец, – сложение:

$$1 + 2^3 \cdot ((-3)^2 \cdot 5 - 8 : 2) + 4^2 = 1 + 2^3 \cdot 41 + 4^2 = 1 + 8 \cdot 41 + 16 = 1 + 328 + 16 = 345.$$

Ответ: 345.

1 а) Запишите произведение натуральных чисел в виде степени:

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$; $\quad 25 \cdot 25 \cdot 25$; $\quad a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, где $a \in N$.

б) Дайте определение степени натурального числа a с натуральным показателем n, если: 1) $n > 1$; 2) $n = 1$.

в) Предложите собственную версию определения степени рационального числа a с натуральным показателем n, исходя из фундаментального принципа развития математической теории («принципа неразрушения»).

2 Запишите числовое выражение короче, используя понятие степени:

а) $(-\frac{1}{7}) \cdot (-\frac{1}{7}) \cdot (-\frac{1}{7})$;

б) $-9{,}4 \cdot 9{,}4 \cdot 9{,}4 \cdot 9{,}4 \cdot 9{,}4$;

в) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$;

г) $2{,}(8) \cdot 2{,}(8) \cdot 2{,}(8) \cdot 2{,}(8) \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$.

3 При рациональных значениях переменных запишите буквенное выражение короче, используя понятие степени:

а) $(-y) \cdot (-y) \cdot (-y) \cdot (-y)$;
б) $-y \cdot y \cdot y \cdot y$;
в) $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$;
г) $a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$;
д) $(-5m) \cdot (-5m) \cdot 2n \cdot 2n \cdot 2n$;
е) $-5m \cdot m \cdot 2n \cdot n \cdot n$;
ж) $(p-q) \cdot (p-q) \cdot (p-q) \cdot (p-q) \cdot (p-q)$;
з) $p - q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q$.

4 Назовите основание и показатель степени, вычислите значение выражения:

а) 5^3; б) $(-4)^2$; в) $(-0,1)^4$; г) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; д) $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$; е) $(-3,6)^1$.

5 Замените в выражениях степени произведениями:

а) $(-x)^2$; в) $(2c)^3$; д) $(-mn)^4$; ж) $(a+3b)^2$; и) $(2x-y)^3$;
б) $-x^2$; г) $2c^3$; е) $-mn^4$; з) $a+3b^2$; к) $2x-y^3$.

Проанализируйте полученные выражения и определите, какие возможны ошибки при записи степеней.

6 Найдите значение выражения:

а) 2^5; г) 3^4; ж) $0,2^6$; к) $0,05^2$; н) 10^7; р) $0,1^3$;
б) $(-2)^5$; д) $(-3)^4$; з) $(-0,2)^6$; л) $(-0,05)^2$; о) $(-10)^7$; с) $(-0,1)^3$;
в) -2^5; е) -3^4; и) $-0,2^6$; м) $-0,05^2$; п) -10^7; т) $-0,1^3$.

Какие из этих выражений являются «степенью числа», а какие – «числом, противоположным степени числа»?

7 Заполните таблицы:

n	1	2	3	4	5	6
2^n						
3^n						

n	1	2	3	4
4^n				
5^n				

8 Представьте, если возможно, данные числа в виде степеней:

а) 128; в) 243; д) 0,0016; ж) 0,0009; и) $15\frac{5}{8}$; л) 12,25;
б) –128; г) –243; е) –0,0016; з) –0,0009; к) $-15\frac{5}{8}$; м) –12,25.

9 Определите, каким числом – положительным или отрицательным – является выражение:

а) $(-8)^{97}$; б) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{314}$; в) $(-2,8)^{153} \cdot (-0,15)^{725}$; г) $\left(-\frac{3}{7}\right)^{2009} : (-60,4)^{2010}$.

10 Сравните значения выражений:

а) 3^{15} и 4^{15}; в) 9^{24} и 7^{23}; д) $\left(\frac{2}{3}\right)^7$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^8$; ж) $1,8^5$ и $1,8^6$;
б) $(-3)^{15}$ и $(-4)^{15}$; г) $(-9)^{24}$ и $(-7)^{23}$; е) $\left(-\frac{2}{3}\right)^7$ и $\left(-\frac{2}{3}\right)^8$; з) $(-1,8)^5$ и $(-1,8)^6$.

11 Прочитайте выражение и найдите его значение. Что вы замечаете?

а) $((-3) + 4)^2$; в) $((-8) - (-3))^2$; д) $(3 + (-2))^3$; ж) $((-9) + (-1))^3$;

б) $(-3)^2 + 4^2$; г) $(-8)^2 - (-3)^2$; е) $3^3 + (-2)^3$; з) $(-9)^3 + (-1)^3$.

12 Вычислите:

а) $((-2)^4 + (-1)^3 \cdot 7) : (-3)^2$; в) $-2 \cdot (-5)^3 : 6\frac{1}{4} + \left(-3 : \left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 - (-2)^5$;

б) $-0{,}5^2 - \frac{1}{4} \cdot (0{,}05 : (-0{,}1)^2 - 2^1)$; г) $-3^4 \cdot (-1)^6 - \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(-5\frac{1}{2} - 2^3\right) + (-7)^2$.

13 Используя степень числа 10, запишите, что:

а) в одном метре 100 см; г) в одном центнере 100 000 г;

б) в одном километре 10 000 дм; д) в одном кубическом дециметре 1000 см^3;

в) в одном гектаре 1 000 000 дм^2; е) в одном кубическом метре 1 000 000 000 мм^3.

14 Найдите значение выражения:

1) a^2, $-a^2$ и $(-a)^2$, если $a = 5$, $a = -3$; 2) b^3, $-b^3$ и $(-b)^3$, если $b = 4$, $b = -2$.

15 а) Найдите значение выражения $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, если $x = -1$, $x = 0$, $x = 10$.

б) Найдите значение выражения $y^1 - 2y^2 + 3y^3 - 4y^4 + 5y^5$, если $y = 1$, $y = -1$, $y = 2$.

П **16** Запишите высказывания на математическом языке с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Докажите истинные высказывания, а для ложных – постройте их отрицания.

а) Любое целое число, отличное от нуля, делится само на себя.

б) Существуют целые числа, делящиеся на нуль.

в) Четные натуральные числа не могут быть простыми.

г) Можно найти целое число, которое при делении на 3 дает остаток 4.

д) Есть целые числа, которые не делятся на единицу.

е) Четные числа всегда делятся на 3.

ж) Некоторые простые числа при делении на 2 дают остаток 1.

з) Если целое число при делении на 3 дает остаток 2, то оно кратно 5.

17 Докажите прямым и косвенным методом:

а) Равенство $m(m + 1)(m + 2) = 71\,536$ неверно при любом натуральном m.

б) Равенство $9k(k + 1) = 54\,621$ неверно при любом натуральном k.

18 Сравните значения величин:

а) 43 м 6 дм 53 см и 436 дм 532 мм; г) 27 т 468 кг и 274 ц 68 кг 500 г;

б) 3 км 315 м 2 дм и 3300 м 104 дм; д) 5 ц 900 кг 300 г и 1 т 5 ц 300 г;

в) 7 сут. 5 ч 63 мин 5 с и 174 ч 63 мин 3 с; е) 27 а 64 м^2 и 0,25 га 2 а 65 м^2.

19 Найдите множество целых решений неравенства:

а) $a + 5 > 9$; в) $-5 \leqslant x \leqslant -1$; д) $|p| > 3$;

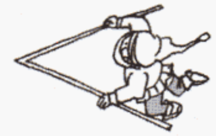
б) $b - 11 \leqslant 3$; г) $-2 \leqslant y < 4$; е) $|q - 2| \leqslant 1$.

20 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Сумма двух натуральных чисел равна 27. Первое число при делении на 7 дает остаток 4, а второе число при делении на 7 дает остаток 2. Найдите эти числа.

б) Первый угол треугольника на 30° больше второго и в три раза меньше третьего. Найдите больший угол этого треугольника.

в) Длина ломаной $AKLN$ равна 15,6 см. Известно, что AK равно четверти расстояния между ее началом и концом, KL на 0,6 см меньше AK, а LN в 2 раза больше KL. Чему равно звено AK этой ломаной?



г) Сумма цифр загаданного четырехзначного числа равна 30. Вторая цифра этого числа на 1 меньше первой, третья – в 3 раза больше второй, а четвертая – на 4 больше первой. Какое число загадали?

21 Может ли:

а) остаток при делении четного числа на 6 быть равным 3?

б) число, кратное 5, при делении на 15 давать остаток 7?

в) число, делящееся на 3, при делении на 12 давать остаток 8?

г) число, делящееся на 9, при делении на 36 давать остаток 28?

Д **22** Запишите произведения рациональных чисел короче, используя понятие степени:

а) $(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)$;

б) $(-1,(4))\cdot(-1,(4))\cdot(-1,(4))$;

в) $-5,6\cdot 5,6\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}$;

г) $(-kl)\cdot(-kl)\cdot(-kl)\cdot(-kl)\cdot(-kl)\cdot(-kl)$;

д) $-(kl)\cdot(kl)\cdot(kl)\cdot(kl)\cdot(kl)\cdot(kl)$;

е) $(-z)\cdot(-z)\cdot(-z)\cdot(2b+c)\cdot(2b+c)$.

23 Замените в выражениях степени произведениями:

а) $(-a)^5$; б) $-a^5$; в) $(3n)^6$; г) $3n^6$; д) $(-xy)^3$; е) $-xy^3$; ж) $(5-d)^4$; з) $5-d^4$; и) $(a+b)^2$; к) a^2+b^2.

24 Найдите значение выражения:

а) 5^3, -5^3 и $(-5)^3$; б) $0,1^4$; $-0,1^4$ и $(-0,1)^4$; в) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$, $-\left(1\frac{1}{3}\right)^2$ и $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$.

25 Определите, каким числом – положительным или отрицательным – является выражение:

а) $(-16)^{102}$; б) $\left(-2\frac{4}{15}\right)^{237}$; в) $(-0,9)^{58}:(-1,2)^{923}$; г) $(-7,5)^{123}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^{345}$.

26 Сравните значения выражений:

а) 5^9 и 3^9; б) $(-5)^9$ и $(-3)^9$; в) 6^{10} и 6^{12}; г) $(-6)^{10}$ и $(-6)^{12}$; д) $\left(\frac{7}{4}\right)^5$ и $\left(\frac{7}{4}\right)^6$; е) $\left(-\frac{7}{4}\right)^5$ и $\left(-\frac{7}{4}\right)^6$; ж) $0,9^4$ и $0,9^5$; з) $(-0,9)^4$ и $(-0,9)^5$.

27 Вычислите:

а) $(-7+3)^2$; г) $(-2)^4-5^2$;

б) $-7+3^2$; д) $((-3)^2-7)^3-((-2)^2)^3$;

в) $(-7)^2+3^2$; е) $\left(-0{,}6^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(2\frac{1}{2}-(-4)^2\right)\right):(-0{,}1)^2$.

28 Найдите значение выражения:

1) x^2, $-x^2$ и $(-x)^2$, если $x=3$, $x=-4$;

2) y^3, $-y^3$ и $(-y)^3$, если $y=-1$, $y=2$.

29 а) Найдите значение выражения $a^1-a^2+a^3-a^4+a^5$, если $a=2$, $a=0$, $a=-1$.

б) Найдите значение выражения $b^1+2b^2+3b^3+4b^4+5b^5$, если $y=-2$, $y=0{,}1$, $y=10$.

30 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Сумма полных лет Антона и Ксюши равна 30. Число полных лет Антона при делении на 5 дает остаток 1, а число полных лет Ксюши при делении на 5 дает остаток 4. Сколько лет Ксюше, если Антону больше 12 и меньше 20 лет?

б) Количество рецептов пончиков в пончиковой компании Антона и Ксюши выражается трехзначным числом, сумма цифр которого равна 20. Вторая цифра этого числа на 5 больше первой, а третья – в 2 раза меньше первой. Сколько рецептов пончиков в пончиковой компании Антона и Ксюши?

31 Семь футболистов забили в турнире 20 голов. Докажите, что хотя бы два футболиста забили одинаковое количество голов.

32 а) Найдите значения числовых выражений A и B:

$$A=\frac{\left(3\frac{6}{7}-2\frac{2}{3}-\frac{4}{21}\right)\cdot 47}{9\frac{5}{51}-3\frac{2}{9}+5\frac{7}{18}-10\frac{9}{34}}:\frac{47}{15};\qquad B=\frac{6-\frac{4}{10}}{7+1:\frac{3}{7}}\cdot\frac{35}{3}.$$

б) Найдите три числа, сравнимых с A по модулю B.

C **33*** Учитель дал ученикам задание написать, используя три раза цифру 2, числовое выражение, значение которого будет как можно более большим. Среди составленных учащимися выражений были следующие:

1) 222; 2) $22\cdot 2$; 3) 22^2; 4) 2^{22}; 5) 2^{2^2}.

Расположите эти выражения в порядке возрастания их значений.

34* Даны 6 чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум числам прибавлять по 1. Можно ли сделать все числа равными?

35* Трем братьям раздали 24 бублика таким образом, что каждый получил на три бублика меньше, чем ему лет. Меньший брат, подумав, предложил поменяться частью бубликов. «Я, – сказал он, – оставляю себе половину бубликов, а вторую половину разделю между вами поровну». Глядя на такое благородство, средний и старший братья также решили оставить себе половину своих бубликов, а вторую половину разделить поровну между другими братьями. После этих операций каждый из братьев получил одинаковое количество бубликов. Сколько лет братьям?

2. Свойства степени с натуральным показателем

Чтобы добиться какого-нибудь прогресса в науках, безусловно, необходимо заниматься отдельными проблемами.

Карл Вейерштрасс (1815–1897),
немецкий математик

В предыдущем пункте мы узнали, что понимается в математике под натуральной степенью любого рационального числа, научились определять знак степени и узнали, в каком порядке проводятся вычисления в выражениях со степенью. Но мы пока не знаем, как рационально проводить эти вычисления. Например, как можно быстро решить следующий пример:

$$\left(\frac{2^{12}\cdot 2^{28}\cdot 2^{35}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{74}\cdot 10^{25}\cdot (3^3)^8}{(2\cdot 3)^{24}\cdot (5^{42}:5^{16})}\right)^2 ?$$

Для ответа на этот вопрос докажем несколько свойств степеней.

Произведение и частное степеней

Теорема 1. Для любого рационального числа a и любых натуральных m и n.

$$a^m\cdot a^n = a^{m+n}.$$

Доказательство:

Пусть a – произвольное рациональное число, а m и n – произвольные натуральные числа, тогда

$$a^m\cdot a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ множителей}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}} = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m+n\text{ множителей}} = a^{m+n},$$

что и требовалось доказать. ▼

Данное свойство можно распространить на произведение трех и более степеней. Значит, в нашем примере мы можем сразу упростить числитель:

$$2^{12}\cdot 2^{28}\cdot 2^{35} = 2^{12+28+35} = 2^{75}.$$

Теорема 2. Для любого рационального числа a, отличного от 0, и любых натуральных m и n таких, что $m > n$.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доказательство:

Пусть a – произвольное рациональное число, отличное от 0, а m и n – произвольные натуральные числа такие, что $m > n$. Представим частное $a^m : a^n$ в виде дроби и сократим n раз ее числитель и знаменатель на общий множитель a:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ множителей}}\cdot\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m-n\text{ множителей}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}}} = \frac{a^{m-n}}{1} = a^{m-n},$$

что и требовалось доказать. ▼

Теперь в исходном примере мы можем выполнить следующие преобразования:

$$5^{42} : 5^{16} = 5^{42-16} = 5^{26}.$$

Возведение степени в степень

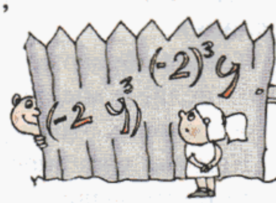
Теорема 3. Для любого рационального числа a и любых натуральных m и n

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Доказательство:

Пусть a – произвольное рациональное число, а m и n – произвольные натуральные числа, тогда

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множителей}} = a^{\overbrace{m + m + \ldots + m}^{n \text{ множителей}}} = a^{m \cdot n},$$



что и требовалось доказать. ▼

Продолжим упрощение исходного примера:

$$(3^3)^8 = 3^{3 \cdot 8} = 3^{24}.$$

Степень произведения и частного (дроби)

Теорема 4. Для любых рациональных чисел a и b и любого натурального числа n

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Доказательство:

Пусть a и b – произвольные рациональные числа, а n – произвольное натуральное число, тогда

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ множителей}} = a^n \cdot b^n,$$

что и требовалось доказать. ▼

Следовательно, в числителе и знаменателе рассматриваемой нами дроби мы можем выполнить следующие преобразования:

$$(2 \cdot 3)^{24} = 2^{24} \cdot 3^{24} \qquad 10^{25} = (2 \cdot 5)^{25} = 2^{25} \cdot 5^{25}$$

Теорема 5. Для любых рациональных чисел a и b, где $b \neq 0$, и любого натурального числа n

$$(a : b)^n = a^n : b^n, \text{ или } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Доказательство:

Поскольку обе записи описывают одно и то же арифметическое действие, то достаточно провести доказательство для одной из них.

Рассмотрим запись частного в виде дроби.

Пусть a и b – произвольные рациональные числа, где $b \neq 0$, и n – произвольное натуральное число, тогда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ множителей}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ множителей}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ множителей}}} = \frac{a^n}{b^n},$$

что и требовалось доказать. ▼

Значит, в числителе приведенного выше примера мы можем записать соответственно степень дроби и вычислить следующее произведение:

$$2^{75} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{74} = 2^{75} \cdot \frac{1^{74}}{2^{74}} = \frac{2^{75} \cdot 1}{2^{74}} = \frac{2^{75}}{2^{74}} = 2^{75-74} = 2^1 = 2.$$

Вернемся теперь к исходному примеру и упростим его, «собрав» все выполненные преобразования вместе, а затем сократим полученную дробь и возведем ее в квадрат:

$$\left(\frac{2^{12}\cdot 2^{28}\cdot 2^{35}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{74}\cdot 10^{25}\cdot(3^3)^8}{(2\cdot 3)^{24}\cdot(5^{42}:5^{16})}\right)^2=\left(\frac{2\cdot(2^{25}\cdot 5^{25})\cdot 3^{24}}{(2^{24}\cdot 3^{24})\cdot 5^{26}}\right)^2=\left(\frac{2\cdot\overset{2}{\cancel{2^{25}}}\cdot\overset{1}{\cancel{5^{25}}}\cdot\overset{1}{\cancel{3^{24}}}}{\underset{1}{\cancel{2^{24}}}\cdot\underset{1}{\cancel{3^{24}}}\cdot\underset{5}{\cancel{5^{26}}}}\right)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}.$$

Мы видим, что полученные нами свойства степеней существенно упрощают вычисления.

Таким образом, у нас теперь есть определение натуральной степени рационального числа, и мы знаем свойства степеней с натуральными показателями. А можно ли расширить это определение на случай нулевого показателя?

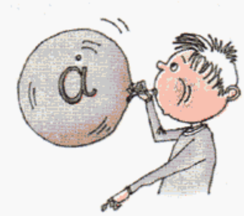
Как мы уже знаем, для этого мы должны руководствоваться фундаментальным принципом развития математической теории, а значит, *вновь введенное понятие не должно нарушать все доказанные ранее свойства*. Например, для любого не равного нулю рационального a должно быть верно следующее равенство:

$$a^0=a^{n-n}=a^n:a^n=1.$$

Поэтому логично ввести определение, по которому $a^0=1$ для любого не равного нулю рационального числа a. Действительно, можно показать, что если принять $a^0=1$ при $a\neq 0$, то все остальные доказанные нами свойства будут также выполняться. Таким образом, расширим определение понятия степени на случай показателя, равного 0.

Определение. Нулевой степенью рационального числа a, отличного от нуля, называется число 1. То есть

$$\forall\ a\in Q,\ a\neq 0:\ a^0=1.$$



Так, например, $12^0=1$, $\left(\frac{4}{5}\right)^0=1$, $(-6)^0=1$.

В завершение выпишем все правила вычислений со степенями, которые следуют из доказанных нами теорем.

Правила вычислений со степенями

1. Для того чтобы умножить степени с одинаковым основанием, можно основание оставить без изменений, а показатели степеней сложить.

2. Для того чтобы разделить степени с одинаковым основанием, не равным нулю, можно основание оставить без изменений, а из показателя делимого вычесть показатель делителя.

3. Для того чтобы возвести степень в степень, можно основание оставить без изменений, а показатели перемножить.

4. Для того чтобы возвести в степень произведение, можно возвести в эту степень каждый из множителей и результаты перемножить.

5. а) Для того чтобы возвести в степень частное, можно возвести в эту степень отдельно делимое и делитель и первый результат разделить на второй.

б) Для того чтобы возвести в степень дробь, можно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель дроби.

Произведение и частное степеней

36 а) Представьте произведение в виде степени:

$0{,}2^3 \cdot 0{,}2^2$; $(-3)^4 \cdot (-3)^6$; $x^{2000} \cdot x^{3000}$, где $x \in Q$.

б) Установите общую формулу для вычисления произведения степеней рациональных чисел с общим основанием и натуральными показателями:

$$a^n \cdot a^m = ?\ (n,\ m \in N;\ a \in Q).$$

37 Запишите произведение в виде степени:

а) $2^7 \cdot 2^8$; г) $a^9 \cdot a^3$; ж) $n^{14} \cdot n \cdot n^{30}$; к) $(pq)^5 \cdot (pq) \cdot (pq)^6 \cdot (pq)^{12}$;

б) $(-5)^{99} \cdot (-5)$; д) $c \cdot c^{437}$; з) $x^6 \cdot x^7 \cdot x^8 \cdot x^9$; л) $\left(\frac{a^2m}{c}\right)^{27} \cdot \left(\frac{a^2m}{c}\right) \cdot \left(\frac{a^2m}{c}\right)^4$;

в) $0{,}4^5 \cdot 0{,}4^{25}$; е) $y^{120} \cdot y^{80}$; и) $b \cdot b^2 \cdot b^3 \cdot b^4 \cdot b^5$; м) $(2x+y)^4 \cdot (2x+y) \cdot (2x+y)^3$.

38 Упростите выражение:

а) $aa^m(-a)^2$; г) $2x^2y^3 \cdot (-4xy^2)$; ж) $2^4 + 2^4$; к) $3^2 + 3^2 + 3^2$;

б) $c^kc(-c^2)c^{k-1}c^3$; д) $0{,}5a(-b)^6 \cdot 10a^2b^2$; з) $2^m + 2^m$; л) $3^k + 3^k + 3^k$;

в) $dd^n(-d^{n+1})d^nd^2$; е) $\frac{1}{6}(-c)^5dk \cdot (-6cdk^3)$; и) $2^m \cdot 2^m$; м) $3^k \cdot 3^k \cdot 3^k$.

39 Запишите выражение a^{15} в виде произведения: а) двух степеней; б) трех степеней; в) четырех степеней с основанием a. Имеются ли другие варианты решения этой задачи?

40 Запишите в виде степени выражение, равное данному:

а) $4 \cdot 8$; б) $3 \cdot 27 \cdot 9$; в) $16 \cdot 2 \cdot 32$; г) $25 \cdot 5^{2k} \cdot 125$; д) $2^m \cdot 2^m \cdot 2^m \cdot 2^m$.

Возможны ли другие варианты записи?

41 Сколькими различными способами можно представить x^6, где $x \in Q$, $x > 0$:

а) в виде произведения двух степеней с основанием x и показателем $n \in N_0$;

б) в виде произведения трех степеней с основанием x и показателем $n \in N_0$?

($N_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, варианты, различающиеся лишь порядком множителей, считать одинаковыми.)

42 Запишите выражение в виде степени при допустимых значениях переменных:

а) $3^9 : 3^7$; г) $x^8 : x^3$; ж) $b^{21} : b : b^{16}$; к) $(mn)^5 : (mn) \cdot (mn)^6 : (mn)^4$;

б) $(-2)^{100} : (-2)^{99}$; д) $y^{32} : y^{32}$; з) $c^7 : c^6 : c \cdot c^9$; л) $\left(\frac{bc}{n^2}\right)^{10} : \left(\frac{bc}{n^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{bc}{n^2}\right)$;

в) $0{,}8^{14} : 0{,}8^{12}$; е) $a^{103} : a^{79}$; и) $d^5 : d^2 \cdot d^7 : d^4 \cdot d$; м) $(3x-4)^8 : (3x-4)^6 : (3x-4)^2$.

43 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $b^{k+5} : (-b)^3$; г) $\frac{a^m \cdot a^3}{a \cdot a^{m-1} \cdot a^2}$; ж) $\frac{68x^4y^2z^3}{17x^2y^3z^4}$; к) $\frac{28p^3q^2 - 32p^3q^2}{12p^3q}$;

б) $-c^n : c^{n-2}$; д) $\frac{x^9 \cdot x^3 \cdot x^{2k}}{x^k \cdot x^4 \cdot x^8}$; з) $\frac{15a^{32}b^{15}c^{56}}{10a^{35}b^{14}c^{56}}$; л) $\frac{35x^2y^3 + 55x^2y^3}{15y^3x^2}$;

в) $(-x)^{2m} : x^{m+1} \cdot x^2$; е) $\frac{y^{n+1} \cdot y^{2n} \cdot y^5}{y^n \cdot y^3 \cdot y^2}$; и) $\frac{80m^{48}n^{22}k^{50}}{16k^{48}m^{45}n^{21}}$; м) $\frac{16ab^2 + 26ab^2}{32a^2b - 15a^2b}$.

44 Докажите, что если $k, m, n \in N$, то значение указанного выражения не зависит от значения переменной. Найдите значение этого выражения.

а) $\dfrac{4^m + 4^m + 4^m + 4^m}{4^m : 4^2}$; б) $\dfrac{\overbrace{10^n + 10^n + \ldots + 10^n}^{10\text{ раз}}}{10^n : 10}$; в) $\dfrac{\overbrace{99^k + 99^k + \ldots + 99^k}^{99\text{ раз}}}{99^{k+2} : 99}$.

45 Замените букву x выражением так, чтобы полученное равенство стало тождеством:

а) $a^2 \cdot x = a^5$; б) $x \cdot b^7 = b^{11}$; в) $c^{35} \cdot x = c^{70}$; г) $x \cdot d^{348} = d^{412}$.

Возведение степени в степень

46 Представьте выражение в виде степени с основанием a:

а) $(a^2)^5$; в) $(a^9)^4$; д) $(a^m)^3$; ж) $(a^k)^n$; и) $(a^4)^3 \cdot a^8$; л) $(a^m)^2 : a^m$;

б) $a^2 \cdot a^5$; г) $a^9 \cdot a^4$; е) $a^m \cdot a^3$; з) $a^k \cdot a^n$; к) $a^{19} \cdot (a^3)^7$; м) $a^{p+8} : (a^4)^2$.

47 Запишите выражение в виде степени с основанием t:

а) $((-x)^2)^{16}$ при $t = -x$; в) $((-pq)^4)^2$ при $t = pq$;

б) $((2nm)^5)^6$ при $t = 2nm$; г) $((-a + 3b)^3)^8$ при $t = 3b - a$.

48 Представьте a^{24} в виде степени с основанием

а) a^2; б) a^3; в) a^4; г) a^6; д) a^8; е) a^{12}.

49 При каком значении n верно равенство:

а) $x^n \cdot x^6 = x^{18}$; б) $(x^n)^6 = x^{18}$; в) $(y^{10})^n = y^{40}$; г) $y^{10} \cdot y^n = y^{40}$?

50 Представьте в виде степени с показателем, отличным от 1, выражение:

а) m^{15} двумя различными способами; б) n^{12} четырьмя различными способами; в) k^{40} шестью различными способами.

51 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{5^3 \cdot a^2 \cdot (b^4)^2 \cdot c^5}{(25)^2 \cdot a^3 \cdot (b^3)^3 \cdot (c^3)^1}$; б) $\dfrac{9^2 \cdot (x^2)^3 \cdot y^5 \cdot z^4}{3^3 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot (y^3)^2 \cdot (z^2)^2}$; в) $\dfrac{k^4 - k^2}{k^4 - k^6}$; г) $\dfrac{m^4 - m^6 + m^8}{m^6 - m^8 + m^{10}}$.

52 Запишите выражение в виде степени с основанием 2, 3 или 5:

а) $2 \cdot 4^6 : 32$; б) $27^4 \cdot 81^2 : 9^5$; в) $8^5 \cdot 16^3 : 128$; г) $125^3 : 25^2 \cdot 625$.

53 Вычислите:

а) $\dfrac{3^{10} \cdot (3^2)^4}{(3^5)^3 \cdot 3}$; б) $\dfrac{(5^2)^6 \cdot (5^7 : 5^4)}{(-125)^5}$; в) $\dfrac{(-3)^9 \cdot 9^2 \cdot 81^3}{-27^{10} : 3^5}$; г) $\dfrac{32^4 \cdot (-2)^8 : 64^3}{-128^3 : (-8)^4}$.

Степень произведения и частного (дроби)

54 Возведите произведение в степень:

а) $(-2ab)^3$; в) $(-x^2y)^6$; д) $(6a^2b^3c)^2$; ж) $(-4p^3q^4)^{10}$; и) $(5r^5s^8t^4)^7$;

б) $(\frac{5}{7}cdk)^2$; г) $(-0{,}1pq^2r)^5$; е) $(-\frac{2}{3}km^2n^4)^3$; з) $(7c^2x^5d)^9$; к) $(-u^3v^6w^9)^8$.

55 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) $-m^5n^5$; в) $0{,}49a^2b^2c^2$; д) $-27q^6r^3$; ж) $-a^6b^3ab^4$; и) $125p^6q^{10}r^{12}q^5$;

б) $25c^2d^2$; г) $-\frac{1}{8}x^3y^3z^3$; е) $9a^4b^2c^6$; з) $16c^3d^2d^2c$; к) $-32m^{10}n^8l^{75}n^7$.

56 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) $8a^{17}b^4c^{36}d^8a^{16}b^{20}d^{13}$; б) $xzr^{90}y^8z^{14}x^{50}y^{60}r^{63}z^{70}$; в) $m^{369}n^{287}$; г) $p^{119}q^{323}$.

57 а) Докажите, что если сторону квадрата увеличить в n раз, то его площадь увеличится в n^2 раз.

б) Во сколько раз увеличится объем куба, если его сторону увеличить в m раз?

58 Вычислите рациональным способом:

а) $0{,}5^{16} \cdot 2^{16}$; б) $4^{21} \cdot (-0{,}25)^{20}$; в) $(-0{,}125)^9 \cdot 8^{10}$; г) $\left(\frac{7}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{12}{7}\right)^5$.

59 Запишите выражение в виде частного степеней:

а) $(5 : 3)^{12}$; б) $\left(\frac{2}{15}\right)^n$; в) $(-a : b)^m$; г) $\left(\frac{c}{-d}\right)^{24}$; д) $((-4p) : 7)^8$; е) $\left(\frac{3x}{2yz}\right)^k$.

60 Представьте выражение в виде степени дроби с показателем, отличным от 1:

а) $121 : 9$; б) $27 : 64$; в) $\frac{36}{p^2}$; г) $\frac{q^3}{125}$; д) $(49)^2 : r^4$.

61 Представьте выражение в виде степени дроби с показателем, отличным от 1:

а) $(-27a^{27}) : (b^{33}c^{39})$; б) $\frac{81x^{16}y^{48}}{z^{52}}$; в) $a^{253} : (-b^{299})$; г) $p^{1083} : q^{1197}$.

62 Вычислите рациональным способом:

а) $56^5 : 28^5$; в) $0{,}18^3 : (-0{,}9)^3$;

б) $\frac{(-750)^6}{75^6}$; г) $\left(\frac{12}{19}\right)^4 : \left(\frac{4}{19}\right)^4$.

63 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\left(\frac{1}{a^3}\right)^2 \cdot (-3aa^4)$; в) $\frac{-3x^2 \cdot (-xy)^3 \cdot x^0 \cdot y^0}{(x^2)^3 \cdot (-3y)^2}$; д) $\frac{(4bc^3) \cdot (-ac^2)^2 \cdot (2a^2b^3c)^3}{(-2b^2c^2)^5 \cdot (((-a)^2)^2)^2}$;

б) $(-2b^2)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2b^3}\right)^3$; г) $\frac{(m^2n)^3 \cdot (mn^4) \cdot (-25m)^2}{(-5m^3n^2)^3 \cdot (mn)^0}$; е) $\frac{(x^2yz)^4 \cdot (7y^2)^3 \cdot (2x^2z)^2}{(-((-x)^2)^2)^3 \cdot (14y^5z^3)^2}$.

64 Вычислите:

а) $\dfrac{5^6 \cdot 6^4 \cdot 5^3 \cdot (2^5)^2 \cdot (3^9 : 3^3)}{10^5 \cdot 25^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot 15^7 \cdot 2^8}$; б) $\dfrac{77^4 \cdot 11^3 \cdot (2 : 7)^2 \cdot 28^3}{(4^6 : 2^4) \cdot 7^6 \cdot 16^0 \cdot (11^2)^5 \cdot \left(\frac{7}{11}\right)^3}$.

65 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{b^{17} \cdot b^{24} \cdot b^{48} \cdot (b^3)^5 \cdot (2b)^{13}}{(2b^3)^{12} \cdot (b^{31} : b^{18}) \cdot b^{49} \cdot b^{18}} + b^0$ при $b = 7$;

б) $\dfrac{3^{49} \cdot (c^{96} : c^{75}) \cdot d^{36} \cdot d^{45} \cdot (cd)^{39}}{c^8 \cdot d^{35} \cdot (d^{18} : d^{13}) \cdot (d^6)^8 \cdot d^{31} \cdot (3c)^{48} \cdot c^3} - 2(bc)^0$ при $c = -\frac{1}{6}$, $d = -2$.

66 Найдите все натуральные значения x, удовлетворяющие равенствам:

а) $6^x = 216$; б) $5^{x+2} = 125$; в) $2^{4y} = 256$; г) $3^{x-2} = 243$.

67 Вычислите A, если:

а) $4^k = 64$, $8^m = 64$; $A = k^2 + m^2$;

б) $5^c = 625$, $7^d = 49$, $A = (c + d)^2$;

в) $3^x = 81$, $10^y = 100$, $A = x^y$;

д) $2^{3p-1} = 32$, $3^{q+3} = 27$, $A = (p^{10})^q$.

68 **Математическое исследование.**

Исходя из фундаментального принципа развития математической теории (принципа неразрушения) подумайте, как можно было бы дать определение степени рационального числа с целым показателем. Как в этом случае будут связаны между собой степени одного и того же отличного от нуля числа с противоположными показателями?

69 Прочитайте высказывание и определите, истинно оно или ложно. Если высказывание ложно, постройте его отрицание и докажите истинность отрицания.

а) $\forall\ a, b \in Q$: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$;

б) $\exists\ a, b \in Q$: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$;

в) $\forall\ x \in Q$, $n \in N$: $|x^{2n}| = x^{2n}$;

г) $\exists\ x \in Q$, $n \in N$: $|x^{2n}| = -x^{2n}$.

70 Изобразите на координатной прямой множество значений x, для которых:

а) $x > 4$;
б) $x \leqslant -2$;
в) $-5 \leqslant x < 1$;
г) $-5 < x \leqslant 1$;
д) $|x| < 3$;
е) $|x| \geqslant 3$;
ж) $|x - 2| > 4$;
з) $|x + 2| \leqslant 1$;
и) $3 \leqslant |x| < 5$;
к) $-3 \leqslant |x| < 5$.

71 а) Две пловчихи, Катя и Даша, поплыли по реке из одного места. Катя поплыла по течению, а Даша – против течения. Через четверть часа девушки развернулись и поплыли навстречу друг другу. Через сколько времени после старта они встретятся, если они плывут с одинаковой собственной скоростью?

б) От пристани Киевского вокзала вниз по течению отправился прогулочный теплоход, затем он развернулся и вернулся на пристань Киевского вокзала через 7 часов. Сколько километров проплыл теплоход за время этой прогулки, если теплоход плыл с собственной скоростью, равной 21 км/ч, а скорость течения равна 2 км/ч.

в) Поднимаясь вверх по движущемуся эскалатору, Ваня насчитал 20 ступенек, при этом весь путь занял у него 60 с. Маша же, поднимаясь вверх по тому же эскалатору, насчитала 16 ступенек, а весь путь у нее занял 72 с. Сколько ступенек насчитает Ваня, поднимаясь вверх по неподвижному эскалатору, если эскалатор движется с постоянной скоростью?

72 Упростите выражение при допустимых значениях величин:

а) $x + (2x - 4y) - (3x + 2y - (x + (6y - 5x)) - 2x)$;

б) $a - (a - (a - ((a - 2b) - a))) - (a - (a - b + 2(a - b)))$;

в) $(-1{,}5pq^2) : (-p) \cdot (0{,}25qr) : (-3pr) \cdot (4p^2q) : (0{,}5pq)$;

г) $\dfrac{3xy \cdot \frac{2}{5}xz - 2x \cdot xyz - \frac{1}{3}x^2yz + x - (5 + 2x - 7) + x - 2}{2xy - 2yz \cdot z - xy + 2yz \cdot y + \frac{13}{15}z^2y - 4zy^2 + 2zy \cdot y - xy}$.

73 Разложите числа на простые множители и найдите их НОД и НОК:

а) 24 и 256;
б) 42 и 108;
в) 512 и 100 000;
г) 216 и 243.

74 С помощью алгоритма Евклида найдите НОД данных чисел, а затем найдите их НОК:

а) 476 и 901; б) 207 и 989; в) 779 и 1435; г) 534 и 1157.

75 Решите уравнение:

а) $5y - 9 = 2\frac{1}{4}$; в) $4{,}3(a - 2) + 3{,}7(a - 2) = 2\frac{2}{3} - 16$;

б) $(7x + 4{,}2) - (1{,}2 + 5x) = 3\frac{2}{7}$; г) $5\frac{1}{3} - 3{,}2(c - 3) + 1{,}5(c - 2) = 0{,}7c - \frac{1}{15}$.

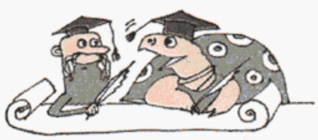
76 Докажите, что для любых целых a:

а) если $a + 1$ делится на 3, то $4 + 7a$ делится на 3;

б) если $a + 2$ делится на 5, то $1 + 3a$ делится на 5;

в) если $2a + 1$ делится на 7, то $12a - 1$ делится на 7;

г) если $3a + 2$ делится на 11, то $21a + 3$ делится на 11.



Д **77** Запишите выражение в виде степени при допустимых значениях переменных:

а) xx^3xx^7; г) $5 \cdot 125 \cdot 25$; ж) $b^8 : b^3$; к) $(a^n)^8$;

б) $(-2a)^2(-2a)(-2a)^5$; д) $8 \cdot 32 \cdot 16$; з) $n^9 : n^6 \cdot n$; л) $(d^5)^3 \cdot d^6$;

в) $c^m cc^2 c^{m+1} c$; е) $3^n \cdot 27 \cdot 3^{n-4} \cdot 9$; и) $y^{2k} : y^4 \cdot y^7 : y^k$; м) $a^{24} : (a^2)^m$.

78 Упростите выражение при допустимых значениях переменной:

а) $3ab^2 : (-0{,}2a^3b)$; г) $\frac{b^2 \cdot b^n \cdot b^3}{b^{n-2} \cdot b^6}$; ж) $\frac{2^7 \cdot x^3 \cdot (-x^3)^2 \cdot x^4}{64 \cdot (-x^2)^5 \cdot x^2 \cdot x^3}$;

б) $\frac{5}{12}(-x)^3yz \cdot 6 : (-xyz^2)$; д) $\frac{36a^2c^5y^3}{18c^6y^2a^2}$; з) $\frac{49^2 \cdot (m^3)^5 \cdot n^8 \cdot k^6}{7^4 \cdot k \cdot k^5 \cdot (n^4)^2 \cdot (m^2)^7}$;

в) $-0{,}8m^2nk^2 \cdot 12{,}5 : ((-m)^4n^2k^3)$; е) $\frac{18kd^3 - 6kd^3}{5k^2d + 7k^2d}$; и) $\frac{a^n + a^{n+2}}{a^n + a^{n-2}}$.

79 Запишите выражение в виде степени с основанием 2, 3 или 5:

а) $(3^4)^6$; б) $25 \cdot 5^7 : 125^2$; в) $9^5 : 81 \cdot 3^2 : 27$; г) $-\frac{(-2^2)^5 \cdot 2^8}{2 \cdot 4^7 \cdot (-2)^2}$; д) $((5^4)^3)^2)^1$.

80 Представьте x^{18} в виде степени с основанием: а) x^2; б) x^3; в) x^6; г) x^9.

81 Возведите в степень:

а) $(4bc)^2$; б) $(-\frac{3}{2}mnk)^3$; в) $(-a^2b)^5$; г) $(0{,}2x^2yz^3)^4$; д) $\left(\frac{5}{7}\right)^m$; е) $\left(\frac{p^2}{3qr^3}\right)^2$.

82 Возведите выражения $4a^3$; $-0{,}3xy^4z^2$; $\frac{2m^5}{5n^2k}$: а) в квадрат; б) в куб.

83 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) m^8n^8; б) $-0{,}125x^3y^3z^6$; в) $16a^2ba^4b$; г) $\frac{27^2}{y^6}$; д) $\frac{100c^2d^2}{m^6}$; е) $-\frac{x^3y^2x^2y^8}{32z^5}$.

84 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) $49x^6y^{34}z^{26}$; б) $\frac{32a^{25}b^{15}}{c^{75}}$; в) $x^{473}y^{731}$; г) $c^{377} : d^{493}$.

85 Вычислите рациональным способом:

а) $25^6 \cdot 0{,}04^6$; б) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{14} \cdot 0{,}8^{15}$; в) $(-24)^9 : 2{,}4^8$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} : \left(\frac{3}{8}\right)^{10}$.

86 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{4x \cdot (-3y)^2 \cdot x^3}{(6x^2y)^2}$; б) $\dfrac{((-m)^2)^3 \cdot ((-m)^3)^2}{(-(-m)^4)^3}$; в) $\dfrac{(0{,}5a^2b^4)^2 \cdot (-2a^3b)^3}{(ab)^{11} \cdot ((-b^2)^1)^0}$.

87 При каком значении m верно равенство:

а) $x^8 \cdot x^m = x^{24}$; б) $(x^8)^m = x^{24}$; в) $(y^m)^5 = y^{40}$; г) $y^m \cdot y^5 = y^{40}$.

88 Вычислите:

а) $\dfrac{7^6 \cdot 22^3 \cdot (2^5)^2 \cdot (11^{10} : 11^8) \cdot 28^4}{14^3 \cdot \left(\frac{8}{11}\right)^4 \cdot 44^3 \cdot 77^6}$; б) $\dfrac{(9^7 : 3^4) \cdot 15^8 \cdot (7^3)^2 \cdot \left(\frac{5^{11}}{5^4}\right) \cdot 7^4}{21^{10} \cdot 25^6 \cdot 45^4} + 2{,}315^0$.

89 Постройте математическую модель и решите задачу:

Прогулка сотрудников пончиковой компании Антона и Ксюши по Москве-реке началась в 10 ч утра, когда теплоход отчалил от пристани в Коломенском. Поплыв вниз по течению реки, он через некоторое время остановился на зеленой стоянке, где был устроен пикник, занявший 3 часа. После этого все опять разместились на теплоходе и вернулись на пристань в Коломенском в 9 ч вечера. Чему равно расстояние до места пикника, если скорость течения реки равна 3 км/ч, а собственная скорость теплохода не менялась и была равна 15 км/ч?

90 Докажите, что числа A и B имеют одинаковые остатки при делении на 7.

$A = \left[\left(42{,}4 \cdot \frac{3}{4} - 21{,}2\right) \cdot 50 + 100 \cdot \left(60 \cdot \left(14\frac{1}{9} - 13\frac{134}{135}\right) : \frac{32}{45} + 3{,}75 \cdot \frac{6}{25}\right)\right]$;

$B = 25 \cdot \left[17\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} - \left(3\frac{2}{3} - 2\frac{7}{60}\right)\right] \cdot \left(\frac{11}{40} : 4\frac{7}{12} + 9{,}94\right)$.

C **91*** Сравните значения выражений:

а) 2^{10} и 10^3; б) 10^{100} и 100^{10}; в) 2^{300} и 3^{200}; г) 31^{16} и 17^{20}; д) 4^{53} и 15^{45}.

92* В гимназии 85 школьников. На занятия английским языком ходят 42 человека, немецким – 28, французским – 30. При этом 10 человек ходят как на занятия английским языком, так и немецким, 5 человек – на занятия английским и французским языками, а 8 человек – на занятия немецким и французским языками. Все эти три языка изучают 3 школьника. Сколько школьников не учат эти иностранные языки?

93* Король решил устроить испытание жениху своей дочери. В одну их трех комнат он посадил принцессу, в другую – дракона, а третью комнату оставил пустой. Если жених угадает, в какой комнате принцесса, то сможет на ней жениться. Табличка на той комнате, где находится принцесса, истинна, на той комнате, где сидит дракон, – ложна, а табличка на пустой комнате может быть как истинной, так и ложной. На комнате 1 висит табличка «Комната 3 пуста», на комнате 2 – «Дракон в комнате 1», на комнате 3 – «Эта комната пуста». В какой комнате находится принцесса?

§ 2. Многочлены и действия с ними

2. Одночлены

Математика имеет целью найти общие методы для получения эффективных результатов в различных сферах человеческой деятельности.

Граве Дмитрий Александрович (1863–1939), русский математик

При решении задач мы часто сталкиваемся с произведениями различного вида. Так, например, объем прямоугольного параллелепипеда есть произведение трех его измерений; выполненная работа – произведение производительности и затраченного времени и т.д. Поэтому выражения, в которых используется только действие умножения, имеют в математике отдельное название и специально изучаются.

Определение 1. Произведение, состоящее из числовых множителей и множителей-переменных, называется **одночленом.**

Напомним, что возведение в степень также является умножением. Поэтому одночленами являются, например, следующие произведения:

$$yxxxcy \cdot (-0{,}5), \qquad (-n^2 \cdot 2 \cdot b)^4, \qquad m \cdot \frac{1}{8} \cdot z^5 \cdot (-2k)^3.$$

Отдельные числа и переменные также являются одночленами, так как их всегда можно представить в виде произведения, например, $d = d \cdot 1$, $14 = 14 \cdot a^0$. А вот выражения $x + 1$, $y^2 - 3$ и $\frac{7x}{5y}$ одночленами не являются, поскольку содержат действия соответственно сложения, вычитания, деления. Если среди множителей одночлена имеется нуль, то такой одночлен называется *нулевым*. Например, одночлен $0 \cdot a^3 \cdot (-7c^3)$ – нулевой.

Определение 2. Произведение всех числовых множителей одночлена называется **коэффициентом** одночлена.

Так, например, коэффициентом одночлена $yxxxcy \cdot (-0{,}5)$ является число $(-0{,}5)$, а одночлена $m \cdot \frac{1}{8} \cdot z^5 \cdot (-2k)^3$ – число $\frac{1}{8} \cdot (-2)^3 = -1$.

Если коэффициент одночлена равен 1 или −1, то числовой множитель в его записи обычно не указывают. И наоборот, если в записи одночлена имеются только буквенные множители, то его коэффициент, соответственно стоящему перед ним знаку, считают равным либо 1, либо −1. Таким образом, каждый одночлен может быть представлен в виде произведения своего коэффициента и степеней входящих в него переменных. Например:

$$(-0{,}5) \cdot y^2x^3c^1, \qquad 16 \cdot n^8b^4, \qquad -1 \cdot m^1z^5k^3, \qquad 1 \cdot d^1, \qquad 14 \cdot a^0.$$

Каждый из одночленов можно записать несколькими различными способами. При этом два одночлена считаются равными, если один из них может быть получен из другого с помощью равносильных преобразований.

Так, например,

$$yxxxcy \cdot (-0{,}5) = (-0{,}5)y^2x^3c = -0{,}5cx^3y^2.$$

Поэтому для того, чтобы легче было производить действия с одночленами, вычислять их значение при известных значениях входящих в них букв, договорились записывать одночлены в так называемом *стандартном виде*.

Определение 3. **Стандартным видом** ненулевого одночлена называется его запись, при которой:

1) коэффициент стоит на первом месте;

2) каждая переменная участвует в записи одночлена лишь один раз в виде соответствующей степени;

3) буквы в записи одночлена (если они есть) следуют в алфавитном порядке.

Например, приведенные выше одночлены в стандартном виде записываются так:

$$-0{,}5cx^3y^2, \qquad 16b^4n^8, \qquad -k^2mz^5, \qquad d, \qquad 14.$$

Определение 4. **Стандартным видом** нулевого одночлена называется число 0.

Проанализируем, как в рассмотренных примерах мы записывали одночлены в стандартном виде, и построим соответствующий алгоритм.

Алгоритм записи одночлена в стандартном виде

1. Вычислить произведение всех числовых множителей (коэффициент) одночлена и записать его на первом месте.
2. Определить, какие переменные входят в одночлен, и записать их в алфавитном порядке.
3. Найти и записать степени переменных.

После того как мы научились записывать одночлены в стандартном виде, нам становится проще определять некоторые их характеристики и производить с ними арифметические действия.

Одной из важных характеристик одночлена является его *степень*. Например, для одночленов одинаковой степени мы можем установить общие методы решения уравнений, в которые эти одночлены входят. Выбор метода решения задач всегда играет ключевую роль и во многом определяет успех. Поэтому нам важно уточнить это понятие и научиться его применять.

Определение 5. **Степенью ненулевого одночлена** называется сумма показателей степеней входящих в одночлен переменных.

Так, степени рассмотренных нами выше одночленов равны соответственно 6, 12, 8, 1 и 0.

Степень нулевого одночлена не определяется.

Выполнять арифметические действия с одночленами достаточно легко. Ведь мы всегда можем записать сумму, разность, произведение и частное нескольких одночленов (кроме деления на нулевой одночлен). При умножении и возведении в степень одночленов в результате всегда будут получаться одночлены, поскольку никаких других действий, кроме умножения, мы при этом не производим. А вот при сложении и вычитании двух одночленов ситуация иная: одночлен в итоге может получиться лишь тогда, когда слагаемые составленной алгебраической суммы, записанные в стандартном виде, имеют одинаковую буквенную часть.

Определение 6. Одночлены, имеющие в стандартном виде одинаковую буквенную часть, называются **подобными**.

Подобными являются, например, одночлены $-3a^2b$ и a^2b. При их сложении или вычитании, применив распределительный закон умножения, мы вновь получим одночлен, например:

$$-3a^2b + a^2b = (-3 + 1)a^2b = -2a^2b \qquad -3a^2b - a^2b = (-3 - 1)a^2b = -4a^2b.$$

Равносильное преобразование, в результате которого все подобные между собой одночлены записываются как один одночлен, называется **приведением подобных слагаемых**.

Приведение одночленов к стандартному виду и приведение подобных слагаемых позволяет упрощать решение различных задач и примеров.

Пример. Определите, можно ли записать данное выражение, как одночлен и найдите его значение при $m = -48$, $n = -0{,}32$, $k = 5{,}6$:

$$mkn(0{,}5k)^2\,mn^4 - 2nnnk^3nm^2n + knkn \cdot 1\frac{3}{4} \cdot mkn^2mn.$$

Решение:

Мы видим, что сразу ответить на поставленный вопрос очень непросто. Приведем каждый из одночленов данной алгебраической суммы к стандартному виду и упростим полученное выражение:

$$0{,}25k^3n^5m^2 - 2k^3n^5m^2 + 1\frac{3}{4} \cdot k^3n^5m^2 = (0{,}25 - 2 + 1{,}75)\,k^3n^5m^2 = 0 \cdot k^3n^5m^2 = 0.$$

Таким образом, фактически устно мы получили, что при всех значениях m, n и k (в том числе и при указанных в условии) значение данного выражения будет равно 0. А значит, данное выражение является нулевым одночленом.

К **94** 1) Запишите следующие выражения:

а) Удвоенный куб числа a.

б) Разность квадрата числа x и частного чисел y и z.

в) Сумма кубов чисел m, n и k.

г) Утроенное произведение квадрата числа b и куба пятой степени числа c.

2) Исходя из смысла слов русского языка, выскажите предположение, какие из записанных вами выражений можно назвать «одночленами». Проверьте свое предположение, используя определение понятия одночлена, приведенное на стр. 19.

95 Прочитайте выражение и определите, является ли оно одночленом. Обоснуйте свой ответ.

а) $2ab^2$; в) $3(a^2 + c^2)$; д) $\frac{1}{9}$; ж) 0; и) $\frac{1}{x} \cdot 5y$;

б) $\frac{1}{12} \cdot d^7$; г) $-k$; е) $m^3(n^2)^6$; з) $-2(x - y)^3$; к) $-\frac{4}{7}c^0k^0$.

96 (Устно.) Найдите коэффициент одночлена:

а) $4x^2 \cdot 3y^3$; в) $0{,}2a \cdot \frac{1}{2}c^2 \cdot (-7b)$; д) $(-a)^2$; ж) $-\frac{2}{3}ab^3 \cdot (6ac)^2$;

б) $-1{,}2r^2s \cdot 0{,}3t$; г) $-3bc^3 \cdot (-y^4) \cdot \frac{5}{9}xb$; е) $-p^2(-q)^4$; з) $(-0{,}5m^2)^3 \cdot (-8n^3m)$.

97 Приведите одночлен к стандартному виду, определите его коэффициент и степень:

а) $3mmddm \cdot 8md^2$; г) $(-0{,}1ky^4)^2 \cdot 40y^2k^3$; ж) $-1{,}8bac^2 \cdot \left(\frac{1}{3}c^2ab^4\right)^2$;

б) $14yx^2yx \cdot (-\frac{5}{7}xy)$; д) $(5ab)^3 \cdot (-0{,}2a^2b)^2$; з) $\frac{5}{24}k^2 \cdot (-2kcn^2)^3 \cdot (-0{,}6n^2c)$;

в) $-\frac{3}{4}cb^2c^3 \cdot (-0{,}4)b^3c^2$; е) $12{,}5(-n)^4d \cdot (0{,}2dn^2)^3$; и) $\left(\frac{2}{3}a^2y\right)^2 \cdot 4{,}5n^2ay^2 \cdot (-yn)^3$.

98 Представьте данный одночлен как степень некоторого одночлена:

а) $0{,}16a^4b^2$; б) $6\frac{1}{4}n^{12}d^{\,20}$; в) $-\frac{1}{125}m^3n^3k^6$; г) $0{,}0081x^8y^4z^{12}$; д) $-32a^{10}c^5y^5d^{15}$.

99 Среди указанных одночленов найдите подобные:

а) $2xy$; $-4x^2y$; $3xy^2$; $\frac{1}{2}x^2y^2$; $-5y^2x$;

б) $7a^3b$; $0{,}4a^3c$; $-9{,}8ab^3$; aba^2; $-\frac{9}{11}ca^3$;

в) $-\frac{6}{7}m^2nk$; $1{,}3n^2mk$; $-\frac{3}{4}k^2nm$; $nmnk$; $2{,}5mn^2k$.

100 Составьте из букв a, b и c восемь подобных между собой одночленов шестой степени с буквенными частями, записанными разными способами.

101 Выполните указанные действия над одночленами (при допустимых значениях переменных) и докажите, что в результате их получится одночлен. Запишите его в стандартном виде.

а) $(3a^2b - 4ba^2) + 5aba$; д) $15c^8d^2 : (c^4d) - 9c^5d^3 : (3cd^2)$;

б) $7x^4y^2 - (2x^2y^2x^2 + 6y^2x^4)$; е) $(-ab^3 : 5)^2 \cdot (5a : b) : (ba : 5) - 6a^3b^7 : (3ab^3)$;

в) $-0{,}5p^2 \cdot (2pq)^3 + 12p^4q^3p$; ж) $(3xy)^3 \cdot (5xy)^2 : (15x^2y)^2 - (5xy) \cdot y^2 + y^3x$;

г) $(3mn)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}mn\right)^2 - 5n^5m^5$; з) $k^7m^4 - ((3k^2m)^4 : 27k + k(k^3m^2)^2)$.

102 Запишите данное выражение как одночлен стандартного вида. Запишите подобный ему одночлен с коэффициентом a.

а) $(x^2 - (6xy^2 - 3x^2)) - 5xy^2 + 5x^2 - (7x^2 - (-2x^2 + (11xy^2 - xy^2 - 3xy^2)))$, если $a = -1$;

б) $2pq^2 + 4(3pq^2 - q) - 5pq^2 - 8pq^2 + (5q - 2(6q - 4pq^2 - pq^2) + 11q + pq^2)$, если $a = 1$;

в) $c^2b - (4c + 2c(4 - (6 - 3cb))) + 0{,}5(12c + 4c^2b) - 3c + 3(6c^2b - c)$, если $a = 1{,}5$;

г) $5x^2z^3 - ((5xz - 3x^2z^3) - 2x^2z^3) + 2xz - 3(2x^2z^3 - x^2z^3) + 3xz + 0{,}5(-4x^2z^3)$, если $a = -\frac{1}{3}$.

103 Докажите, что данное выражение может быть записано в виде одночлена. Запишите его в стандартном виде и найдите его значение при данных значениях букв.

а) $5m^2n - 4(3n - 2m^2n) + 0{,}5(2m^2n - 4(m^2n - 3n)) - 3(m^2n - 2n)$ при $m = 1$, $n = -1$;

б) $0{,}8a^2b \cdot 2{,}5ab + 9ab^2 \cdot \frac{1}{3}a^2 - 7a^3b^2$ при $a = 2$, $b = -3$;

в) $2pq^2r + pq(7qr - 2r^2) - 6p^2 - 3(4pq^2r - 2p^2) + 2pqr^2$ при $p = 2$, $q = -1$, $r = 1$;

г) $(5ac)^2 - 2ac(8ac - 7ab) - 5a^2(c^2 + 3bc) + a^2bc$ при $a = 5$, $b = -12$, $c = -3$.

104 Какие одночлены надо поставить вместо A, B, C и D, чтобы выражения превратились в истинные равенства?

а) $7x^2y^3 + A = 13x^2y^3$;
б) $21p^7q^9 - B = 4p^7q^9$;
в) $11a^7b^4 \cdot C = 5b^{11}a^{12}$ $(a,\ b \neq 0)$;
г) $36m^{12}n^{26} : D = 4m^3n^{21}$ $(m,\ n \neq 0)$.

105 Какие одночлены надо подставить вместо A и B, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $A^2B^5 = 32x^8y^{15}z^4$;
б) $A^{11}B^4 = 81p^{22}q^4r^{10}s^{12}trt^3q^4$;
в) $A^3B^7 = 27a^4b^2c^5d^2 \cdot 8a^3b^4c^2d$;
г) $A^5B^{12} = m^4n^2k^5t^3t^9n^{10}k^5m^8$.

П **106** Прочитайте высказывание и определите, истинно оно или ложно. Для ложных высказываний постройте отрицания и докажите истинность отрицаний.

а) $\forall\ x \in Q$: $x^5 \cdot x^5 = x^{25}$;
б) $\exists\ x \in Q$: $x^5 \cdot x^5 = x^{25}$;
в) $\forall\ x,\ y \in Q$: $(xy^4)^2 = x^2y^6$;
г) $\exists\ x,\ y \in Q$: $(xy^4)^2 = xy$.

107 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Число мужчин, женщин и детей, занимающихся в секции тенниса, относится как 3 : 5 : 9. Сколько детей в этой секции, если всего в ней занимаются 34 человека?

б) Число однокомнатных, двухкомнатных, трехкомнатных и четырехкомнатных квартир в доме относится как 5,7 : 5,6 : 2,2 : 1,5. Сколько трехкомнатных квартир в этом доме, если в нем всего 150 квартир?

в) Для изготовления блинов берут муку, молоко, яичный порошок и прочие компоненты (сахар, сода, соль) в отношении 2 : 4 : 0,75 : 0,25. Сколько нужно муки, чтобы приготовить 3,5 кг блинов?

108 Выполните указанное действие по модулю m:

а) $13 + 11$, $m = 7$;
б) $9 + 17$, $m = 9$;
в) $11 + 11 + 11$, $m = 14$;
г) $27 - 3$, $m = 8$;
д) $35 - 12$, $m = 4$;
е) $48 - 17$, $m = 3$;
ж) $6 \cdot 3$, $m = 5$;
з) $19 \cdot 2$, $m = 6$;
и) 7^2, $m = 11$.

109 Докажите, что для любых целых a:

а) $a^3 + 2a^2 + 3a$ либо делится на 4, либо при делении на 4 дает остаток 2;
б) $2a^3 + a^2 + 5a$ либо делится на 3, либо при делении на 3 дает остаток 2.

Д **110** Приведите одночлен к стандартному виду, определите его коэффициент и степень:

а) $15ab^3ab \cdot (-\frac{3}{5}a^2b)$;
б) $24x^3 \cdot (-\frac{1}{2}yzx)^3 \cdot (-0{,}2x^3z)$.

111 Выполните указанные действия (при допустимых значениях переменных) и докажите, что в результате их получится одночлен. Запишите его в стандартном виде.

а) $11a^3b^4 - (5ab^4a^2 + 4b^4a^3)$;
б) $-0{,}2cd^3 \cdot (5dc)^2 + 7c^2d^5c$;
в) $(9x : y^2) \cdot (x^2y : 3)^3 \cdot \frac{6}{x^2} - 8x^4y^2 : (2yx^2)$;
г) $(7pq^2)^2 \cdot (2q^3p) : (-14q^5p^2) - (3qp)^3 : (-9qp^2)$.

112 Запишите данное выражение как одночлен стандартного вида. Запишите подобный ему одночлен с коэффициентом a.

а) $2x - (3xy^2 - 4x) + 5xy^2 - 7x - (9x - (10x - (4xy^2 - 3xy^2 - 2xy^2)))$, если $a = -2$;

б) $4cb^2 - (7cb^2 - 2c) - 2cb^2 - cb^2 + (4c - (6c - 2cb^2 - cb^2) + cb^2)$, если $a = 3$.

113 Докажите, что данное выражение может быть записано в виде одночлена. Запишите его в стандартном виде и найдите его значение при данных значениях букв.

а) $7x^3y - 4(2xy - x^3y) - (8x^3y - (3x^3y + 4xy)) - 4(2x^3y - xy)$ при $x = 2$, $y = -2$;

б) $(3ml)^3 - 6(mn)^3 - 2m^3(4l^3 - 3n^3) - 20m^3l^3$ при $m = 1$, $n = -1$, $l = -2$.

114 Какие одночлены надо поставить вместо A, B, C и D, чтобы выражения превратились в истинные равенства?

а) $9a^5b^7 + A = 28a^5b^7$;

б) $48m^3n^{11} - C = 14m^3n^{11}$;

в) $19x^4y^3 \cdot B = 4x^6y^8$ $(x,\ y \neq 0)$;

г) $55p^{12}q^{18} : D = 11p^2q^7$ $(p,\ q \neq 0)$.

115 Какие одночлены надо подставить вместо A и B, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $A^6B^9 = 64p^{12}q^{27}r^{24}s^9$;

б) $A^5B^{12} = 27x^7y^3z^5t^6 \cdot 9y^2x^5t^6$.

116 Количество сотрудников пяти филиалов пончиковой компании Антона и Ксюши – московского, питерского, воронежского, казанского, сочинского – относится как 7,25 : 3 : 2 : 1,25 : 2,5. Определите, сколько сотрудников работает в каждом филиале, если всего в этих пяти филиалах работает 320 человек.

117 Докажите, что $a^3 + 4a$ для любых целых a либо делится на 5, либо при делении на 5 дает остаток 1, либо при делении на 5 дает остаток 4.

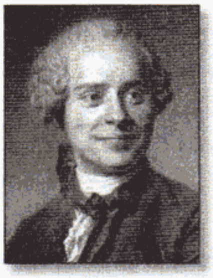
118 Докажите, что разность A и B делится на 17:

$$A = \frac{\left(9\frac{1}{4} - 7\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{4}{37} - 1\frac{1}{2}}{0{,}1\cdot\left(3\frac{1}{8} + 4\frac{3}{20} - 1\frac{1}{6} - 5\frac{2}{5}\right) : 4\frac{1}{4}};\qquad B = \left(\frac{3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{9} - 6\frac{5}{6}}{5\frac{7}{8} - 2\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} : 1\frac{2}{9}\right)\cdot 150.$$

C **119*** На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести 5 реформ. Каждой реформой недовольна половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге?

120* Несколько друзей нашли клад и начали его делить. Первый взял 100 золотых монет и десятую часть остатка. Второй взял 200 золотых монет и десятую часть остатка, третий – 300 золотых монет и десятую часть остатка, и так до последнего. Сколько золотых монет было в найденном кладе и сколько было друзей, если в процессе указанного дележа все получили поровну?

2. Многочлены



Алгебра щедра. Зачастую она дает больше, чем у нее спрашивают.

Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783), французский математик, механик и философ

Как мы уже знаем, алгебраическая сумма нескольких одночленов является одночленом, только если речь идет о сложении и вычитании подобных одночленов. В общем случае мы получаем новое выражение, называемое *многочленом.*

Определение 1. Выражение, записанное как алгебраическая сумма одночленов, называется **многочленом.**

Например, многочленами являются выражения:

$$2x + 3y \qquad 5 - a^2 + 6a - ab^2 \qquad 3n^2 - 8 + 4n^6$$

Изучение свойств многочленов крайне важно, так как часто они являются математическими моделями практических задач. Так, например, стоимость покупки из 2 книг по цене x р. и 3 журналов по цене y р. или длину пути автомобиля, ехавшего 2 ч со скоростью x км/ч и 3 ч со скоростью y км/ч, можно записать с помощью многочлена $2x + 3y$. Поэтому для того, чтобы решать самые разнообразные задачи, нам надо научиться выполнять действия с многочленами и преобразовывать их.

Определение 2. Одночлены, из которых составлен многочлен, называются **членами** многочлена. При этом многочлен, состоящий из двух одночленов, называют **двучленом,** из трех – **трехчленом** и т.д.

Например, $2x + 3y$ – это двучлен, $5 - a^2 + 6a - ab^2$ – четырехчлен, $3n^2 - 8 + 4n^6$ – трехчлен. Сам одночлен также является многочленом, состоящим из одного члена.

Многочлены, как и одночлены, можно записать различными способами. При этом два многочлена считаются равными, если один из них может быть получен из другого с помощью равносильных преобразований. Так,

$$5 - a^2 + 6a - ab^2 = -ab^2 - a^2 + 6a + 5,$$

поскольку при перестановке слагаемых их сумма не изменяется. Однако вторая запись упорядочивает члены многочлена по степеням. Как мы уже убедились на примере одночленов, упорядочивание записи математических объектов значительно упрощает различные операции с ними.

Определение 3. **Стандартным видом** многочлена называется запись, при которой все его члены:

1) являются одночленами стандартного вида;

2) не являются подобными одночленами;

3) записаны в порядке убывания степеней одночленов (одночлены, имеющие одинаковую степень, записываются в произвольном порядке).

Определение 4. **Степенью многочлена** называется наибольшая из степеней входящих в него одночленов при записи многочлена в стандартном виде. При этом член многочлена, имеющий наибольшую степень, называют **старшим членом**, а имеющий нулевую степень – **свободным членом** многочлена.

Запишем в стандартном виде рассмотренные нами многочлены и определим их степени, а также их старшие и свободные члены.

Многочлен в стандартном виде	Степень многочлена	Старший член	Свободный член
$2x + 3y$	1	$2x$ и $3y$	0
$-ab^2 - a^2 + 6a + 5$	3	$-ab^2$	5
$4n^6 + 3n^2 - 8$	6	$4n^6$	-8

Пользуясь определением стандартного вида многочлена, мы можем записать следующий алгоритм.

Алгоритм записи многочлена в стандартном виде

1. Записать все члены многочлена в стандартном виде.
2. Привести подобные слагаемые.
3. Определить степень каждого одночлена и записать их алгебраическую сумму в порядке убывания степеней.

При решении разнообразных задач нам часто приходится вычислять значение многочлена при известных значениях входящих в него переменных. Рассмотрим пример, который поможет нам выявить некоторые общие закономерности, упрощающие вычисления.

Пример. Найти значение многочлена $4n^5 + 3n^2 - 8$, если: 1) $n = -2$; 2) $n = 1$; 3) $n = 0$.

Решение:

Поскольку многочлен уже записан в стандартном виде, подставим в него данные значения переменной n.

1) Если $n = -2$, то $4n^5 + 3n^2 - 8 = 4 \cdot (-2)^5 + 3 \cdot (-2)^2 - 8 = 4 \cdot (-32) + 3 \cdot 4 - 8 =$ $= -128 + 12 - 8 = -124$.

2) Если $n = 1$, то $4n^5 + 3n^3 - 8 = 4 \cdot 1^5 + 3 \cdot 1^3 - 8 = \underline{4 + 3 - 8 = -1}$.

3) Если $n = 0$, то $4n^5 + 3n^3 - 8 = 4 \cdot 0^5 + 3 \cdot 0^3 - 8 = \underline{0 + 0 - 8 = -8}$.

Анализируя полученные результаты, мы видим, что если переменная равна 1, то вычисление значения многочлена свелось к нахождению алгебраической суммы его коэффициентов, а при нулевом значении переменной оно равно свободному члену. Полученный вывод имеет общий характер.

Теорема 1. Если значения всех переменных, входящих в запись многочлена, равны 1, то значение многочлена равно алгебраической сумме всех его коэффициентов.

Доказательство:

Любая натуральная степень единицы равна 1, а при умножении на 1 число не изменяется. Значит, значения всех членов многочлена при единичных значениях переменных будут равны их коэффициентам. А поскольку многочлен является алгебраической суммой своих членов, то его значение будет равно алгебраической сумме всех его коэффициентов, что и требовалось доказать. ▼

Теорема 2. Если значения всех переменных, входящих в запись многочлена, равны 0, то значение многочлена равно его свободному члену.

Доказательство:

Любая натуральная степень нуля равна 0, а при умножении числа на 0 получается 0. Значит, при подстановке в многочлен вместо переменных нуля значения всех его членов (кроме свободного) будут равны 0. Следовательно, значение многочлена будет равно алгебраической сумме, состоящей из нулей и свободного члена, и поэтому равно свободному члену, что и требовалось доказать. ▼

К **121** Запишите данные выражения в виде суммы одночленов. Как одним словом можно было бы назвать все эти выражения?

а) $m^2n - mn^2$; б) $x^2 - 2x + 3$; в) $a^4 - 4a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 - 3b^4$.

122 Исходя из определения многочлена, приведенного на стр. 25, определите, можно ли указанное выражение записать как многочлен:

а) $4(a + b)$; в) $p^2 - q^2$; д) $-\frac{2}{3}$; ж) $\frac{2x - 5}{x^2 - 16} \cdot x^2$;

б) $7xy^2$; г) $-m(m + 1)$; е) 0; з) $a^2 + \frac{9 - 3}{6}$.

123 Дан многочлен:

$$2a^2a - a^3a^2 - 9 + 4aa.$$

Проанализируйте его запись и предложите свою версию стандартного (удобного для работы) способа записи многочлена. Что естественно было бы считать степенью многочлена? Какой из его членов можно было бы назвать «свободным членом»?

Сравните свои определения с теми, которые приведены на стр. 25–26.

124 Докажите, что данные многочлены записаны в стандартном виде. Назовите их степени, свободные члены и коэффициенты членов, имеющих буквенные множители.

а) $-2x + 3y$; в) $-x^2 - 4x + 9$; д) $y^3 + 2y^2 - y + 5$;

б) $\frac{1}{2}a^5 - 1$; г) $m^4 + m^3n - m^2n^2$; е) $-c^3d^3 - 3c^4 + cd^2 - 6d$.

Как одним термином можно назвать многочлены каждого столбика?

125 Запишите многочлен в стандартном виде и определите его степень:

а) $5a - 3ab - 4a$; д) $7x^2y + x^2 - 5x^2y + x^4 - 3x^2 + x^2y$;

б) $3xyx^2 + y^5 - 4x^2yx$; е) $4a^2b^3a - 3a^3b^4 - 5b^2a^3b + 2a^2b^3ab + 2a^3b^3$;

в) $-4p \cdot 2q^2 - q^4 + 6q^2p$; ж) $5m^3 - 2m^2 \cdot 3n^3 - 6m^3 + 7n^3m^2 + 2m^3 - 4m^3$;

г) $c^2d^3 - (2cd)^2 + 3cd^2c$; з) $7u^3v + (3u)^2 - 4v^3 - 8vu^3 - 10u^2 + 5v^3$.

126 Составьте свой многочлен, содержащий: а) переменную x; б) переменные a и b. Запишите составленный многочлен в стандартном виде и определите его степень.

127 Найдите ошибки в записи многочлена в стандартном виде или докажите, что запись сделана верно:

а) $a^3 + a^2 - a + b^3 - b^2 - b$;
в) $mn^3 - 4m^2n^2 + n^2m^2 - 2mn + 7$;
б) $3x^2y - yx^2 + 4xy + 3x$;
г) $2p^3q^2 + q^3p^2 - 5p^2q + q^2p + 2p - 3q - 1$.

128 Найдите одно значение переменной, при котором значение многочлена равно A:

а) $2x^2 - 3x - 5$, если $A = 0$;
в) $4n^3 - 8n^2 + 7n - 2$, если $A = -2$;
б) $-5y^3 - 3y^2 + 18$, если $A = 10$;
г) $-a^4 + 2a^3 - 3a^2 + 4a - 5$, если $A = -15$.

129 Приведите пример трехчлена с одной переменной x, значение которого:

а) при $x = 1$ равно (-4); б) при $x = -1$ равно 12; в) при $x = 0$ равно (-3).

Запишите ваш трехчлен в стандартном виде.

130 Известны формулы суммы квадратов n первых натуральных чисел, а также суммы их кубов:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n; \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Найдите сумму квадратов и сумму кубов n первых натуральных чисел для:

а) $n = 10$; б) $n = 20$; в) $n = 30$; г) $n = 50$.

131 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $4xy^2 - 9x^2y - (6yxy - x \cdot 3xy \cdot 4)$;
б) $-(7ababa - 3a \cdot 3ab \cdot a) + (-11a^3b + (3ab)^2 \cdot a)$;
в) $5p^6 - (2p^2)^2 + 7p^3 - p^2 \cdot (2p^2)^2 + 3p^4 - (2p)^2 \cdot 2p$;
г) $8(mn)^2 + 11m^2n^3 - 3mn \cdot 2nm \cdot 2n - mn \cdot nm \cdot mn - 2mn \cdot 4mn + 2(mn)^3$.

132 Докажите, что данные выражения можно преобразовать в двучлены. Запишите их в стандартном виде и определите их степень:

а) $2aba - \frac{1}{7}ab \cdot 7a + 2b \cdot (\frac{1}{2}ab)$;
б) $p^2 \cdot (-0{,}2p^3q) + 2pqq^4 + 2{,}2pp^3qp$;
в) $3x^2y^2 - 3x^2y \cdot (-2x^2y^2)x + 4x^3y^5 + (-3xy) \cdot xy + 2x^3y^5$;
г) $\frac{2}{3}a^2c^2 \cdot \frac{1}{7}ac^2 \cdot (-21ac) + 2^3 \cdot ac \cdot \frac{1}{4}a^4c^3 - 2c^3a^2 \cdot (-2a^2cc)$.

Каким общим свойством обладают все полученные двучлены?

133 Запишите выражение как многочлен стандартного вида. Какой из многочленов мог бы быть «лишним»?

а) $2x - (xy + z^2) - x - 4xy - 4z^2 + (5z^2 - (12xy - x - 1))$;
б) $x + (2xy - z^2) + 2x - 7xy + 5z^2 - (4z^2 + (5xy + 3x + 1))$;
в) $x + (xy - z^2) - 2x - 5xy + 4z^2 - (3z^2 - (11xy + x + 1))$;
г) $-3x - (2xy + 2z^2) + 6x + 14xy - 3z^2 + (5z^2 + (-5xy - 3x + 1))$.

134 Дан многочлен $a^4b - 2a^3b^2 + 4a^2b^3 - 3ab - 5$. Подставьте вместо a и b указанные выражения и запишите получившийся многочлен в стандартном виде:

1) $a = x$, $b = y$; 3) $a = x$, $b = -y$; 5) $a = 2c^2$, $b = -1$;

2) $a = -x$, $b = y$; 4) $a = -x$, $b = -y$; 6) $a = -m^3$, $b = n^5$.

135 Какими многочленами можно заменить A, B, C и D, чтобы указанные выражения стали многочленами степени n?

а) $15c^2 - 17c - 14c - 13c^3 + 23c^2 + 7c^3 + A$, если $n = 2$;

б) $4ab^2 - 8b^2a - 5b^2a^2 + 4ab + 2a^2b^2 - B$, если $n = 3$;

в) $25x^3y^5 - 5x^2y^3 + 4y^2x^4 - 2y^5x^3 - 4xy^2 - C$, если $n = 5$;

г) $30mk^3 - 18m^5k - 5k^4m^5 - 7mk + 9m^3k^3 + D$, если $n = 6$.

136 Прочитайте высказывание и определите, истинно оно или ложно. Для ложных высказываний постройте отрицания и докажите истинность отрицаний:

а) $\forall\ z \in Z$: $z^2 > z$; в) $\forall\ n \in N$: $2n + 1 \not\vdots\ 2$;

б) $\exists\ x \in Z$: $x^2 + 1 \leqslant 0$; г) $\exists\ a, b \in Z$: $a + b = 11$ и $ab = 11$.

137 Сравните значения числовых выражений:

а) $\frac{25}{51}$ и $\frac{61}{120}$; в) $\frac{15}{16}$ и $\frac{14}{15}$; д) $\frac{5}{36}$ и $\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{36}$; ж) $5{,}6$ и $5{,}6 \cdot 0{,}999$;

б) $\frac{69}{68}$ и $\frac{698}{699}$; г) $\frac{356}{355}$ и $\frac{357}{356}$; е) $7\frac{9}{17}$ и $7\frac{9}{17} \cdot \frac{8}{9}$; з) $0{,}75 \cdot 1{,}01$ и $0{,}75$.

138 Решите уравнение:

а) $\frac{2(x-3)}{3} + \frac{5(x-3)}{27} = 46$; в) $2\frac{2}{5} \cdot (2x + 9) + \frac{3}{25} \cdot (5x - 10) = \frac{3}{5} \cdot (6x - 5)$;

б) $\frac{5(7x-2)}{2} - \frac{9(2x+8)}{4} = 5x + 1$; г) $\frac{3}{7} \cdot (3x - 1) - \frac{4}{21} \cdot (6x + 5) = \frac{5}{21} \cdot (4x + 1)$.

139 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Грибы при сушке теряют $\frac{11}{15}$ своего веса. Сколько надо собрать свежих грибов, чтобы получить 4 кг сушеных?

б) На конференции по экологическим проблемам развития общества основные доклады заняли $\frac{1}{7}$ часть от общего времени конференции. На обсуждение докладов потратили $\frac{10}{21}$ общего времени, на обсуждение новых направлений развития экологии – $\frac{1}{3}$ общего времени. Оставшееся время было отведено на кофе-паузы. Сколько времени проходила конференция, если общая продолжительность кофе-пауз составила 2 часа?

140 На кофейную фабрику поставщики доставили груз зеленого кофе и сложили его во дворе фабрики. Так как на следующий день обещали дождь, то мешки с зеленым кофе нужно было перенести в складское помещение. Все грузчики были заняты, но трое из них – Алексей, Михаил и Владимир – согласились в свободное от остальных дел время выполнить эту работу. Первым пришел грузчик Алексей, он перенес $\frac{1}{3}$ от общего количества поступившего кофе и ушел заниматься другими делами. Вторым пришел грузчик Михаил. Думая, что он пришел первым, он перенес $\frac{1}{3}$ от оставшегося количества мешков и тоже ушел. Последним пришел Владимир, он перенес 8 мешков – третью часть оставшихся мешков и также ушел. Сколько мешков с зеленым кофе поступило от поставщиков в данной партии?

141 Докажите, что:

а) $8^5 + 2^{11}$ делится на 17; б) $9^7 - 3^{10}$ делится на 20;

в) $25^6 - 5^{11}$ делится на 4; г) $16^8 + 2^{27}$ делится на 33.

142 Найдите ошибку в следующем рекламном объявлении:

«Наша машина может теперь ездить, не заправляясь бензином. Научно-исследовательский отдел нашего завода получил три патента на изобретения. Первое изобретение дает 40% экономии топлива, второе – еще 35%, а третье – дополнительно к первым двум еще 25% экономии. И это подтверждено самыми серьезными экспертами. Итоговую экономию может посчитать любой школьник:

$$40\% + 35\% + 25\% = 100\%.$$

Покупайте наши машины – и вы забудете, что такое заправки. Вам больше не нужно будет тратить деньги на бензин».

Д **143** Запишите выражение как многочлен стандартного вида и определите его степень:

а) $2(x - 3y) - 3(z - 2y) + 2(4z - 3x)$;

б) $(6m^2nmn - 2m^2 \cdot 2mn \cdot m) - (-5m^4n + (2mn)^2 \cdot m)$.

144 Запишите выражение как двучлен стандартного вида и определите его степень. Каким общим свойством обладают полученные двучлены?

1) $4c - (2a^2c - 5c^2a) - c - 3a^2c + 7c^2a - (11c^2a - (6a^2c - 3c))$;

2) $-x + (4x^3y - 2y^3x) - 5x - 6x^3y + 4y^3x - (y^3x + (-3x^3y - 6x)))$.

145 Сумма n первых натуральных чисел вычисляется по формуле:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Найдите сумму n первых натуральных чисел для: а) $n = 100$; б) $n = 200$; в) $n = 500$.

146 Найдите одно значение переменной, при котором значение многочлена равно A:

а) $-p^4 + p^3 - 8p^2 + 12$, если $A = 2$; б) $3m^7 - 7m^6 - 9m^4 + 5m^3 + 5$, если $A = 5$.

147 Какими многочленами можно заменить соответственно A и B, чтобы указанные выражения стали многочленами степени n?

а) $6a^3 - 8a - 9a - 21a^4 + 14a^3 - 8a^4 + A$, если $n = 3$;

б) $15xy^2 - 7x^4y - 9x^4y^5 - 11xy + 6x^2y^3 - B$, если $n = 5$.

148 Сравните значения числовых выражений:

а) $\frac{17}{33}$ и $\frac{18}{37}$; в) $\frac{25}{24}$ и $\frac{26}{25}$; д) $\frac{7}{18}$ и $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{18}$; ж) $9{,}2 \cdot 1{,}001$ и $9{,}2$;

б) $\frac{72}{71}$ и $\frac{713}{714}$; г) $\frac{319}{320}$ и $\frac{320}{321}$; е) $4\frac{5}{12} \cdot \frac{2}{3}$ и $4\frac{5}{12}$; з) $3{,}6$ и $3{,}6 \cdot 0{,}989$.

149 Решите уравнение:

а) $\frac{5(x + 2)}{4} - \frac{6(x + 2)}{12} = 3$; б) $2\frac{1}{3} \cdot (2x - 1) - \frac{7}{9} \cdot (4x + 3) = \frac{7}{18} \cdot (3x - 7)$.

150 Постройте математическую модель и решите задачу:

Рабочий день Антона и Ксюши, владельцев пончиковой компании, расписан следующим образом: решение производственных проблем на пончиковой фабрике занимает $\frac{2}{9}$ всего рабочего дня, $\frac{1}{6}$ рабочего дня отведена под переговоры с контрагентами компании, $\frac{12}{27}$ рабочего дня Антон и Ксюша решают текущие вопросы с сотрудниками офиса компании, а оставшееся время отведено на встречи с партнерами компании. Сколько времени длится рабочий день Антона и Ксюши, если встречи с партнерами компании длятся 1,5 часа?

151 Докажите, что:

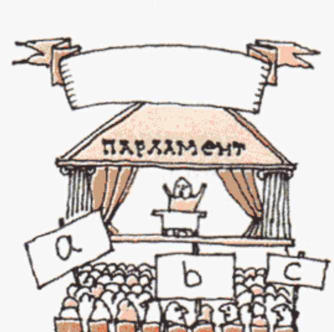
а) $16^7 - 2^{25}$ делится на 7; б) $81^6 - 3^{21}$ делится на 13.

152 Выполните вычисления рациональным способом и расшифруйте фамилию автора высказывания «Для парусника, который не знает, куда плыть, ни один ветер не будет попутным». В каком веке и в какой стране он жил?

Н $6345 \cdot 5 - 2269 \cdot 25$ **С** $484 \cdot 11 - 1111 \cdot 4$ **Е** $1002 \cdot 998 - 1003 \cdot 997$

А $1973 \cdot 125 - 4865 \cdot 25$ **К** $203 \cdot 197 - 201 \cdot 199$

880	5	–25 000	5	–8	125 000



С **153*** В банановой республике прошли выборы в парламент. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46% голосовавших любят мандарины?

154* У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого барона-вассала ровно 9 баронов соседей, подданных короля?

3. Сложение и вычитание многочленов

Сущность математики не в формулах, а в тех процессах мышления, при помощи каких получаются формулы.

Ермаков Василий Петрович (1845–1922), российский математик

Многочлены часто являются математическими моделями практических задач, поэтому нам надо уметь выполнять арифметические действия с многочленами и приводить такие выражения к максимально простому виду.

В данном пункте мы выясним, как складывать и вычитать многочлены.

Фактически, мы это делать уже умеем. Например, составим сумму многочленов $a^2 - 4ab + b^2$ и $-a^2 + 3ab$ и в полученной алгебраической сумме раскроем скобки:

$$(a^2 - 4ab + b^2) + (-a^2 + 3ab) = a^2 - 4ab + b^2 - a^2 + 3ab.$$

Мы видим, что данная алгебраическая сумма также является многочленом.

Аналогичным образом можно найти сумму любого количества многочленов. Таким образом, мы можем дать следующее определение *суммы многочленов*.

Определение 1. **Суммой многочленов** называется многочлен, членами которого являются все члены многочленов слагаемых, взятых с их знаками.

Мы умеем также упрощать алгебраические суммы, пользуясь законами арифметических действий. Так, в нашем примере, используя сначала переместительный закон сложения, а затем распределительный закон, получаем:

$$\cancel{a^2} - \underline{4ab} + b^2 - \cancel{a^2} + \underline{3ab} = -ab + b^2.$$

Но количество многочленов-слагаемых и их членов может быть достаточно большим, и тогда поиск и приведение подобных членов может оказаться весьма затруднительным. Чтобы упростить вычисления, мы можем использовать идею «записи в столбик», аналогичную той, которую мы использовали при сложении и вычитании многозначных чисел. При сложении многозначных чисел такая запись помогает добиться близкого расположения цифр, стоящих в одинаковых разрядах, а при сложении многочленов – близкого расположения подобных членов.

Пример 1. Найдите сумму многочленов:

$$-x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 7, \qquad 4x^3 - 3x - 8 \qquad \text{и} \qquad x^4 - 2x^2 + 5x + 3$$

Решение:

Запишем многочлены «в столбик» так, чтобы подобные члены стояли один под другим. Затем сложим подобные члены и запишем результаты под чертой:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & -\cancel{x^4} & -\,5x^3 & +\,\cancel{2x^2} & -\,x & +\,7 \\
+ & & 4x^3 & & -\,3x & -\,8 \\
 & \cancel{x^4} & & -\,\cancel{2x^2} & +\,5x & +\,3 \\
\hline
 & & -x^3 & & +\,x & +\,2
\end{array}$$

Таким образом, результатом сложения исходных многочленов является многочлен $-x^3 + x + 2$.

Мы видим, что для сложения многочленов таким способом является важным их представление в стандартном виде. В итоге мы приходим к следующему алгоритму сложения многочленов «в столбик».

Алгоритм сложения многочленов «в столбик»

1. Записать многочлены в стандартном виде.
2. Записать многочлены «в столбик» так, чтобы подобные члены стояли под подобными (если они есть).
3. Сложить по «столбцам» подобные слагаемые и записать полученные результаты.
4. Записать итоговый многочлен.

Обсудим теперь операцию вычитания многочленов. Мы знаем, что вычитание рационального числа можно заменить прибавлением противоположного числа. Аналогично мы можем поступить и при работе с многочленами.

Определение 2. Многочлен называется **противоположным** исходному, если его сумма с исходным многочленом равна нулю.

Другими словами, противоположный многочлен – это исходный многочлен, умноженный на -1. Значит, все знаки исходного многочлена меняются в нем на противоположные. Например, противоположным к многочлену $-a^2 + 3ab$ будет многочлен

$$-(-a^2 + 3ab) = a^2 - 3ab.$$

Теперь вычитание многочлена $(-a^2 + 3ab)$ из многочлена $(a^2 - 4ab + b^2)$ мы можем свести к действию сложения, поменяв в многочлене-вычитаемом все знаки на противоположные:

$$(a^2 - 4ab + b^2) - (-a^2 + 3ab) = (a^2 - 4ab + b^2) + [\underbrace{-(-a^2 + 3ab)}_{a^2 - 3ab}].$$

Как и при сложении многочленов, мы вновь получим многочлен:

$$(a^2 - 4ab + b^2) + (a^2 - 3ab) = \underline{a^2} - \underline{4ab} + b^2 + \underline{a^2} - \underline{3ab} = 2a^2 - 7ab + b^2 .$$

Определение 3. **Разностью многочленов** называется многочлен, равный сумме уменьшаемого и многочлена, противоположного вычитаемому.

Вычитание многочленов «в столбик» также сводится к сложению, предварительно лишь надо заменить многочлен-вычитаемое противоположным ему.

Пример 2. Найдите, используя запись в столбик, разность многочленов:

$$2y^4 + y^3 - 4y^2 - 5y + 3 \text{ и } -y^4 + y^3 - 5y^2 + 3.$$

Решение:

Заменим многочлен-вычитаемое противоположным ему: $y^4 - y^3 + 5y^2 - 3$. Затем прибавим полученный многочлен к многочлену-уменьшаемому.

$$\begin{array}{r} 2y^4 + \cancel{y^3} - 4y^2 - 5y + \cancel{3} \\ + \quad y^4 - \cancel{y^3} + 5y^2 \qquad\quad - \cancel{3} \\ \hline 3y^4 \qquad\quad + y^2 \quad - 5y \end{array}$$

Следовательно, результатом вычитания данных многочленов является многочлен $3y^4 + y^2 - 5y$.

Итак, алгоритм вычитания многочленов «в столбик» отличается от соответствующего алгоритма сложения многочленов лишь тем, что в нем появляется один дополнительный шаг – замена многочлена-вычитаемого противоположным ему.

Алгоритм вычитания многочленов «в столбик»

1. Записать многочлены в стандартном виде.
2. Заменить многочлен-вычитаемое противоположным ему.
3. Записать многочлены «в столбик» так, чтобы подобные члены стояли под подобными (если они есть).
4. Сложить по «столбцам» подобные слагаемые и записать полученные результаты.
5. Записать итоговый многочлен.

К **155** 1) Даны многочлены $A = a^2 + a - 3$ и $B = -a^2 + 6$. Составьте сумму $A + B$ данных многочленов и запишите ее как многочлен стандартного вида.

2) Всегда ли сумма многочленов будет многочленом? Почему?

3) Предложите свой вариант определения суммы многочленов и сравните его с определением 1 на стр. 32.

156 1) Даны многочлены $P = 2x^2 - 4x + 1$ и $Q = x^2 - 6x$. Составьте сумму $P + (-Q)$ и разность $P - Q$ данных многочленов. Как можно назвать многочлен $(-Q)$?

2) Запишите выражения $P + (-Q)$ и $P - Q$ как многочлены стандартного вида и сравните полученные результаты. Сделайте вывод. Можно ли распространить этот вывод на произвольные многочлены? Почему?

3) Основываясь на выполненных преобразованиях, предложите свой вариант определения разности многочленов и сравните его с определением 3 на стр. 33.

157 Найдите сумму и разность многочленов A и B. Запишите результат как многочлен стандартного вида. Объясните, на основании каких правил равносильных преобразований вы действовали?

а) $A = 5a + 3,\quad B = -3a - 4;$

б) $A = 7x^2 + 3x,\quad B = -2x - 1;$

в) $A = 8b^2 + 2b - 4,\quad B = 5 - 3b - 9b^2;$

г) $A = 11y - 12 - y^3,\quad B = 14 - 12y + y^3;$

д) $A = 6 + mn + 2m^2 + 4n^2,\quad B = 4 - mn - m^2 - 4n^2;$

е) $A = 3z^3 - 4z^2 + 5z - 6,\quad B = 3 - 4z + 5z^2 - 6z^3.$

158 1) Даны многочлены $A = x^5 - 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 7x + 2$ и $B = -x^5 + 3x^4 - x^3 + 5x^2 + 7x - 2$. Используя идею сложения многозначных чисел «в столбик», предложите аналогичный способ сложения многочленов и найдите этим способом сумму $A + B$.

2) Сравните предложенный вами способ с тем, который рассмотрен при решении примера 1 на стр. 32. В каких случаях этот способ целесообразно применять?

3) Постройте алгоритм сложения многочленов «в столбик» и сравните его с вариантом алгоритма, приведенным на стр. 33.

159 Найдите сумму многочленов $A + B$, располагая слагаемые «в столбик», если:

а) $A = 2x^2 + 3x - 4$, $B = 3x^2 - 3x - 1$;

б) $A = 5 - 7ab + 3b^2 + 2a^2$, $B = 7ab - 2 + a^2$;

в) $A = 6p^2 + 6pq - (7 + 4q^2)$, $B = 8 + 3q^2 - (5p^2 + 6pq)$;

г) $A = 3m^2 + 7m^2n - 9n^2m - (5m^2n - 2m^2)$, $B = 6n^2m - (5m^2 - n^2m)$.

160 1) Дайте определение многочлена, противоположного данному. Сравните свой ответ с определением 2 на стр. 33.

2) Какие из приведенных многочленов являются противоположными?

$$2a - 5b + 3, \quad 5b + 3 - 2a, \quad -3 - 2a - 5b, \quad -2a - 3 + 5b.$$

3) Как найти многочлен, противоположный данному? Запишите произвольный трехчлен. Как записать противоположный ему многочлен?

161 1) Как свести вычитание многочленов к сложению? Какой шаг следует добавить в алгоритм сложения многочленов «в столбик», чтобы получить соответствующий алгоритм вычитания? Сравните свои ответы с приемами, использованными при решении примера 2 на стр. 33, и алгоритмом, приведенным на стр. 34.

2) Найдите разность многочленов $P - Q$, располагая слагаемые «в столбик», если:

а) $P = 5x^3 + 2xy^2 + 3x$, $Q = 2x^3 + 3xy^2 + 5x$;

б) $P = 9p^2 - 7pq - 6q^2 - 4p^2$, $Q = 7p^2 - 5pq - 4q^2 - 2p^2$;

в) $P = -(2n^2 + 4) + 6m^2 - 3mn$, $Q = 5m^2 - 3mn - 3 - n^2$;

г) $P = 2a^4 + 5a^2b - 3a^2b^2 - (ab^2 + b^4)$, $Q = 4a^2b - (2a^2b^2 - 2a^4) - b^2(a + b^2)$.

162 Выполните действия, записывая «в столбик» многочлены-слагаемые (записанные в скобках) данной алгебраической суммы:

а) $(x + 2y + z) - (x - 2y - z) - (2y + z - x) + (x - 2y + z) - (x + 2y - z)$;

б) $(2a + 3b - 4c + 5) - (2a - 3b + 4c + 5) + (2a - 3b + 4c - 5) - (3b - 4c - 2a - 5)$.

163 Даны многочлены:

$M = 2x^4 + x^3y - 3x^2y^2 + 4xy^3 - y^4$,

$N = -3x^4 + 2x^3y + 5x^2y^2 + y^4$,

$K = x^4 - x^3y - 2x^2y^2 + 4xy^3 - 2y^4$.

Вычислите:

а) $M + N + K$; в) $M - N - K$;

б) $M - N + K$; г) $-M + N + K$.

164 Представьте данный трехчлен в виде суммы и разности двух двучленов:

а) $6x^2 - 4x + 2$; б) $-3y^2 - 5y + 2$ в) $-7a^2 + 10a + 3$; г) $-9c^2 + 2c - 1$.

165 Даны многочлены: P, Q и R. Запишите в стандартном виде многочлен $3P - 2Q + 4R$, если:

а) $P = 8a - (3 + 5a)$, $Q = 4a + 2 + (-a - 1)$, $R = 0{,}6a - (1{,}1a - 2)$;

б) $P = 15x - 2y - (14x + 3y)$, $Q = 4x - 3y + (-x + 2y)$, $R = x + 4y - 5 - (x - 3y + 2)$;

в) $P = p^2 - (2pq - q^2)$, $Q = p^2 - (-2pq - q^2)$, $R = -(p^2 - 2pq + q^2)$.

166 Не меняя знаков, расставьте скобки так, чтобы равенство стало тождеством:

а) $5a^3 - 3a^2 + 4 - 5a^3 - 3a^2 - 2 = 6$; в) $5a^3 - 3a^2 + 4 - 5a^3 - 3a^2 - 2 = 2$;

б) $5a^3 - 3a^2 + 4 - 5a^3 - 3a^2 - 2 = -2$; г) $5a^3 - 3a^2 + 4 - 5a^3 - 3a^2 - 2 = -6$.

167 Какие многочлены можно подставить вместо A и B, чтобы получилось тождество?

а) $A - (3ab + 4) = 2a^2 + 5ab + 7$; б) $(4x^2 + 6y^2) - B = -x^2 + 3xy - 2y^2$.

168 Какие многочлены можно подставить вместо A, B, C и D, чтобы равенства стали тождествами?

а) $3m^4 - 8m^2 + 5m^3 - 4m - A = -2m^3 - 5m^2 - 3m^4 + 8m$;

б) $-15b^6 + 12b^4 - 7b^2 + 8b + B = 10b^2 - 14b^6 + 8b^4 - 6b$;

в) $1{,}2a^3 + 0{,}01a^2 - 1{,}24a - 0{,}35 + C = -2{,}34a + 1{,}03a^3 - 0{,}35 + 1{,}01a^2$;

г) $8x^4 - 12x^3y + 8x^2y^2 + 57xy^2 - 9y^4 - D = -y^4 - 23x^3y + 12x^2y^2 + 42xy^2 + 2x^4$.

П **169** Сформулируйте утверждение, равносильное данному, и запишите оба утверждения на математическом языке:

а) Число a меньше или равно числу 9.

б) Число 48 делится на c.

в) Число a на 12 больше числа b.

г) Число x в 3 раза меньше числа y.

д) Модуль числа x равен 7.

е) Числа m и n относятся как $2 : 3$.

ж) Число c составляет $\frac{5}{6}$ от числа d.

з) Число k составляет 35 % от числа t.

170 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{a}{(a - b)(a + b)} : \dfrac{7(a + b)}{(a - b)} \cdot \dfrac{7}{a}$;

б) $\dfrac{(c + d)}{(c - d)^2} \cdot \dfrac{3(2c + d)}{(c + d)} : \dfrac{3(2c + d)}{(c + d)(c - d)}$;

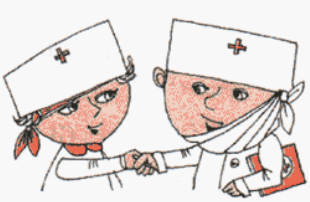
в) $\dfrac{(4mn + 4n)}{(3m - 2n)} : \dfrac{5n(8m + 8)}{(6m - 4n)(m - n)} \cdot \dfrac{5(7m - 7n)}{14n}$;

г) $\dfrac{(p - 2q)}{(2p + q)} \cdot \dfrac{14p(10p + 5q)}{(14q - 7p)(2p^2 - pq)} : \dfrac{7(6q - 12p)}{3}$.

171 а) На складе лежит 112 ящиков с яблоками. Их средний вес нетто равен 12,5 кг. После того как на склад поступило еще 10 ящиков с яблоками, средний вес нетто ящика с яблоками стал равен 13 кг. Сколько кг яблок поступило на склад?

б) Дистанция марафона 7,6 км идет на подъем; 22,3 км идет по ровной дороге, а остальные 12,295 км идет на спуск. Участник соревнований по марафону пробежал эту дистанцию за 2,5 часа. С какой средней скоростью он бежал? Ответ округлите с точностью до десятых.

в) Расстояние от Москвы до Ярославля равно 266 км, от Ярославля до Перми – 1177 км, от Перми до Омска равно 1268 км, от Омска до Красноярска – 1456 км, а от Красноярска до Владивостока – 4983 км. Поезд проехал по этому маршруту от Владивостока до Москвы за 7 суток и 15 часов. С какой средней скоростью ехал поезд?



г) Средний возраст врачей и больных в больнице равен 40 лет. При этом средний возраст врачей равен 35 лет, а средний возраст больных – 50 лет. Кого больше, врачей или больных, и во сколько раз?

172 Выполните действия:

а) 3 км 256 м 9 см + 5 км 4215 м 97 см;
б) 21 м 583 дм 19 см − 18 м 14 дм 49 см;
в) 11 т 79 кг − 9 ц 5 кг + 8 т 11 ц 8953 кг;
г) 15 кг 7158 г − 1356 г + 7 ц 368 г;
д) 6 га 19 а 78 м^2 − 439 а 256 м^2;
е) 7 дм^2 127 см^2 + 4 а 329 дм^2 91 см^2.

173 Существует ли такое целое число, которое:

а) при делении на 12 дает остаток 11, а при делении на 18 остаток 1;

б) при делении на 9 дает остаток 7, а при делении на 27 остаток 13?

174 Запишите $A + B$, $A - B$ и $B - A$ как многочлены в стандартном виде, если:

а) $A = 4 - 2xy + 5x^2 - 3y^2$,
$B = 4x^2 - 3xy + 2y^2 - 2$;

б) $A = 3a^2 - 5ab - (b^2 - 2)$,
$B = 5a^2 + 7ab + 1 - 3b^2$.

175 Даны многочлены:

$P = 3p^3 - p^2q + 4pq^2 - 5q^3 + 1$,
$Q = -2p^3 + 6p^2q - 3pq^2 + 2q^3 + 3$,
$R = -p^3 + 2p^2q + pq^2 - 4q^3 - 5$.

Вычислите:
а) $P + Q + R$;
б) $P - Q - R$.

176 Даны многочлены: K, M и N. Запишите в стандартном виде многочлен $K - M + 2N$, если:

$K = 6a - 3c - (2a + 3c)$, $M = 3a - 4c + (2a - c)$, $N = 3a + 4c - 3 - (2a + 3c - 3)$.

177 Какими многочленами можно заменить A и B, чтобы равенства стали тождествами?

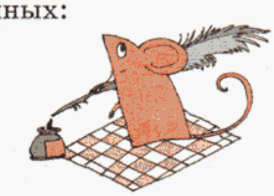
а) $5c^5 - 9c^4 + 3c^3 - 5c^2 + 4c + 12 - A = -3c^5 - 7c^4 + 9c^3 + 4c^2 + 7c$;

б) $3m^3 - 7m^3n - 5m^2n^2 - 4mn^2 - 6n^4 + B = -9n^4 + 11m^3n - 6m^2n^2 - 14mn^2 + 3m^3$.

178 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{2x}{(5x - 2y)(3y + 4x)} : \dfrac{4(4x + 3y)}{(5x - 2y)} \cdot \dfrac{2(4x + 3y)^2}{5}$;

б) $\dfrac{(2a - 3c)}{(3a + 2c)} \cdot \dfrac{2c(14c + 21a)}{(6c - 4a)(6c^2 - 5ac)} : \dfrac{2(6c - 5a)}{7}$.



179 а) Антон и Ксюша, владельцы пончиковой компании, решили посетить все свои филиалы. Расстояние от первого филиала до второго равно 585 км, от второго до третьего – 916 км, от третьего до четвертого – 1154 км, от четвертого до пятого – 517 км, а от пятого до шестого – 2516 км. Антон с Ксюшей решили посетить все филиалы по очереди с первого по пятый. Они рассчитали, что на дорогу им потребуется 72 часа. С какой средней скоростью они предполагали передвигаться?

б) Средний возраст сотрудников пончиковой компании Антона и Ксюши равен 30 годам. При этом средний возраст офисных работников – 26 лет, а средний возраст сотрудников на производстве – 35 лет. Чему равно отношение числа офисных работников пончиковой компании к числу работников на производстве?

180 Выполните действия:

а) 15 км 373 м 12 дм 26 см − 12 368 м 17 дм 476 см;

б) 16 га 128 а 15 $м^2$ 14 $дм^2$ 27 $см^2$ + 271 а 8480 $дм^2$ 573 $см^2$;

в) 14 т 5 ц 798 кг + 99 ц 765 кг − 23 т 25 ц 438 кг.

181 Существует ли такое целое число, которое:

а) при делении на 15 дает остаток 12, а при делении на 30 остаток 2;

б) при делении на 21 дает остаток 18, а при делении на 42 остаток 32?

С **182*** Четыре мотоциклиста одновременно стартовали в одном направлении в гонке по кольцевой дороге. В некоторый момент времени все мотоциклисты поравнялись друг с другом. Известно, что до этого момента первый обогнал второго 1 раз, второй обогнал третьего 3 раза, а третий обогнал четвертого 2 раза. Сколько раз до этого момента первый обогнал четвертого?

183* В ряд стоят 100 фишек. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить все фишки в обратном порядке?

4. Умножение одночлена на многочлен

Для математика вычислять –
это значит рассуждать.

Анри Леон Лебег (1875–1941),
французский математик

Научившись складывать и вычитать многочлены, мы можем теперь перейти к изучению умножения многочленов. Сначала научимся умножать одночлен на многочлен (или многочлен на одночлен, что ввиду переместительного закона умножения то же самое).

Умножим, например, одночлен $4c$ на многочлен $a + 2b$. Запишем их произведение и, воспользовавшись распределительным законом умножения, раскроем скобки:

$$4c \cdot (a + 2b) = 4c \cdot a + 4c \cdot 2b = 4ac + 8bc$$

Мы видим, что произведение одночлена и многочлена всегда является многочленом, так как при умножении одночлена на одночлен мы получим одночлен, а алгебраическая сумма одночленов по определению многочлен.

Определение. **Произведением одночлена и многочлена** называется многочлен, равный сумме произведений этого одночлена и каждого члена многочлена.

Из данного определения непосредственно следует **правило:**

Чтобы умножить одночлен на многочлен, можно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Иногда запись умножения одночлена на многочлен удобно вести «в столбик»:

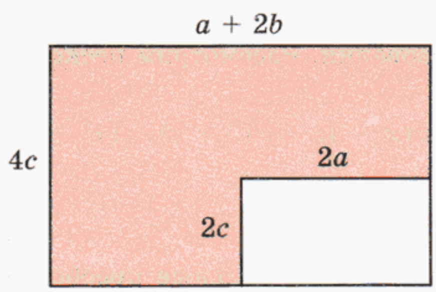
$$\begin{array}{r} -4x^2 \\ \times \quad 2x^3 + x - 3 \\ \hline -8x^5 - 4x^3 + 12x^2 \end{array}$$

Следовательно,

$$-4x^2(2x^3 + x - 3) = -8x^5 - 4x^3 + 12x^2.$$

Поскольку одночлены и многочлены часто встречаются в математических моделях практических задач, то установленные приемы действий с ними помогают в упрощении полученных моделей, при нахождении значений выражений, решении уравнений и неравенств.

Задача. На плане садового товарищества заштрихован дачный участок семьи Васильевых. Найдите площадь этого дачного участка, если известно, что изображение выполнено в масштабе 1 : 200 и 0 см $< a <$ 10 см, $b =$ 5 см, $c =$ 3 см.



Решение:

Из условия задачи следует, что для существования данной фигуры необходимо, чтобы a, b, c были положительными числами и выполнялось неравенство $2a \leq a + 2b$.

Если эти условия выполняются, то площадь заштрихованной фигуры равна:

$$S = 4c \cdot (a + 2b) - 2c \cdot 2a.$$

Таким образом, математическая модель к данной задаче может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} S = 4c \cdot (a + 2b) - 2c \cdot 2a \\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0 \\ 2a \leqslant a + 2b \end{cases} \longrightarrow S = ?$$

Пользуясь правилом умножения одночлена на многочлен, упростим выражение для нахождения площади фигуры:

$$S = 4c \cdot (a + 2b) - 2c \cdot 2a = 4ac + 8bc - 4ac = 8bc.$$

Теперь вычислим значение площади при $0 < a < 10$, $b = 5$, $c = 3$ (см). Но прежде убедимся, что при данных значениях переменных указанная фигура существует.

Мы видим, что заданные значения a, b и c удовлетворяют условию $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Чтобы проверить выполнение неравенства $2a \leqslant a + 2b$, упростим его, вычитая из правой и левой его части одно и то же число a:

$$2a \leqslant a + 2b \Leftrightarrow a \leqslant 2b.$$

И поскольку нам дано, что $a < 10$, а $2b = 10$, то требование $a \leqslant 2b$ также выполнено. Значит, при указанных значениях переменных фигура существует.

Вычислим ее площадь на плане:

$$S = 8 \cdot 5 \cdot 3 = 120 \ (\text{см}^2).$$

Так как изображение выполнено в масштабе 1 : 200, то реальная площадь дачного участка равна

$$S = 120 \cdot 200 \cdot 200 \ \text{см}^2 = 480 \ \text{м}^2 = 4 \ \text{а} \ 80 \ \text{м}^2.$$

Ответ: 4 а 80 м^2.

Заметим, что проведенные преобразования выражения для площади позволили не только упростить вычисления, но и в принципе решить эту задачу, поскольку значение переменной a в условии не дано. А значит, мы не смогли бы вычислить значение выражения $4c \cdot (a + 2b) - 2c \cdot 2a$ прямой подстановкой в него значений переменных.

При построении математических моделей практических задач, конечно же, могут получаться и более сложные выражения, уравнения и неравенства, где применение установленных нами правил упрощает преобразования. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдите значение выражения $2x(x - 3) - x^2(5 - x) - (x^3 - 3x^2 + 6x)$ при $x = -2\frac{1}{3}$.

Решение:

Вначале упростим данное выражение, проведя равносильные преобразования. Для этого раскроем скобки, используя правило умножения одночлена на многочлен, а затем в полученной алгебраической сумме приведем подобные слагаемые:

$$2x(x - 3) - x^2(5 - x) - (x^3 - 3x^2 + 6x) = \underline{2x^2} - \underline{6x} - \underline{5x^2} + \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + \underline{3x^2} - \underline{6x} =$$

$$= \underbrace{(2 - 5 + 3)}_{0}x^2 + \underbrace{(-6 - 6)}_{-12}x = -12x.$$

Мы видим, что исходное выражение сильно упростилось. Теперь подставим в него указанное значение переменной x:

если $x = -2\frac{1}{3}$, то $-12x = -12 \cdot (-2\frac{1}{3}) = 12 \cdot \frac{7}{3} = \frac{\overset{4}{\cancel{12}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 28.$

Пример 2. Решите уравнение:

$$\frac{x(5x - 4)}{15} - \frac{2x^2 + 5}{6} = -\frac{x + 4}{2}.$$

Решение:

Умножим обе части данного уравнения на число 30 – наименьший общий знаменатель всех входящих в уравнение дробей:

$$\left(\frac{x(5x - 4)}{15} - \frac{2x^2 + 5}{6}\right) \cdot 30 = \left(-\frac{x + 4}{2}\right) \cdot 30$$

$$\frac{x(5x - 4) \cdot \overset{2}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{15}}} - \frac{(2x^2 + 5) \cdot \overset{5}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{6}}} = -\frac{(x + 4) \cdot \overset{15}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$2x(5x - 4) - 5(2x^2 + 5) = -15(x + 4)$$

Теперь раскроем скобки, выполняя умножение одночлена на многочлен, затем приведем подобные слагаемые и найдем корень уравнения:

$\cancel{10x^2} - \underline{8x} - \cancel{10x^2} - \underline{25} = -\underline{15x} - \underline{60}$

$-8x + 15x = 25 - 60$

$7x = -35$

$x = -5$

Ответ: $\{-5\}$.

184 Найдите произведение одночленов и запишите его как одночлен стандартного вида:

а) $(-2x)^2$; $3x^3$; $\frac{1}{12}x^5$; б) $(-0{,}5p^8)^2$; $(-3p^2)^3$; $\left(\frac{2}{3}p\right)^2$; в) $(-3ab^4)$; $(-5ba^2)^2$; $\frac{1}{75}a^3b^2$.

185 1) Запишите произведение одночлена $(-2ab)$ и многочлена $(a^2 - 4)$. Выполните умножение и запишите полученный многочлен-произведение в стандартном виде. Какими законами арифметических действий вы пользовались, проводя преобразования?

2) Всегда ли при умножении одночлена на многочлен будет получаться многочлен? Почему?

3) Основываясь на выполненных преобразованиях, предложите свой вариант определения произведения одночлена и многочлена и соответствующего правила. Сравните построенное вами определение и правило с определением и правилом на стр. 38.

186 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(6m^2 - 3m + 2n)\left(-\frac{1}{3}m^2\right)$;

б) $-0{,}5x^2(2x^2 + 6x - 4)$;

в) $2a(a - b) - a(a - 2b)$;

г) $-x(x^2 - 5) + x^2(x - 1)$;

д) $m \cdot (m + n) - 2m \cdot (m - n)$;

е) $3x \cdot (3c - d) - 2c \cdot (5x - d)$;

ж) $3p \cdot (p + 4q) - 4q \cdot (3p - q)$;

з) $-2a \cdot (5b - a) + 5b \cdot (b + 2a)$.

187 Упростите выражение:

а) $(2x - 6y + 6) \cdot (-x) + 2y \cdot (-3x + 4y - 8) - 8y(y - 2)$;

б) $3a \cdot (2a^3 + 5a^2 - a) - 7a^2 \cdot (a^2 - (1 - 2a)) - a^2(a + 4)$;

в) $(3p^2 - (5p + 3)) \cdot (-p) + (-p^2 + (p + 1)) \cdot (-2p) + p^2(p - 3)$;

г) $(-4a^2 - 6a - 8) \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right) + \left(\frac{1}{4}a\right) \cdot (-8a^2 - 16a - 32) + a(a + 5)$.

188 Докажите тождество:

а) $2 + (m - n)k + (n - k)m + (k - m)n + 2 = 4$;

б) $x(x + y + z) - x(x - y + z) + y(y - x - z) - y(y + x - z) = 0$;

в) $p(p + 2(q - r)) + q(q - 2(p - r)) + r(r + 2(p - q)) = p^2 + q^2 + r^2$;

г) $2a(bc + d(b - c)) - 2b(ca - d(c - a)) - 2c(ab - d(a - b)) = -2abc$.

189 Составьте выражение для вычисления указанных величин и запишите его как многочлен стандартного вида:

а) площадь прямоугольника, ширина которого равна $(m + n)$ м, а длина равна $2k$ м;

б) объем прямоугольного параллелепипеда, длина которого равна $5a$ дм, ширина – $3b$ дм, а высота – $(a + b)$ дм;

в) путь, пройденный за $(m + n)$ часов со скоростью $\frac{2}{3}p$ км/ч;

г) работа, выполненная с производительностью $3x$ деталей в минуту за время $(x + y)$ минут.

190 Решите уравнение:

а) $5x(3x - 2) + 2(x - 3) - 3x(4x + 4) = 3x^2 + 14$;

б) $4a(1 - 3a + a^2) - 2a(5 - 4a + 2a^2) + 2a(2a - 5) = -8$;

в) $3y(2y - 1) - 5y(3 - y) - 6y(3y - 4) = -4y(y + 2) - 3y(y - 1) + 22$;

г) $8b(7 - 4b) - 7b(1 - 4b) + 5b(8b - 1) = -45 + 3b(2b + 1) + 5b(6b + 7)$.

191 Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $3a(4 - 2a + 3a^2) - 5a(5 - 2a + 3a^2) + 2a(3a^2 - 2a + 3)$ при $a = -5$;

Указание: сделайте замену $t = 4 - 2a + 3a^2$ и преобразуйте выражение.

б) $4x(6x^2 + 9x - 27) - 24x(6x^2 + 9x - 29) + 20x(9x - 25 + 6x^2)$ при $x = 2$;

в) $(7b^3 - 9b^2 + 17)9b + 5b(7b^3 - 9b^2 + 22) - 14b(7b^3 - 9b^2 + 12)$ при $b = -3$;

г) $2y(16 - 7y^3 + 5y) + (26 - 7y^3 + 5y)5y - 7y(6 - 7y^3 + 5y)$ при $y = 4$.

192 Решите уравнение:

а) $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7}$;

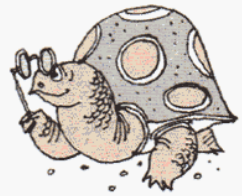
б) $\frac{1 - 9y}{5} = \frac{19 + 3y}{8}$;

в) $\frac{5 - z}{8} = \frac{18 - 5z}{12}$;

г) $\frac{4t + 33}{21} = \frac{17 + t}{14}$;

д) $1 - \frac{2x - 5}{6} = \frac{3 - x}{4}$;

е) $\frac{3y + 12}{4} = 3 - \frac{5y - 29}{3}$.



193 а) На первом складе была 21 тонна сахара, а на втором – 18 тонн. В течение нескольких дней на первый склад ежедневно привозили 9 тонн сахара, а на второй – 12 тонн. После этого сахар стали отгружать клиентам: ежедневно по 5 тонн с первого склада и по 10 тонн со второго склада. Сколько дней завозили сахар на эти склады, если весь сахар с первого склада отгрузили за срок, на 6 дней превышающий отгрузки всего сахара со второго склада?

б) Остаток денежных средств в кассе первого магазина в 3 раза больше, чем во втором магазине. После того как из кассы первого магазина взяли 20 тыс. р., а в кассу второго магазина, наоборот, доложили 20 тыс. р., оказалось, что количество денег в кассе второго магазина стало равно $\frac{5}{7}$ от суммы денег в кассе первого магазина. Сколько денег стало в кассе второго магазина?

194 Даны многочлены P и Q. Запишите в стандартном виде многочлен $2xP - 3yQ$, используя способ умножения и вычитания «в столбик»:

а) $P = 3x^2 - 3xy + 6y^2$, $Q = -2x^2 + 4xy + 2y^2$;

б) $P = x^3 + 3x^2y - 9xy^2$, $Q = 2x^3 - 6x^2y + y^3$;

в) $P = y^4 - 3y^3 + 6y^2 + 3y + 2$, $Q = 4x + 4xy - 2xy^2 + xy^3$

г) $P = 6xy^2 - 12x^2y + 3x^3y^2 + 9y^2$, $Q = 4x^2y - 6xy + 2x^4y - 8x^3$.

195 Какими многочленами нужно заменить A и B, чтобы равенства были верными?

а) $(5c^4 - 8c^3b + 2b^2c^2 - 4cb^2 - b^4) \cdot A = 3cb^4 - 15c^5 - 6b^2c^3 + 24c^4b + 12c^2b^2$;

б) $B \cdot 2ab = 2a^5b + 6a^4b^2 - 10a^3b^3 - 12a^2b^4 - 2ab^5$.

П **196** Запишите высказывание на математическом языке и постройте обратное к нему высказывание. Определите истинность высказываний. Для ложных высказываний постройте их отрицания:

а) Если рациональные числа равны, то равны и квадраты этих чисел.

б) Если рациональные числа равны, то равны и кубы этих чисел.

в) Если модули двух рациональных чисел равны, то равны и сами числа.

г) Все натуральные числа положительные.

д) Два рациональных числа противоположные, если их сумма равна нулю.

е) Если произведение двух рациональных чисел равно 1, то эти числа взаимно обратные.

ж) Сумма двух отрицательных рациональных чисел отрицательна.

з) Если произведение двух рациональных чисел равно 0, то хотя бы одно из этих чисел равно нулю.

197 а) Инвестор вложил свои сбережения на три года в инвестиционные фонды A и B. В инвестиционный фонд A он поместил 12 000 р. под 10% годовых, а в инвестиционный фонд B – 10 000 под 12% годовых. В каком из фондов инвестор заработает больше денег и на сколько?

б) Какую сумму денежных средств нужно инвестировать в развитие производства, чтобы получить через 3 года доход в размере 227,5 тыс. р., если рентабельность инвестиций (то есть ежегодный доход) по данной инвестиции составляет 20%?

в) Выручка компании за последние 4 года ежегодно увеличивалась на 10%. Определите, на сколько процентов увеличилась годовая выручка компании за эти 4 года?

г) По одному из видов вкладов коммерческий банк выплачивает доход, исходя из следующих годовых процентных ставок, зависящих от срока размещения денежных средств:

3 месяца – 12%, 6 месяцев – 13%, 9 месяцев – 14%, 12 месяцев – 15%.

Какую сумму получит вкладчик, разместивший на депозите 10 000 р., через: 1) 3 месяца; 2) 6 месяцев; 3) 9 месяцев; 4) 12 месяцев?

198 Множества A, B и C заданы перечислением их элементов:

$A = \{-3; -2; -1; 1\}$; $B = \{-9; -3; 1; 4\}$; $C = \{-9; -2; 1; 3\}$.

1) Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A, B и C и отметьте на ней элементы данных множеств.

2) Найдите:

а) $A \cap B$; в) $B \cup C$; д) $(A \cup B) \cap C$; ж) $B \cap C \cap A$;

б) $A \cup B$; г) $A \cap C$; е) $B \cup (A \cap C)$; з) $A \cup B \cup C$.

199 Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A и B. Найдите их пересечение и объединение:

а) $A = \{a\colon a \equiv 3 \pmod 4;\ -5 \leqslant a < 8\}$;
$B = \{b\colon b \equiv 2 \pmod 5;\ -4 < b \leqslant 9\}$;

б) $A = \{a\colon a \equiv 2 \pmod 7;\ -5 \leqslant a < 11\}$;
$B = \{b\colon b \equiv 1 \pmod 8;\ -9 < b \leqslant 12\}$.

200 Какой цифрой оканчивается число:

а) 3333^{4444}; б) 7777^{9999}; в) $123^{321} + 456^{654}$; г) $125^{333} + 521^{666}$?

Д **201** Упростите выражение:

а) $2x(3y - x) - y(y + 6x) + 3x^2$; б) $p(3q - p) - q(p + 2q) - 2(p^2 - q^2 + qp)$.

202 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $-2m \cdot (m^4 + 6m^3 - 3m^2) - (-4m^2) \cdot (2m^3 + 3m^2 - 4m)$;

б) $(-4b^2 + 2b - 3) \cdot (-2b^2) + (-2b^2 + 3b^3 + 2b) \cdot (-3b)$.

203 Составьте выражение для вычисления:

а) стоимости покупки $2a + 3c$ книг по цене $5b$ р. за штуку;

б) количества жильцов в доме, в котором $2x + y$ квартир, а количество жильцов в каждой квартире равно $3z$.

Запишите полученное выражение как многочлен стандартного вида.

204 Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $3ab \cdot (4a^2 - 7ab + 2b^2) - 4ab \cdot (3a^2 - 4ab + 2b^2)$ при $a = 1$, $b = -1$;

б) $2cd \cdot (3dc^2 - 2c^2 + 4dc - 3cd^3) - 3c^2d \cdot (2cd - c + 3d - 2d^3)$ при $c = -1$, $d = 1$.

205 Решите уравнение:

а) $3x(4x + 6x^2) - 2x(3 + 5x + 9x^2) - 2x(x - 4) = -8$;

б) $2z(3z - 2) - 4z(5 - 2z) + 3z(2z - 7) = 7z(2z - 3) + 2z(3z - 2) + 10$;

в) $\dfrac{x + 17}{5} - \dfrac{3x - 7}{4} = -2$; г) $\dfrac{x - 4}{5} + \dfrac{3x - 2}{10} = \dfrac{2x + 1}{3} - 7$.

206 Даны многочлены P и Q. Запишите в стандартном виде многочлен $2xP - yQ$, используя способ умножения и вычитания «в столбик»:

а) $P = -x^2 - 4xy + 2y^2$, $Q = -8x^2 + 4xy - 2y^2$;

б) $P = 2x^5y - 2xy^3 + 4y^2 - 8y$, $Q = 4x^6 - 4x^2y^2 + 8xy - 10x$.

207 Какими многочленами нужно заменить A и B, чтобы равенства были верными?

а) $(3z^3 - 5z^2t + 3z^2t^2 - 5zt^2 - t^4) \cdot A = 2t^5 - 6z^3t + 10z^2t^2 - 6z^2t^3 + 10zt^3$;

б) $B \cdot (-3m^2) = 12m^2n^2 + 15m^3n^3 - 21m^4n + 30m^3n^4 - 15m^5n^5$.

208 Владельцы пончиковой компании Антон и Ксюша решили взять кредит в банке для инвестиционного проекта, связанного со строительством новой пончиковой фабрики в Подмосковье. Коммерческий банк готов предоставить им кредит в размере 15 млн. р. на срок 5 лет, с годовой процентной ставкой, равной 12%, начисляемой ежегодно на первоначальную сумму кредита. Известно, что рентабельность инвестиций по этому проекту (то есть ежегодный доход) без учета выплат процентов по кредиту составляет 10% годовых. Получат ли Антон с Ксюшей по истечении 5 лет прибыль по этому проекту, если вложат в проект только кредитные деньги, и если да, то в каком размере? Результат округлите до десятых миллионов рублей.

209 В баке первого автомобиля было в 2 раза больше бензина, чем в баке второго. Перед тем как отправиться в дорогу, владелец первого автомобиля вынужден был израсходовать 10 л бензина, а владелец второго автомобиля, наоборот, долил в бак 15 л бензина. Расход бензина в первом автомобиле 12 литров на 100 км, а во втором – 8 л на 100 км. Сколько литров бензина было первоначально в баке первого автомобиля, если после того, как автовладельцы отправились в дорогу, первый проехал на этом запасе бензина на 150 км меньше, чем второй?

210 Множества A, B и C заданы перечислением их элементов:

$A = \{-9; -8; -6; 6\}$; $B = \{-9; -6; 4; 5\}$; $C = \{-9; -7; 4; 6\}$.

1) Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A, B и C и отметьте на ней элементы данных множеств.

2) Найдите: а) $A \cap B$; б) $B \cup C$; в) $(A \cup B) \cap C$; г) $B \cap C \cap A$.

211 Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A и B. Найдите их пересечение и объединение.

$A = \{a\colon a \equiv 4 \pmod 5;\ -6 \leqslant a < 10\}$; $B = \{b\colon b \equiv 5 \pmod 6;\ -3 < b \leqslant 9\}$.

212 Какой цифрой оканчивается число: а) 727^{272}; б) $321^{123} + 654^{456}$?

213 Расположите ответы примеров в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам, и вы узнаете название быстроходной гребной шлюпки, которое происходит от английского словосочетания «китобойное судно».

Б $\left(3{,}7 - \frac{2}{3}\right) + 6{,}3 - 2{,}4 + \left(\frac{2}{9} - 3{,}6\right)$

Л $1{,}6 + \left(-2\frac{7}{9} + 3{,}4\right) - \frac{2}{9}$

Ь $\left(1\frac{4}{5} - 6{,}03\right) - \left(-4{,}14 - 2\frac{1}{4} - 6{,}03\right) - 4{,}8$

В $5\frac{3}{5} - 6{,}3 - \left(5{,}7 + 3\frac{4}{5}\right)$

Т $13{,}5 - \left(4\frac{3}{7} \cdot 2{,}6 - 3\frac{3}{7} \cdot 2{,}6\right) : 3\frac{1}{4}$

О $42{,}5 : 1{,}7 - 3{,}4 : \frac{1}{6}$

Е $2{,}7 \cdot 0{,}625 \cdot 7\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{4}{11}\right) \cdot 1\frac{1}{9}$

C **214*** Властелин колец ждет, когда каждый из 30 его вассалов, как и в предшествующие годы, преподнесет ему по 30 золотых монет. Но властелин колец знает, что один из них постоянно пытается хитрить и вместо монет по 10 г вручает ему монеты по 9 г. Как с помощью всего лишь одного взвешивания можно обнаружить вассала-хитреца, если тот опять осмелится обмануть своего повелителя?

215* Профессор Спейс пообещал Драко открыть великую тайну, если тот составит чудесный квадрат размером 3 на 3 из чисел 1, 0, −1 так, чтобы все суммы по строкам, столбцам и большим диагоналям были различны. Сможет ли Драко выполнить задание профессора?

5. Умножение многочлена на многочлен

Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть – и далее подтвердить это, – что, следуя этому методу, мы достигнем цели.

Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (1646–1716),
немецкий математик и философ

Правило умножения одночлена на многочлен, установленное в предыдущем пункте, позволяет перейти к выводу правила умножения многочленов. Для этого рассмотрим простейший случай умножения многочленов:

$$(a + b)(c + d).$$

Обозначим двучлен $a + b$ какой-либо буквой, например буквой x, и в полученном произведении $x(c + d)$ раскроем скобки:

$$(a + b)(c + d) = x(c + d) = xc + xd.$$

Затем в выражении $x(c + d) = xc + xd$ сделаем обратную замену x на $a + b$ и вновь раскроем скобки:

$$xc + xd = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd = ac + ad + bc + bd.$$

Итак:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Мы видим, что в результате умножения наших двучленов мы получили многочлен. Данное утверждение можно доказать и в общем случае. Действительно, умножая многочлены, мы умножаем все члены одного многочлена на все члены другого, а затем их складываем. При умножении одночленов мы вновь получаем одночлены, а их сумма, по определению, является многочленом.

Итак, мы приходим к следующему определению произведения двух многочленов.

Определение. **Произведением двух многочленов** называется многочлен, равный сумме произведений каждого члена одного многочлена на каждый член другого многочлена.

На практике при вычислениях удобно пользоваться **правилом**, которое непосредственно следует из данного определения:

> Чтобы умножить многочлен на многочлен, можно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Данное правило для разобранного нами случая можно проиллюстрировать с помощью прямоугольника на рис. 1. Площадь данного прямоугольника, с одной стороны, равна произведению длин его сторон $(a + b)(c + d)$, а с другой – сумме площадей составляющих его прямоугольников, то есть $ac + ad + bc + bd$.

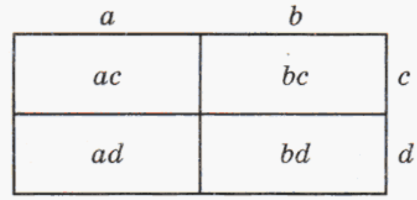
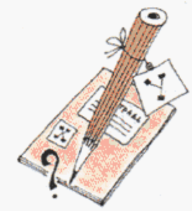


Рис. 1

Умножение многочлена на многочлен также можно записывать «в столбик»:

$$\begin{array}{rlll}
 & x^2 + 2x + 1 & & \\
\times & x^2 - 2x + 1 & & \\
\hline
 & x^4 - 2x^3 + x^2 & & \text{– умножили } x^2 \text{ на } x^2 - 2x + 1 \\
+ & \quad\;\; 2x^3 - 4x^2 + 2x & & \text{– умножили } 2x \text{ на } x^2 - 2x + 1 \\
 & \qquad\qquad x^2 - 2x + 1 & & \text{– умножили } 1 \text{ на } x^2 - 2x + 1 \\
\hline
 & x^4 \qquad - 2x^2 \qquad + 1 & &
\end{array}$$



Следовательно, $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) = x^4 - 2x^2 + 1$.

Изученное правило умножения многочленов достаточно часто используется при выполнении преобразований буквенных выражений, при нахождении значений выражений, решении уравнений и неравенств, доказательстве тождеств. А все это в конечном итоге помогает решать многие практические задачи. Построим, например, математическую модель для следующей задачи.

Задача. Путь из пункта A в пункт B велосипедист проехал со скоростью v км/ч за t ч. А из пункта B в пункт C он ехал на 2 ч дольше, при этом его скорость была на 5 км/ч больше, чем по дороге из A в B. На сколько километров путь от A до B короче, чем от B до C?

Решение:

Путь от A до B равен vt км, при этом $v > 0$ и $t > 0$. А путь от B до C равен $(v + 5)(t + 2)$ км. Разница D между этими путями равна $(v + 5)(t + 2) - vt$ км. Значит, математическая модель нашей задачи имеет вид:

$$\begin{cases} D = (v + 5)(t + 2) - vt \\ v > 0;\ t > 0 \end{cases} \longrightarrow D = ?$$

Упростим полученное для D выражение, используя правило умножения многочленов:

$$D = (v + 5)(t + 2) - vt = vt + 2v + 5t + 10 - vt = 2v + 5t + 10.$$

Таким образом, математическая модель нашей задачи построена.

Итак, теперь мы знаем, как найти произведение двух многочленов. А как найти произведение трех или более многочленов?

В этом случае следует сначала умножить первый многочлен на второй, затем полученное произведение умножить на третий многочлен и т.д. до тех пор, пока не будет выполнено умножение на последний многочлен. Чтобы проще было проводить вычисления, многочлен, получающийся на каждом шаге вычислений, лучше приводить к стандартному виду.

Пример. Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4).$$

Решение:

Будем последовательно выполнять умножение многочленов слева направо. Полученные промежуточные многочлены будем приводить к стандартному виду:

$$\underbrace{(a-b)(a+b)}(a^2+b^2)(a^4+b^4) = (a^2+\cancel{ab}-\cancel{ab}-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4) =$$

$$= \underbrace{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}(a^4+b^4) = (a^4+\cancel{a^2b^2}-\cancel{a^2b^2}-b^4)(a^4+b^4) =$$

$$= (a^4-b^4)(a^4+b^4) = a^8+\cancel{a^4b^4}-\cancel{a^4b^4}-b^8 = a^8-b^8$$

Итак,

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) = a^8-b^8.$$

К **216** Раскройте скобки и запишите результат как многочлен стандартного вида:

а) $7y(y-3)$; б) $-8a^2b(a^2+2ab-3b^2)$; в) $-2m^2(-4m^3+m^2-9m+3)$.

217 1) Сравните выражения:

$$(a+b)(c+d) \quad \text{и} \quad x(c+d)$$

Что в них общего? Чем они отличаются? Как можно записать в виде многочлена первое произведение, используя результат раскрытия скобок во втором?

2) На основе выполненных преобразований предложите свое определение для произведения многочленов и соответствующее правило. Сравните полученное вами определение и правило с определением и правилом на стр. 46.

218 Вычислите произведение многочленов:

а) $(a+3)(a+2)$; д) $(2m-3n)(m-n)$; и) $(x^2-2x)(x+3)$;
б) $(x-2)(x-5)$; е) $(5p-2q)(p+q)$; к) $(a^2+b^2)(3a^2-b^2)$;
в) $(2y+3)(4y-5)$; ж) $(7a+8b)(3a-4b)$; л) $(5p^2-pq)(5p^2+pq)$;
г) $(2-5b)(4b+3)$; з) $(9x-2y)(3y-2x)$; м) $(2ab-3b^2)(2ab-3b^2)$.

Как короче можно записать последнее выражение?

219 Запишите выражение как многочлен стандартного вида, используя умножение «в столбик»:

а) $(m-n)(m^2+mn+n^2)$; д) $(p^2+p+1)(3p^2-2p-1)$;
б) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$; е) $(5q^2+8q+1)(q^2-2q+3)$;
в) $(a-b)(a^3+ab^2+a^2b+b^3)$; ж) $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+b^2)$;
г) $(a-b)(a^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+b^4)$; з) $(x^2-2xy+5y^2)(x^2+2xy-y^2)$.

220 Вычислите произведение многочленов:

а) $(x+3)^2$; д) $p^2(p-3)(p+2)$; и) $(c-2)(c-3)(c-4)$;
б) $(4-y)^2$; е) $4q^3(1-q)(q+6)$; к) $(2d+1)(2d-1)(4d^2+1)$;
в) $(2-5a)^2$; ж) $2cd(2c-d)(d+2c)$; л) $(a+b)^3$;
г) $(3b-4)^2$; з) $-5m^4n^2(m^2-1)(n+1)$; м) $(x-y)^3$.

221 Постройте математическую модель задачи:

а) На парусной регате одна из яхт стартовала со скоростью a км/ч и плыла с этой скоростью t часов. Оставшееся время она плыла со скоростью на 7 км/ч большей. Сколько км проплыла эта яхта, если на прохождение дистанции она затратила $2t + 3$ часа?

б) В течение рабочей смены маленькие жарочные печи кофейной фабрики работают по x часов, а каждая из больших – на 2 часа больше. Сколько килограммов кофе обжаривает за рабочую смену эта кофейная фабрика, если производительность маленькой печи y кг в час, производительность большой печи на 300 кг в час больше и на фабрике 5 маленьких печей и 3 большие?

Запишите полученное выражение как многочлен стандартного вида.

222 Решите уравнение:

а) $(q + 1)^2 = q^2 + 9$;

б) $(y - 2)^2 = y^2 - 3(y + 2)$;

в) $(4p - 2)(3p - 1) - 3(3 - p) - 12p^2 = 21$;

г) $(5z - 1)(3z + 2) - 2z(5z - 4) = 43 + 5z^2$.

223 Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

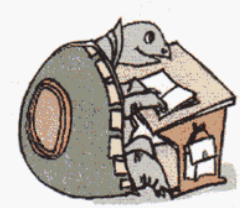
а) $(x - 3)(x + 4) - (x + 6)(x - 5)$ при $x = 5\frac{17}{29}$;

б) $(y + 6)(2 - y) - (9 + y)(5 - y)$ при $y = -3\frac{19}{32}$;

в) $(a^2 + 4a + 4)(a - 2) - (a^2 - 4a + 4)(a + 2)$ при $a = 5\frac{1}{2}$;

г) $2(b^2 - 2)(b^2 + 2) - (b^2 + 2)^2 - (b^2 - 2)^2$ при $b = -7\frac{13}{53}$.

224 Решите уравнение:



а) $(x - 1)^2 - (x + 1)^2 = (x + 3)(x - 3) - x^2 - 3$;

б) $(y - 6)^2 + (y - 4)^2 + 9 = (6y - 2)(11y - 1) - (8y - 3)^2$.

225 Докажите тождество:

а) $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz - yt)^2 + (yz + xt)^2$;

б) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 2b^3$.

226 Решите уравнение:

а) $(a^2 + 3a + 4)(a^2 + 3a + 5) - (a^2 + 3a + 6)(a^2 + 3a + 7) = -22$;

Указание: сначала сделайте замену $t = a^2 + 3a + 4$ и преобразуйте выражение.

б) $(x^2 + 5x - 3)(x^2 + 5x + 3) - (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x - 4) = 7$;

в) $(5 - 3y + 2y^2)(4 - 3y + 2y^2) - (3 - 3y + 2y^2)(2 - 3y + 2y^2) = 14$;

г) $(2 - 3b - 5b^2)(2 + 3b + 5b^2) - (5 - 3b - 5b^2)(5 + 3b + 5b^2) = -21$.

227 Даны многочлены P, Q и R. Запишите многочлен PQR в стандартном виде:

а) $P = 4x^2 + 3x + 2$, $\quad Q = 4x^2 - 3x + 2$, $\quad R = x^2 - 1$;

б) $P = a^4 + a^2 + 1$, $\quad Q = a^4 + 1$, $\quad R = a^4 - a^2$.

228 Определите правильность логического вывода, используя диаграммы Эйлера–Венна:

а) Если некоторые отрицательные числа рациональные, то некоторые рациональные числа – отрицательные.

б) Если ни один квадрат рационального числа не отрицательный, то ни одно отрицательное число – не квадрат.

в) Если все решения уравнения $x^2 = 1$ являются элементами множества $\{-1; 0; 1\}$ и некоторые элементы множества $\{-1; 0; 1\}$ – нечетные числа, значит, некоторые решения уравнения $x^2 = 1$ – нечетные числа.

г) Если все элементы множества $\{-4; 0; 4\}$ – четные числа и ни один элемент этого множества не кратен 5, значит, все четные числа не кратны 5.

229 Изобразите на координатной прямой Ox множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x > 3$; в) $-6 \leqslant x < 4$; д) $5 < x \leqslant 9$; ж) $|x| > 2$;

б) $x \geqslant -5$; г) $-3 \leqslant x \leqslant 5$; е) $|x| \leqslant 6$; з) $|x - 7| \leqslant 3$.

230 Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x > 2$; в) $-5 \leqslant x < 7$; д) $4 < x \leqslant 7$; ж) $|y| > 4$;

б) $y \leqslant -4$; г) $-2 \leqslant y \leqslant 5$; е) $|x| \leqslant 3$; з) $|x - 5| \leqslant 2$.

231 а) Из Санкт-Петербурга в Москву со скоростью 80 км/ч выехал автомобилист, а через 1 час вслед за ним со скоростью 90 км/ч выехал второй автомобилист, который догнал первого по прибытии в Москву. Чему равно расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом?

б) Из пункта A выехал велосипедист. Одновременно вместе с ним из B навстречу ему выехал мотоциклист. Через час оказалось, что велосипедист находится точно посередине между А и мотоциклистом. А еще через час они оказались на одинаковом расстоянии от пункта А. Во сколько раз скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста?

232 Докажите, что какими бы ни были целые числа a и c, одно из чисел: a, c, $a + c$, $a - c$, $2a + c$, $2a - c$ делится на 5.

233 Вычислите произведение многочленов:

а) $(2a + 5b)(5a - 2b)$; в) $(y + 2x)(y - 3x)$; д) $(x + 4)^2$;

б) $(2 - y)(y + 2)$; г) $(3p + 5q)(2p - 7q)$; е) $(4m - 5n)(2n - 3m)$.

234 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(a + b + c)(a + b - c)$; в) $(x + y - c)(x - y + c)$;

б) $(p + 2q - 3r)(p - 2q - 3r)$; г) $(m + 4n + 2k)(m - 4n - 2k)$.

235 Постройте математическую модель задачи. Полученное выражение запишите как многочлен стандартного вида.

Перед тем как идти в кассу, Миша посчитал количество дисков, которые он хотел купить. Оказалось, что он выбрал a дисков с компьютерными играми, а дисков с музыкой – на 5 больше. Сколько денег Миша должен заплатить в кассу магазина, если диски с компьютерными играми стоили b р. за штуку, а диски с музыкой были на 50 р. дешевле?

236 Решите уравнение:

а) $(7x + 1)(1 + x) - 8 - 3x^2 = (2x + 5)(2x - 5) + 4x - 3$;

б) $3(y + 1)(y - 2) + 6 = 3y(1 + y) + 3(2 - y)$.

237 Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $(x - 5)(x + 7) - (x - 3)(x + 5)$ при $x = 9\frac{11}{25}$;

б) $(2y + 1)(2y - 5) + (3 + 2y)(7 - 2y)$ при $y = -6\frac{15}{17}$.

238 Решите уравнение:

а) $(2x + 1)^2 + (3x + 1)^2 + (8x - 3)^2 = (7x - 2)(11x - 1)$;

б) $(6 - 3x)^2 + (5 - 4x)^2 - 6 = (9 - 5x)^2 + 20x - 32$.

в) $(2x^2 + 7x + 3)(2x^2 + 7x + 5) - (2x^2 + 7x + 7)(2x^2 + 7x + 9) = -48$;

Указание: сначала сделайте замену $t = 2x^2 + 7x + 3$ и преобразуйте выражение.

г) $(x^2 + 9x - 5)(x^2 + 9x + 5) - (x^2 + 9x + 7)(x^2 + 9x - 7) = 24$.

239 Даны многочлены P, Q и R. Запишите многочлен PQR в стандартном виде:

а) $P = 5xy - 2x$, $Q = x^2 + y^2$, $R = x^2 - y^2$;

б) $P = z^2 - 3z - 2$, $Q = z^2 + 3z + 2$, $R = z^2 - 4$.

240 Изобразите на координатной прямой Ox множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x > 4$; б) $x \leqslant -2$; в) $-3 \leqslant x < 5$; г) $|x| \leqslant 7$; д) $|x| > 3$.

241 Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x > -1$; б) $y \leqslant 3$; в) $-2 \leqslant x < 4$; г) $-3 \leqslant y \leqslant 6$;

д) $|x| \leqslant 5$; е) $|y| > 2$; ж) $|x - 2| \leqslant 3$; з) $|y - 1| \leqslant 5$.

242 Владельцы пончиковой компании Антон и Ксюша решили участвовать в международной велогонке, в целях привлечения внимания к своей компании. Для начала они решили потренироваться на небольших дистанциях. Стартовали они оба со скоростью 35 км/ч, но Антон решил обогнать Ксюшу и увеличил скорость на 10 км/ч. Проехав с этой скоростью 10 км, он повернул назад и с той же скоростью поехал навстречу Ксюше. Сколько времени прошло с момента увеличения скорости Антоном до момента его встречи с Ксюшей?

243 Докажите, что какими бы ни были целые числа a и c, одно из чисел: a, c, $a - c$, $2a - c$ делится на 3.

244* В мешке 70 шаров: 20 красных, 20 синих, 20 желтых, а остальные черные и белые. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из этого мешка, чтобы среди них гарантированно было не менее 10 шаров одного цвета?

245* На чудо-дереве растут бананы и ананасы. За один раз с него можно сорвать два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет один ананас, а если сорвать один ананас и один банан, то вырастет один банан. В итоге на дереве остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и сколько ананасов росло на чудо-дереве в начале?

§ 3. Формулы сокращенного умножения

1. Квадрат суммы и разности

Математик – это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями.

Стефан Банах (1892–1945), польский математик

Выполняя вычисления и преобразовывая различные выражения, мы всегда стремимся получить результат более коротким и удобным способом. Например, чтобы выполнить умножение $9 \cdot 200$, мы не станем записывать сумму 9 слагаемых, равных 200, а сразу запишем результат 1800. В данном случае упростить вычисления нам помогла таблица умножения и установленное нами правило умножения чисел, оканчивающихся нулями.

При умножении многочленов также существуют правила и формулы, позволяющие упростить преобразования.

Выясним, например, есть ли какие-то закономерности при умножении двух одинаковых двучленов или, что то же самое, при возведении их в квадрат. Для этого возведем в квадрат несколько различных двучленов:

$$(b + 5)^2 = (b + 5)(b + 5) = b^2 + \underline{5b} + \underline{5b} + 5^2 = b^2 + \underline{10b} + 25;$$

$$(3x + y)^2 = (3x + y)(3x + y) = 9x^2 + \underline{3xy} + \underline{3xy} + y^2 = 9x^2 + \underline{6xy} + y^2.$$

Мы замечаем, что в каждом из этих случаев итоговый многочлен состоит из трех слагаемых, два из которых – квадраты членов исходного двучлена, а третье равно удвоенному произведению этих членов.

Исходя из этого наблюдения, сформулируем гипотезу, что для любых одночленов a и b:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Для доказательства этой гипотезы возведем в квадрат двучлен, пользуясь правилом умножения многочленов:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Наша гипотеза доказана. При этом результат возведения двучлена $a + b$ в квадрат не изменится, если вместо a и b мы подставим любые числа или вообще любые выражения. Значит, указанная формула всегда верна и является, по сути, тождеством.

Итак, мы приходим к следующей формуле:

Формула квадрата суммы

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения, плюс удвоенное произведение первого и второго выражений, плюс квадрат второго выражения.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Аналогичным образом при вычислении квадрата разности двух выражений получаем:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Этот же результат мы получим, если в формуле квадрата суммы заменим b на $(-b)$:

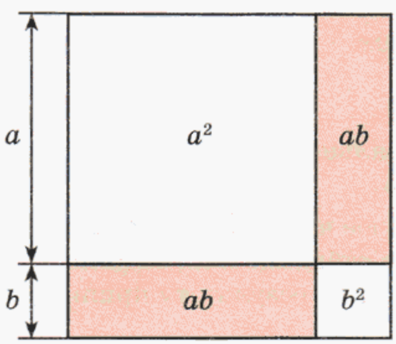
$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

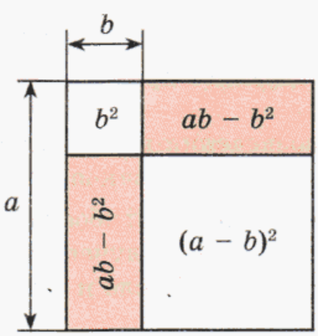
Формула квадрата разности

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения, минус удвоенное произведение первого и второго выражений, плюс квадрат второго выражения.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Полученные нами формулы квадрата суммы и квадрата разности для положительных значений a и b ($a > b$) можно проиллюстрировать геометрически:





Площадь первого квадрата, с одной стороны, равна $(a + b)^2$, а с другой стороны, равна $a^2 + b^2 + ab + ab$. Но ведь это одна и та же площадь, поэтому

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Аналогично площадь второго квадрата, с одной стороны, равна a^2, а с другой – сумме $(a - b)^2 + (ab - b^2) + (ab - b^2) + b^2$. Упростим данное выражение и проведем равносильные преобразования. Мы получим, что

$$a^2 = (a - b)^2 + 2ab - b^2 \quad \Leftrightarrow \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Формулы квадрата суммы и разности хороши, в частности, тем, что позволяют сразу записать результат возведения в квадрат любого двучлена.

Пример 1.

Возведите двучлены в квадрат: $(a^3 + 5ab^2)^2$, $(a^3 - 5ab^2)^2$.

Решение:

$(a^3 + 5ab^2)^2 = (a^3)^2 + 2(a^3)(5ab^2) + (5ab^2)^2 = a^6 + 10a^4b^2 + 25a^2b^4,$

$(a^3 - 5ab^2)^2 = (a^3)^2 - 2(a^3)(5ab^2) + (5ab^2)^2 = a^6 - 10a^4b^2 + 25a^2b^4.$

Таким образом, используя установленные формулы, нам не надо представлять квадраты двучленов в виде произведения двух множителей, затем выполнять умножение и приведение подобных слагаемых. Мы просто сразу записываем результат. В связи с этим формулы квадрата суммы и разности называют также *формулами сокращенного умножения.*

Формулы сокращенного умножения позволяют не только быстро возводить в квадрат двучлены, но и устно возводить в квадрат числа, причем не только целые, но и дробные.

Пример 2.
Вычислите: 1001^2; $49{,}9^2$; 64^2.

Решение:

$1001^2 = (1000 + 1)^2 = 1\,000\,000 + 2 \cdot 1000 \cdot 1 + 1 = 1\,000\,000 + 2000 + 1 = 1\,002\,001$;

$49{,}9^2 = (50 - 0{,}1)^2 = 2500 - 2 \cdot 50 \cdot 0{,}1 + 0{,}01 = 2490{,}01$;

$64^2 = (60 + 4)^2 = 3600 + 2 \cdot 60 \cdot 4 + 16 = 3600 + 480 + 16 = 4096$.

С помощью формулы суммы квадратов мы можем также получить простейшее правило, которое без труда позволит возвести в квадрат любое натуральное число, оканчивающееся на 5.

Действительно, любое такое число можно записать в виде $10x + 5$, где x – число, полученное из первоначального после отбрасывания единиц. Возведем число $10x + 5$ в квадрат, используя формулу суммы квадратов:

$$(10x + 5)^2 = (10x)^2 + 2 \cdot 10x \cdot 5 + 5^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x(x + 1) + 25.$$

Итак, мы получили следующее правило.

Правило возведения в квадрат натурального числа, оканчивающегося на 5

Для того чтобы возвести в квадрат любое натуральное число, оканчивающееся на 5, можно умножить число, полученное после отбрасывания единиц, на следующее за ним натуральное число и к полученному результату приписать справа 25.

Используя данное правило, решим следующий пример.

Пример 3.
Вычислите: 35^2, 105^2.

Решение:

$35^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 25 = 1200 + 25 = 1225$,

$105^2 = 10 \cdot 11 \cdot 100 + 25 = 11\,000 + 25 = 11\,025$.

Таким образом, мы видим, что полученные нами формулы сокращенного умножения помогают существенно упростить как возведение двучленов в квадрат, так и самые различные вычисления.

☺☺☺

Аналогичным образом можно получить формулу сокращенного умножения для возведения в квадрат трехчлена $a + b + c$:

$$(a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

Значит,

Квадрат трехчлена равен сумме квадратов всех его членов плюс все попарные удвоенные произведения его членов.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Полученная формула позволяет упростить возведение в квадрат любых трехчленов. Так, возвести в квадрат следующие трехчлены можно фактически устно (не забывая учитывать в формуле знаки членов трехчлена):

$$(3a + 2b + 4c)^2 = (3a)^2 + (2b)^2 + (4c)^2 + 2(3a)(2b) + 2(3a)(4c) + 2(2b)(4c) =$$
$$= 9a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 12ab + 24ac + 16bc;$$

$$(-3a + 2b - 4c)^2 = (-3a)^2 + (2b)^2 + (-4c)^2 + 2(-3a)(2b) + 2(-3a)(-4c) + 2(2b)(-4c) =$$
$$= 9a^2 + 4b^2 + 16c^2 - 12ab + 24ac - 16bc.$$

246 Запишите выражение:

а) квадрат суммы a и b;
б) сумма квадратов a и b;
в) квадрат разности c и d;
г) разность квадратов c и d;
д) квадрат суммы x, y и z;
е) сумма квадратов x, y и z.

247 1) Докажите, что $(-m)^2 = m^2$. Используя данное свойство противоположных чисел, докажите, что $(-x - y)^2 = (x + y)^2$, $(x - y)^2 = (y - x)^2$.

2) Среди данных выражений укажите пары равных и пары противоположных выражений.

а) $(x + y)^2$; $(-x - y)^2$; $-(-x - y)^2$; $(x + y)^3$; $(-x - y)^3$; $-(-x - y)^3$;
б) $(x - y)^2$; $(y - x)^2$; $-(x - y)^2$; $(x - y)^3$; $(y - x)^3$; $-(x - y)^3$.

248 1) Используя определение степени, запишите выражение как произведение двучленов и выполните умножение. Результат запишите как многочлен стандартного вида:

а) $(a + 6)^2$; б) $(2m + 4)^2$; в) $(5x + y)^2$; г) $(2a + 3c)^2$.

2) Какие закономерности вы заметили?

249 1) Запишите квадрат суммы a и b как многочлен стандартного вида. Нарисуйте квадрат с длиной стороны $a + b$ и объясните геометрический смысл полученной вами формулы квадрата суммы для положительных a и b.

2) Используя полученную формулу квадрата суммы, выведите формулу квадрата разности a и b и объясните ее геометрический смысл при $a > b > 0$.

3) Сформулируйте правила возведения в квадрат суммы и разности двух выражений и сравните свои формулировки с правилами на стр. 52 – 53 учебника.

250 Возведите двучлены в квадрат:

а) $(c + d)^2$; б) $(-m - n)^2$; в) $(p - q)^2$; г) $(-x + y)^2$;
д) $(-b + 5)^2$; е) $(3 + k)^2$; ж) $(-a - 8)^2$; з) $(r - 4)^2$;
и) $(2x - 5)^2$; к) $(3 - 7z)^2$; л) $(2 + 3y)^2$; м) $(-4t - 1)^2$;
н) $(-3b - \frac{1}{3}c)^2$; о) $(\frac{1}{2}x - 5y)^2$; п) $(-2a + \frac{1}{2a})^2$; р) $(3c + \frac{1}{3c})^2$.

251 В формулы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ подставьте $b = a$, $b = 2a$, $b = 3a$ и убедитесь в истинности полученных равенств.

252 Запишите выражение как трехчлен стандартного вида:

а) $(n^2 - 4)^2$; д) $(2a^4 + c)^2$; и) $(-7x^3 + 2y^2)^2$; н) $(-6ab - \frac{1}{3}b^2)^2$;

б) $(-m^4 + 3)^2$; е) $(b^3 - 4d)^2$; к) $(-3a^2 - 5b^4)^2$; о) $(\frac{1}{4}x^2y + 2xy^2)^2$;

в) $(3 + p^3)^2$; ж) $(-5m - n^5)^2$; л) $(4m^5 - 6n^3)^2$; п) $(-0{,}1pq^3 - 10q^4)^2$;

г) $(-q^5 - 1)^2$; з) $(-7k + r^2)^2$; м) $(8p^6 + 3q^4)^2$; р) $(0{,}2mn^4 + 1{,}5mn^2)^2$.

253 Вычислите, используя формулу квадрата суммы или квадрата разности:

а) 89^2; в) 299^2; д) $8{,}9^2$; ж) 32^2; и) 103^2;

б) 91^2; г) 501^2; е) $11{,}1^2$; з) 98^2; к) 197^2.

254 Вычислите устно:

а) 45^2; б) 95^2; в) 195^2; г) 305^2; д) 1005^2.

255 Какие одночлены можно подставить вместо A, B и C, чтобы получившееся равенство стало тождеством?

а) $(4x + A)^2 = B + C + y^2$; г) $(2s - A)^2 = B - 20st + C$;

б) $(A + 2m)^2 = 4n^2 + B + C$; д) $(A - 5rx)^2 = 16x^2 - B + C$;

в) $(A + B)^2 = 9p^2 + C + 25q^2$; е) $(A + B)^2 = \frac{1}{4}y^2 - C + \frac{1}{25}z^2$.

256 Запишите трехчлен как квадрат двучлена:

а) $a^2 + 2a + 1$; д) $25p^2 + 20pq + 4q^2$; и) $-8ab + 4a^2 + 4b^2$;

б) $b^2 - 2b + 1$; е) $9s^2 - 12st + 4t^2$; к) $6mn + n^2 + 9m^2$;

в) $x^2 + 4x + 4$; ж) $16a^2 - 40ab + 25b^2$; л) $16x^4 - 8x^3 + x^2$;

г) $y^2 - 6y + 9$; з) $81x^2 - 72xy + 16y^2$; м) $4a^2b^2 + 12a^3b + 9a^4$.

Проверьте результат, возводя полученный двучлен в квадрат.

257 Подберите A таким образом, чтобы трехчлен можно было записать как квадрат двучлена:

а) $x^2 - 2xy + A$; б) $25a^2 - A + 49b^2$; в) $A + 4p^2 + 12pq$; г) $-A + 16z^2 + 9t^2$.

258 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(a + 4)(-a - 4)$; г) $(2x + 3y)^2 - 5xy$; ж) $(a - 1)^2 - 4(a + 1)^2$;

б) $(2b - 7)(7 - 2b)$; д) $60ab - (4a + 7b)^2$; з) $-(3 + x)^2 - 3(1 - x)^2$;

в) $(-2p^2 - 3q)(2p^2 + 3q)$; е) $-(5s^2 - 2t^2)^2 - 20s^2t^2$; и) $5(1 - c)^2 - 8(c - 2)^2$.

259 Докажите, что при любом целом x указанное выражение делится на a:

а) $(3x + 1)^2 - (3x - 1)^2$, $a = 12$; в) $(5x + 1)^2 + (x - 5)^2$, $a = 26$;

б) $(7x + 3)^2 - (3 - x)^2$, $a = 48$; г) $(9x + 5)^2 - (5x + 9)^2$, $a = 56$.

260 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $3(x + 5)^2$; д) $y(7 - 2y) - (3 - y)^2$; и) $(5 - 7a)^2 - (5a - 3)(4 - 3a)$;

б) $4(a - b)^2$; е) $3(z + 2)^2 - z(z - 3)$; к) $2(3 - 2x)(4x - 5) - 3(x - 8)^2$;

в) $2(-3p - q)^2$; ж) $2t(3t - 5) - (3t - 2)^2$; л) $(p + q)^2 - (q + r)^2 + (r + p)^2$;

г) $-5(4m + 2n)^2$; з) $k(5k + 4)^2 - 3k^2(k + 7)$; м) $2m(3m + 4n)^2 - 5n(3n + 4m)^2$.

261 Какое выражение надо прибавить к $(a-b)^2$, чтобы получить $(a+b)^2$?

262 Решите уравнение:

а) $a^2-(a-2)^2=16$;
в) $(3m+5)(3m-5)-(3m-1)^2=10$;
б) $(y+4)^2-(y+8)(y-8)=96$;
г) $3(z+2)^2+(2z-1)^2-7(z+3)(z-3)=28$.

263 Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

а) $-(3a+2)(3a+6)+(3a+4)^2$ при $a=101\frac{11}{15}$;

б) $(b+4)(25b-10)-(9+5b)^2$ при $b=-79{,}415$.

264 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{m+n}{m^2+2mn+n^2}$; б) $\frac{7c-7d}{c^2-2cd+d^2}$; в) $\frac{4x^2+36xy+81y^2}{2x+9y}$; г) $\frac{15pq-9q^2}{-30pq+25p^2+9q^2}$.

265 Докажите тождество:

а) $(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$;
в) $(ks+kt)^2=k^2(s+t)^2$;
б) $(m+n)^2-(m-n)^2=4mn$;
г) $(b-a)^2-(b-a)(b+a)=2a(a-b)$.

266 Представьте выражение в виде A^2+c, где A – двучлен, а c – число.

а) $x^2+8x+10$;
г) $a^2b^2+10ab+7$;
б) $4z^2-12z+11$;
д) $p^2q^4-4pq^2-5$;
в) $9m^2-12m-7$;
е) $25s^6t^4+30s^3t^2-6$.

Образец:
$x^2-4x+1=x^2-4x+4-3=(x-2)^2-3=(x-2)^2+(-3)$.
Ответ: $A=x-2$, $c=-3$.

267 Представьте выражение в виде A^2-B^2, где A и B – некоторые выражения:

а) p^2+10p;
г) $25x^2-y^2+20x+2y+3$;
б) $4q^2-28q+48$;
д) $4z^2-9y^2-12z-18y$;
в) $25n^2-9m^2+40n+16$;
е) $4s^2t^4-9t^6-32s^2t^2+12t^4+64s^2-4t^2$.

268 В многочлен x^2-4x-7 вместо переменной x подставьте данное выражение и запишите результат как многочлен стандартного вида:

а) $a+2$;　б) $2a-1$;　в) $3a+4$.

269 Найдите значение выражения a^2+b^2, если известно, что:

а) $a+b=12$ и $ab=6{,}9$;　б) $a-b=25$ и $ab=4{,}8$.

270 Найдите значение выражения $x^2+\frac{1}{x^2}$, если известно, что:

а) $x+\frac{1}{x}=10{,}5$;　б) $x-\frac{1}{x}=12{,}5$.

271 Какие выражения можно поставить вместо A и B, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $(6d^5+A)^2=B+25c^2$;
в) $(6z+3)^2+(8z-1)^2-(A-B)^2=9$;
б) $(2x-4)^2+(3x+5)^2-A=B^2$;
г) $(3y-4)^2+(4y-7)^2-(A-B)^2=1$.

272 Возведите трехчлен в квадрат:

а) $(a + b - c)^2$; б) $(a - b + c)^2$; в) $(a - b - c)^2$; г) $(-a - b - c)^2$.

273 Выведите формулу для квадрата четырехчлена и, пользуясь ею, запишите данное выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(a + b - c + d)^2$; б) $(a - b + c - d)^2$; в) $(-a + b - c - d)^2$.

274 Докажите тождество:

а) $(x^2 + x)^2 + (x^2 - x)^2 + (x^2 - 1)^2 = 3x^4 + 1$; в) $(pq - 1)^2 + (p + q)^2 = (p^2 + 1)(q^2 + 1)$;

б) $(a + b)^2 - 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2 = 4b^2$; г) $(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

275 Найдите все значения x, при которых:

а) квадрат двучлена $2x + 5$ на 120 больше квадрата двучлена $2x - 7$;

б) квадрат двучлена $5x - 3$ на 72 меньше квадрата двучлена $5x + 6$;

в) квадрат двучлена $x - 1$ в 9 раз меньше квадрата двучлена $3x + 4$;

г) квадрат двучлена $8x - 6$ в 4 раза больше квадрата двучлена $4x - 5$.

276 Докажите истинность высказываний:

а) Если к произведению двух целых чисел, одно из которых на 2 больше другого, прибавить 1, то получится точный квадрат.

б) Если к произведению двух последовательных целых чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

277 Докажите, что данный многочлен при любых значениях входящих в него букв принимает только неотрицательные значения:

а) $a^2 + 7$; б) $c^2 + 6c + 9$; в) $d^2 - 8d + 19$; г) $4n^2 + 9k^2 - 28n - 48k + 113$.

278 Найдите наименьшее значение выражения:

а) $(2a - 1)(2a + 1) + 3c(3c - 4a)$; б) $2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2$.

279 Найдите наибольшее значение выражения:

а) $4(10m - 9) - 16(m - 1)(m + 1)$; б) $-4p^2 - 4pq - 2q^2 - 4q - 7$.

280 Запишите выражение как многочлен стандартного вида и определите его степень:

а) $(x + 1)^2 + 3(x - 1)^2 - 5(x + 1)(x - 1)$; в) $5n^2[(2n + n^2)^2 + (2n^2 - n)^2]$;

б) $4(y + 3z)^2 + 3(4y - z)^2 - 2(y + z)(y - z)$; г) $s(s + t)^2 - t(s - t)^2 + 2t(s^2 + t^2)$.

281 Найдите значение выражения $a^2 + b^2 + c^2$, если известно, что:

$$a + b - c = 5 \text{ и } ab - bc - ac = 3.$$

282 Найдите значение выражения $xz - xy - yz$, если известно, что:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 45 \text{ и } x - y + z = 7.$$

283 Докажите, что из равенства:

1) $p^2 + q^2 + r^2 = pq + pr + qr$ следует, что $p = q = r$;

2) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = (a + b - 2c)^2 + (b + c - 2a)^2 + (c + a - 2b)^2$ следует, что $a = b = c$.

284 Пользуясь формулами квадрата двучлена и трехчлена, возведите в степень:

а) $(a + b)^4$; б) $(a - b)^4$.

Что общего в формулах четвертой степени суммы и разности?

285 Запишите высказывание на математическом языке, определите его истинность. Для ложных высказываний постройте их отрицания.

а) Модули взаимно обратных чисел равны между собой.

б) Число, противоположное числу $(-a)$, может быть меньше a.

в) Квадрат числа всегда больше квадрата противоположного ему числа.

286 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) $-a^7b^7$; в) $0{,}25x^2y^2z^2$; д) $81p^8q^{16}$; ж) $a^6b^4a^2b^4$; и) $-27m^6q^8r^9q^4$;

б) $49m^2n^2$; г) $-\frac{1}{125}p^3q^3r^3$; е) $16x^8y^4z^{12}$; з) $32m^4d^3d^2m$; к) $-m^{12}n^8k^{18}n^7$.

287 Упростите выражения при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{7^5 \cdot x^3 \cdot (y^3)^4 \cdot z^6}{(49)^2 \cdot x^2 \cdot (y^4)^2 \cdot (z^2)^3}$; б) $\dfrac{4^3 \cdot (a^4)^5 \cdot b^8 \cdot c^{15}}{2^4 \cdot a^{12} \cdot a^8 \cdot (b^2)^4 \cdot (c^7)^2}$; в) $\dfrac{r^5 - r^{10} + r^{15}}{r^7 - r^{12} + r^{17}}$.

288 а) На швейной фабрике все мастера работают с одинаковой производительностью. Пять стажеров и два мастера выполняют за 8 часов тот же объем работы, что семь стажеров и пять мастеров за 4 часа. Во сколько раз производительность мастера больше производительности стажера, если производительность всех стажеров одинаковая?

б) Ванна наполняется из двух кранов. Один из них с горячей, а второй с холодной водой. Из горячего крана ванна наполняется за 48 минут, а из холодного – за 30 минут. Сначала открыли кран с горячей водой. Через сколько времени надо открыть кран с холодной водой, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды в ней было в 1,5 раза больше, чем холодной?

в) Для наполнения бассейна сначала включили первый насос, который каждую минуту закачивает в бассейн 40 л 0,1%-го раствора хлорированной воды, а через 45 минут заработал второй насос, закачивающий в минуту 60 л 0,2%-го раствора хлорированной воды. Через сколько времени после открытия второго насоса концентрация хлора в бассейне достигнет 0,15%? (Считать, что объем бассейна позволяет достичь нужной концентрации хлора.)

289 По данным таблиц постройте столбчатые диаграммы:

а) Введено в эксплуатацию общей площади жилых домов и общежитий, в млн. м^2 (по состоянию на конец года):

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Общая площадь, млн. м^2	30,3	31,7	33,8	36,4	41,0	43,6	50,6	61,2	64,1

б) Оборот розничной торговли продовольственными товарами, в млрд. р. (по состоянию на конец года):

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Оборот, млрд. р.	79,5	99,4	129,3	152,8	185,8	222,7	275,0	328,3	432,6

290 Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с числом a по модулю m:

а) $a = 789$, $m = 13$; в) $a = -915$, $m = 7$;
б) $a = 1357$, $m = 11$; г) $a = -2517$, $m = 9$.

291 Миша посмотрел на циферблат своих часов и определил, который сейчас час. Какое время покажут эти часы через 123 456 789 101 112 часов?

292 Возведите двучлен в квадрат:

а) $(-a - b)^2$; б) $(7 + m)^2$; в) $(5 - 4x)^2$; г) $(\frac{1}{4}y - 2z)^2$.

293 Запишите выражение как трехчлен стандартного вида:

а) $(-x^3 + 2)^2$; б) $(y^4 + 3z)^2$; в) $(-4m^4 - 7n^2)^2$; г) $(0{,}3p^3q - 2{,}2pq^3)^2$.

294 Вычислите, используя формулу квадрата суммы или квадрата разности:

а) 69^2; б) 401^2; в) $14{,}9^2$; г) 53^2; д) 297^2.

295 Какие одночлены можно подставить вместо A, B и C, чтобы получившееся равенство стало тождеством?

а) $(7x + A)^2 = B + C + 4y^2$; в) $(3z - A)^2 = B - 42zt + C$;
б) $(A + B)^2 = 81m^2 + C + 49n^2$; г) $(A + B)^2 = 0{,}64p^2 - C + 2{,}25q^2$.

296 Представьте трехчлен как квадрат двучлена:

а) $9x^2 - 18x + 9$; в) $4m^2 - 24mn + 36n^2$; д) $-10mn + 25n^2 + m^2$;
б) $16y^2 + 32y + 16$; г) $49a^2 - 42ab + 9b^2$; е) $81x^6 - 36x^4 + 4x^2$.

297 Подберите A таким образом, чтобы трехчлен можно было записать в виде квадрата двучлена:

а) $a^2 - 4a + A$; б) $64x^2 - A + 16y^2$; в) $A + 9c^2 + 18cd$; г) $-A + 4s^2 + 25t^2$.

298 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(3b - 8)(8 - 3b)$; б) $34xy - (2x + 9y)^2$; в) $-(7 + 2z)^2 - 4(1 - 3z)^2$.

299 Докажите, что при любом целом p указанное выражение делится на a:

а) $(6x + 5)^2 - (6x - 5)^2$, $a = 120$; б) $(7x + 2)^2 + (2x - 7)^2$, $a = 53$.

300 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

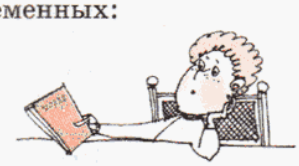
а) $4(a - b)^2$; б) $3(z + 2)^2 - z(z - 3)$; в) $2(3 - 2x)(4x - 5) - 7(x - 8)^2$.

301 Решите уравнение:

а) $(x + 1)^2 - (x - 3)^2 = 8$; в) $2(2n + 1)^2 - 8(n + 1)(n - 1) = 42$;
б) $3(b - 1)^2 - 3b(b - 5) = 30$; г) $5(t + 3)^2 - 5(t - 4)(t + 8) + 12 = 87$.

302 Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

а) $(x + 3)^2 - (x - 2)(x + 8)$, если $x = -91\frac{97}{129}$;
б) $(y - 8)^2 - (y - 20)(y + 4)$, если $y = 9{,}378$.



303 Докажите тождество:

а) $(2a + 2b)^2 + (2a - 2b)^2 = 8(a^2 + b^2)$; б) $(3c + 3d)^2 - (3c - 3d)^2 = 36cd$.

304 Представьте выражение в виде $A^2 + c$, где A – двучлен, а c – число:

а) $9z^2 - 24z + 18$; б) $25x^6y^8 - 20x^3y^4 - 7$.

305 Найдите все значения x, при которых:

а) квадрат двучлена $3x + 2$ на 21 больше квадрата двучлена $3x - 5$;

б) квадрат двучлена $2x - 6$ в 4 раза меньше квадрата двучлена $4x - 8$.

306 Найдите значение выражения $4x^2 + \frac{1}{4x^2}$, если известно, что:

а) $2x + \frac{1}{2x} = 6{,}5$; б) $2x - \frac{1}{2x} = 8{,}5$.

307 Докажите, что данный многочлен при любых значениях входящих в него букв принимает только положительные значения:

а) $(b - 3)^2 + 1$; б) $50 - 14m + m^2$.

308 Запишите выражение как многочлен стандартного вида и определите его степень:

а) $-(2a + 5b)(2a - 5b) - 6(2a - 5b)^2 + 3(5a + 2b)^2$; б) $2pq[(3p + q)^2 - (p + 3q)^2]$.

309 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) $16a^8b^{12}$; б) $0{,}125p^6q^9r^{15}$; в) $64m^{12}n^{18}$; г) $-a^7b^5a^{12}b^{14}$; д) $-32m^{10}n^6k^{15}n^4$.

310 Упростите выражения при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{4^5 \cdot p^7 \cdot (q^5)^6 \cdot r^{18}}{(8p)^3 \cdot p^4 \cdot (q^3)^9 \cdot (r^6)^3}$; б) $\frac{81x^7 - 27x^5}{21x^6 - 7x^4}$.

311 а) В пончиковой компании Антона и Ксюши все пекари работают с одинаковой производительностью. Три пекаря и пять учеников выполняют за 6 дней тот же объем работы, что семь пекарей и четыре ученика за 3 дня. Во сколько раз производительность пекаря больше производительности ученика, если производительность всех учеников также одинаковая?

б) Резервуар для изготовления пончиковой глазури наполняется из двух кранов. Один из них с водой, а второй – с сахарным сиропом. Из крана с водой резервуар наполняется за 40 минут, а из крана с сиропом – за 56 минут. Сначала открыли кран с водой. Через сколько времени надо открыть кран с сиропом, чтобы к моменту наполнения резервуара воды налилось в 2,5 раза больше, чем сахарного сиропа?

312 Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с числом a по модулю m:

а) $a = 597$, $m = 11$; б) $a = -1029$, $m = 15$.

313 Докажите, что A и B имеют одинаковые остатки от деления на 17:

$A = |-1{,}014 : 1{,}3 + 0,6 \cdot (-3{,}5 - 7{,}5) - 0{,}62|$;

$B = 2{,}2 \cdot (-5{,}4) : (-0{,}6) + (-2{,}25 \cdot 0{,}7 \cdot (-7) - 0{,}25 : (-0{,}01)) + |-5 \cdot 0{,}635|$.

C **314*** В классе 30 учеников. Контрольную работу хуже всех написал Петя, сделав 13 ошибок. Больше никто такого количества ошибок не сделал. Докажите, что найдутся хотя бы три ученика, сделавшие одинаковое количество ошибок.

315* Вычислите устно: $\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$.

2. Разность квадратов

Алгебра – мое основное блюдо,
геометрия – десерт.

Франсуа Виет (1540–1603),
французский математик

Среди формул сокращенного умножения есть еще одна замечательная формула, которая получается при умножении разности двух выражений на их сумму.

Умножим друг на друга следующие многочлены:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Мы получили, что произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений. При этом данное равенство будет верно при подстановке в него вместо a и b любых чисел и выражений, то есть оно является тождеством.

Итак, мы приходим к следующей формуле:

Формула произведения разности и суммы двух выражений

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Меняя местами левую и правую части полученного равенства, мы приходим к новой формуле сокращенного умножения, называемой формулой *разности квадратов*.

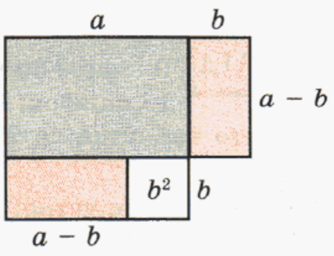
Формула разности квадратов

Разность квадратов двух выражений равна произведению их разности и суммы.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Чтобы выяснить геометрический смысл формулы разности квадратов, рассмотрим квадрат со стороной a и прямоугольник со сторонами $a + b$ и $a - b$, где a и b – произвольные положительные рациональные числа ($a > b$).

Из квадрата со стороной a вырежем квадрат со стороной b.Тогда площадь получившейся фигуры будет равна разности площадей большого и маленького квадратов, то есть $a^2 - b^2$.



Но точно такую же площадь имеет и прямоугольник со сторонами $a + b$ и $a - b$. Значит, с одной стороны, площадь этого прямоугольника равна произведению длин его сторон, то есть $(a - b)(a + b)$. А с другой стороны, она равна $a^2 - b^2$, и, следовательно,

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Итак, у нас теперь есть две похожие по названию формулы:

Формула разности квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Формула квадрата разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Но, как видим, смысл этих формул совершенно разный, поэтому не следует их путать. Точно так же надо различать выражения для квадрата суммы $(a + b)^2$ и суммы квадратов $a^2 + b^2$, ведь, в отличие от квадрата суммы $(a + b)^2$, для суммы квадратов у нас нет формулы.

Формула разности квадратов, как и все другие формулы сокращенного умножения, сильно упрощает преобразование выражений, решение уравнений, проведение вычислений.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Запишите произведение как многочлен стандартного вида:

$$(5m - 4n)(5m + 4n).$$

Решение:

$$(5m - 4n)(5m + 4n) = (5m)^2 - (4n)^2 = 25m^2 - 16n^2.$$

Пример 2. Решите уравнение:

$$0{,}21x^2 - 0{,}81y^2 - (1{,}1x - 0{,}9y)(1{,}1x + 0{,}9y) = 0.$$

Решение:

Упростим левую часть уравнения:

$$0{,}21x^2 - 0{,}81y^2 - (1{,}1x - 0{,}9y)(1{,}1x + 0{,}9y) = 0{,}21x^2 - 0{,}81y^2 - (1{,}21x^2 - 0{,}81y^2) =$$
$$= 0{,}21x^2 - \cancel{0{,}81y^2} - 1{,}21x^2 + \cancel{0{,}81y^2} = -x^2.$$

Получаем уравнение, равносильное данному:

$$-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ответ: $\{0\}$.

Пример 3. Вычислите: а) $899 \cdot 901$; б) $5\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{3}$; в) $91^2 - 9^2$.

Решение:

а) $899 \cdot 901 = (900 - 1)(900 + 1) = 900^2 - 1^2 = 810\,000 - 1 = 809\,999$.

б) $5\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{3} = (5 + \frac{1}{3})(5 - \frac{1}{3}) = 5^2 - (\frac{1}{3})^2 = 25 - \frac{1}{9} = 24\frac{8}{9}$.

в) $91^2 - 9^2 = (91 - 9)(91 + 9) = 82 \cdot 100 = 8200$.

К **316** Представьте, если это возможно, выражение в виде степени с показателем 2:

а) $4m^4n^6$; б) $25x^4y^8z^{12}$; в) $16a^3ba^5b$; г) $\frac{19^2}{z^{10}}$; д) $\frac{100p^{12}q^{16}}{r^4}$; е) $\frac{x^3y^5x^9y^9}{64z^6}$.

317 Прочитайте выражения:

$(A + B)^2$; $(A - B)^2$; $A^2 + B^2$; $A^2 - B^2$.

Соотнесите приведенные ниже записи с одним из этих четырех выражений, указав возможные A и B:

а) $(5x + 3)^2$; г) $(81p^2 - 4q^2)^2$; ж) $49a^{16} - a^8$; к) $-36s^6 + t^8$;

б) $64c^4 + 25d^6$; д) $m^{12} + 25n^{32}$; з) $(36x^2 + y^4)^2$; л) $(-2z - 8)^2$;

в) $4y^2 - 16z^4$; е) $(7k + 4)^2$; и) $r^{16} + 9t^4$; м) $(9a - 7b)^2$.

318 1) Запишите произведение суммы и разности a и b как многочлен стандартного вида.

2) Используя полученное равенство, сформулируйте сначала, как можно найти произведение суммы и разности двух выражений, а затем – как найти разность квадратов двух выражений. Сравните свои формулировки с правилами на стр. 62 учебника.

3) По рисунку, приведенному на стр. 62 учебника, выясните геометрический смысл полученной вами формулы.

319 Пользуясь формулой разности квадратов, докажите, что для любых a и b верно равенство:

а) $(-a-b)(a-b)=b^2-a^2$; б) $(a+b)(b-a)=b^2-a^2$; в) $(-a-b)(b-a)=a^2-b^2$.

320 Вычислите произведение многочленов:

а) $(x+2)(x-2)$; д) $(2a+b)(2a-b)$; и) $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y\right)$;

б) $(y-s)(y+s)$; е) $(x-3y)(x+3y)$; к) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{4}b\right)$;

в) $(5-z)(5+z)$; ж) $(7z+3t)(7z-3t)$; л) $(0{,}2a+0{,}3)(0{,}2a-0{,}3)$;

г) $(t+7)(7-t)$; з) $(9m+3n)(-9m+3n)$; м) $(1{,}5z+3{,}5)(3{,}5-1{,}5z)$.

321 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(a^2+9)(a^2-9)$; ж) $(-4m^2-6n)(6n-4m^2)$;

б) $(z^2+25)(25-z^2)$; з) $(7p^2+3y^3)(3y^3-7p^2)$;

в) $(0{,}3+x^2)(x^2-0{,}3)$; и) $(0{,}2t^3-0{,}5s^4)(0{,}5s^4+0{,}2t^3)$;

г) $(-9p^2-4q^2)(4q^2-9p^2)$; к) $(1{,}1mn+2{,}1k^2)(1{,}1mn-2{,}1k^2)$;

д) $(3xy+1)(3xy-1)$; л) $(1{,}3a^2b-0{,}9b^2a)(-0{,}9b^2a-1{,}3a^2b)$;

е) $(5a^2-3b)(5a^2+3b)$; м) $(-0{,}8d^5-0{,}7d^2c^3)(-0{,}8d^5+0{,}7d^2c^3)$.

322 Вычислите, используя формулу разности квадратов:

а) $31\cdot 29$; в) $72\cdot 68$; д) $5{,}01\cdot 4{,}99$; ж) $5\frac{1}{7}\cdot 4\frac{6}{7}$; и) 86^2-14^2;

б) $199\cdot 201$; г) $4{,}1\cdot 3{,}9$; е) $15{,}2\cdot 14{,}8$; з) $10\frac{1}{20}\cdot 9\frac{19}{20}$; к) 328^2-172^2.

323 Какой одночлен можно подставить вместо A, чтобы получившееся равенство стало тождеством?

а) $(4x+A)(4x-A)=16x^2-81y^2$; г) $(-5m+2A)(5m+2A)=0{,}36n^2-25m^2$;

б) $(A-3b)(A+3b)=0{,}25a^2-9b^2$; д) $(-3A-4q)(3A-4q)=16q^2-36r^8$;

в) $(-A-7c)(A-7c)=49c^2-64d^6$; е) $(1{,}5x+5A)(-5A+1{,}5x)=2{,}25x^2-100y^4$.

324 Запишите выражение как многочлен стандартного вида, используя формулы сокращенного умножения:

а) $(a+b)(b-a)$; в) $(-c+d)(c-d)$; д) $(-m-n)(n-m)$;

б) $(-x-y)(x+y)$; г) $(z-t)(t-z)$; е) $(-k-r)(-k-r)$.

325 Выполните умножение многочленов:

а) $7(a + 4)(a - 4)$; д) $8c^3(c - 5)(c + 5)$; и) $(-10t^2 + 1)(10t^2 + 1)(100t^4 + 1)$;

б) $x(x - 7)(x + 7)$; е) $-5d^4(-d - 6)(d - 6)$; к) $2(s^2 + 1)(s^2 - 1)(s^4 + 1)$;

в) $4b(b + 3)(3 - b)$; ж) $(z + 2)(z - 2)(z^2 + 4)$; л) $p^2(p^2 + 1)(p - 1)(p + 1)$;

г) $3y^2(-y - 2)(2 - y)$; з) $(-t + 3)(-t - 3)(t^2 + 9)$; м) $3q^3(q^2 + 4)(q^2 - 4)(q^4 + 16)$.

326 Представьте многочлен в виде произведения суммы и разности двух выражений:

а) $x^2 - 81$; д) $4a^2 - 0{,}01$; и) $9m^2 - 4n^2$; н) $a^2b^2 - b^4$;

б) $16 - y^2$; е) $\frac{4}{25} - 25q^2$; к) $100k^2 - 0{,}04r^2$; о) $81x^2z^4 - 36z^2$;

в) $a^2 - d^2$; ж) $16 - 64b^2$; л) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{25}y^2$; п) $a^2b^2c^2 - 256d^2$;

г) $-p^2 + q^2$; з) $0{,}36z^2 - 1{,}21$; м) $-1{,}44p^2 + 1{,}21q^2$; р) $-625 + r^{10}$.

327 Решите уравнение:

а) $(a + 7)(a - 7) = 0$; г) $4b^2 - 100 = 0$; ж) $x^2 = 0{,}25$;

б) $x^2 - 9 = 0$; д) $-9c^2 + 144 = 0$; з) $4z^2 = 9$;

в) $25 - y^2 = 0$; е) $256 - 16d^2 = 0$; и) $100m^2 = 1$.

328 Представьте выражение как произведение двух многочленов:

а) $(a + 5)^2 - 1$; г) $(4b - 3)^2 - 9$; ж) $25(c + 7)^2 - c^2$;

б) $(x - 6)^2 - 16$; д) $(7y + 9)^2 - 81$; з) $z^2(z - 11)^2 - 4z^4$;

в) $49 - (m - 3)^2$; е) $2{,}25 - (n + 0{,}4)^2$; и) $49p^4 - (p - 11)^2$.

329 Докажите, что:

а) квадрат любого целого числа на единицу больше произведения предыдущего и следующего чисел;

б) разность квадратов двух последовательных целых чисел есть число нечетное;

в) разность квадратов двух последовательных целых чисел равна сумме этих чисел;

г) разность квадратов двух последовательных четных чисел равна удвоенной сумме этих чисел.

330 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(n + 2)(n - 2)^2$; д) $(x - 3)^2(x + 3)^2$; и) $(a - 2)^2(a + 2)^2(a^2 + 4)^2$;

б) $(4 + 2m)(2m - 4)^2$; е) $(2 - y)^2(y + 2)^2$; к) $(1 - b)^2(b + 1)^2(-b^2 - 1)^2$;

в) $(x + y)(x - y)^2$; ж) $(a - b)^2(a + b)^2$; л) $(p - q)^2(p + q)^2(p^2 + q^2)^2$;

г) $(-c - d)(d - c)^2$; з) $(-r - s)^2(s - r)^2$; м) $(-m + n)^2(-m - n)^2(m^2 + n^2)^2$.

331 Упростите выражение:

а) $4a^2 + (a - 2)(a + 2)$; д) $(p + 3)(p - 3) - (p - 5)(p + 5)$;

б) $18 - (y + 5)(y - 5)$; е) $(-2q - 1)(2q - 1) - (3q + 2)(2 - 3q)$;

в) $(3c - 2b)(3c + 2b) - 10c^2$; ж) $2m(m + 5)(m - 5) - 3m(m - 4)(m + 4)$;

г) $5k^2 - 4s^4 - (2k - 4s^2)(4s^2 + 2k)$; з) $n^2(-2n - 3)(3 - 2n) - 2n^2(n - 2)(2 + n)$.

332 Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

а) $(a-1)(a^2+1)(a+1)-(a^2-1)^2$, если $a=7{,}5$;

б) $(b^2-3)^2+(b-2)(4+b^2)(-b-2)$, если $b=-9{,}5$;

в) $(c^2+2)^2-(c-1)(1+c^2)(c+1)$, если $c=-6{,}5$;

г) $2m(m+n)(m-n)+n(m-n)^2-2mn(2m-3n)-n^2(n-m)-2m^3$, если $m=5{,}3$; $n=0{,}3$.

333 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{3m+3n}{m^2-n^2}$; в) $\dfrac{4x^2-9y^2}{2x+3y}$; д) $\dfrac{4a^2-25b^2}{4a^2+20ab+25b^2}$;

б) $\dfrac{8c-8d}{c^2-d^2}$; г) $\dfrac{5pq-20q^2}{p^2-16q^2}$; е) $\dfrac{9m^2-24mn+16n^2}{9m^2-16n^2}$.

334 Докажите тождество:

а) $(1+a)(1+a^2)(1-a)=1-a^4$;

б) $4b^2-(2b+1)(2b-1)=1$;

в) $2(2n^2-1)-4(n+3)(n-3)=34$;

г) $3(4m^2-50)-12(m-4)(m+4)=42$.

335 Докажите, что при любом целом p значение выражения делится на a:

а) $(p+9)^2-p^2$, $a=9$;

б) $4p^2-(2p-5)^2$, $a=5$;

в) $(3p-1)^2-16$, $a=3$;

г) $49-(8p+1)^2$, $a=16$;

д) $(7p+9)^2-81$, $a=7$;

е) p^3-p, $a=6$.

336 Решите уравнение:

а) $x(x+2)-(x+3)(x-3)=15$;

б) $4y(y-1)-(2y+5)(2y-5)=1$;

в) $3z-5(z+1)(z-1)+5(z+2)(z-2)=6$;

г) $3(2r+1)(2r-1)-4(3r-2)(3r+2)+6r(4r+1)=25$;

д) $(b+6)^2-1=0$;

е) $64-(k-7)^2=0$;

ж) $4(2c+3)^2-36=0$;

з) $81-9(2d-8)^2=0$.

337 Вычислите рациональным способом:

а) $1004\cdot 996-1005\cdot 995$;

б) $303\cdot 297-301\cdot 299$;

в) $302^2-68^2+370\cdot 66$;

г) $415^2-85^2-500\cdot 30$;

д) $\dfrac{124^2-12^2}{239^2-1}$;

е) $\dfrac{106^2-121}{122^2-64}$;

ж) $\dfrac{87^2-15^2}{97^2-56^2+153\cdot 31}$;

з) $\dfrac{59^2-38^2}{83^2-17^2+3100}$.

338 Найдите (устно) значение выражения a^2-b^2, если известно, что:

а) $a+b=12$ и $a=b+5$; б) $a=15-b$ и $b=a-10$.

339 а) Разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 11. Найдите эти числа.

б) Разность квадратов двух последовательных четных чисел равна 28. Найдите эти числа.

в) Сумма длин сторон двух квадратов равна 20 см, а разность их площадей равна 40 см^2. Чему равны длины сторон этих квадратов?

г) Каждую сторону квадрата увеличили на 3 см. При этом его площадь увеличилась на 51 см^2. Найдите длину стороны исходного квадрата.

340 Вычислите произведение, используя формулу разности квадратов:

а) $(a + b + c)(a - b - c)$; б) $(a - b + c)(a - b - c)$; в) $(a + b + c)(a + b - c)$.

341 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(a + b + c + d)\,(a + b - c - d)$; б) $(a - b + c - d)\,(a - b - c + d)$.

342 Найдите значение выражения:

а) $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) - 2^{16}$; в) $4(5 + 1)(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1)(5^{16} + 1) - 5^{32}$;

б) $3^8 - (3 + 2)(3^2 + 4)(3^4 + 16)$; г) $\frac{10^{32}}{9} - 11(10^2 + 1)(10^4 + 1)(10^8 + 1)(10^{16} + 1)$.

343 Сравните значения выражений:

а) $45^2 - 31^2$ и $44^2 - 30^2$; в) 23^4 и $18 \cdot 21 \cdot 25 \cdot 28$;

б) $297 \cdot 299$ и 298^2; г) 19^4 и $16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22$.

344 Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

а) $35^2 - 11^2$ и $48^2 - 4$; в) $63^2 - 27^2$ и $78^2 - 30^2$;

б) $49^2 - 15^2$ и $54^2 - 37^2$; г) $54^2 - 44^2$ и $31^2 - 18^2$.

345 Найдите наибольшее значение выражения:

а) $(1 - 2x)(1 + 2x)$; б) $(1 - 2z)(1 + 2z) + (-5 - 3y)(3y - 5) - 3$.

346 Найдите наименьшее значение выражения:

а) $(3a - 2)(3a + 2)$; б) $11 + (4b - 7)(4b + 7) - (-9c - 8)(9c - 8)$.

347 Может ли, и если да, то в каких случаях:

а) разность квадратов двух натуральных чисел быть простым числом?

б) разность квадратов двух рациональных чисел быть больше суммы квадратов этих чисел?

П **348** Сформулируйте высказывания, обратные данным, и определите истинность прямых и обратных высказываний. Для ложных высказываний постройте их отрицания и установите истинность отрицаний:

а) Если целые числа делятся на некоторое, отличное от нуля, число c, то и сумма этих чисел делится на c.

б) Если целое число a делится на некоторое, отличное от нуля, число c, то произведение a и любого другого целого числа делится на c.

в) Если целое число делится на 4, то оно делится на 8.

г) Если целое число делится на 25, то оно делится и на 5.

д) Если целое число кратно 21, то оно кратно 3 и 7.

е) Если целое число кратно 54, то оно кратно 6 и 9.

349 Упростите выражение:

а) $13 + ((3(a - 2) + 4a) - 7a) - (7a - (3a - 5)) + 6a - 7$;

б) $3x - (3y - (-5 + 4z)) - (x - 2(x + 3y) - 5z) + (-4x + y - 9z)$;

в) $-((3m - 2n) - 4m - 3) - (5 - (6m - 8n) - (3m + 4n)) - 7 - 5m + 2n$;

г) $2p - (2q - (2r - 4s)) - (4p - (3q - (2r - 4s))) + (p - 3q - (3p - 2q))$.

350 Сравните числа:

а) $\frac{33}{37}$ и $\frac{165}{184}$; в) $\frac{1999}{2000}$ и $\frac{2000}{2001}$; д) $\frac{107}{360}$ и $\frac{162}{415}$; ж) $\frac{39}{73}$ и $\frac{391}{731}$;

б) $\frac{14}{21}$ и $\frac{83}{126}$; г) $\frac{2008}{2009}$ и $\frac{2009}{2010}$; е) $\frac{215}{512}$ и $\frac{357}{654}$; з) $\frac{23}{47}$ и $\frac{232}{472}$.

351 Изобразите на координатной прямой Ox множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x \geqslant -6$; в) $x + 2 > 3$; д) $-2 \leqslant x + 5 < 4$; ж) $|x + 4| > 2$;

б) $x < 7$; г) $x - 3 \leqslant -5$; е) $-3 \leqslant x - 3 \leqslant 3$; з) $|x - 2| \leqslant 3$.

352 а) В соревнованиях по легкой атлетике $\frac{1}{9}$ часть всех участников заняли первое место. Второе место заняли $\frac{1}{6}$ часть всех участников, а третье – $\frac{1}{4}$ часть. Сколько человек участвовало в этих соревнованиях, если без призов остались 34 участника?

б) Стоимость производственного оборудования после 10 лет работы равна 200 тыс. р., что составляет $\frac{5}{21}$ его первоначальной стоимости. Чему была равна первоначальная стоимость данного оборудования?

в) Получив зарплату за февраль, Иван $\frac{1}{45}$ ее часть внес в качестве взноса в профсоюзную организацию, $\frac{4}{27}$ зарплаты пошло на погашение кредита за автомобиль, а $\frac{2}{15}$ он потратил на покупку продуктов и подарков своей жене и детям. В результате у него осталось 18 800 р. Какую зарплату получил Иван за февраль?

353 Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 72, в записи которого по одному разу участвуют все 10 цифр.

Д **354** Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(5a + 3)(5a - 3)$; в) $(0{,}8 + y^2)(y^2 - 0{,}8)$; д) $(2p^3 + 9y^2)(9y^2 - 2p^3)$;

б) $(3z - 2r)(3z + 2r)$; г) $(-2m^4 - 7n)(7n - 2m^4)$; е) $(0{,}3t^3 - 0{,}7s^5)(0{,}7s^5 + 0{,}3t^3)$.

355 Вычислите, используя формулу разности квадратов:

а) $21 \cdot 19$; б) $52 \cdot 48$; в) $11{,}1 \cdot 10{,}9$; г) $115^2 - 85^2$; д) $9\frac{1}{15} \cdot 8\frac{14}{15}$.

356 Какой одночлен можно подставить вместо A, чтобы получившееся равенство стало тождеством?

а) $(2a + A)(2a - A) = 4a^2 - 49b^2$; в) $(-3p + 4A)(3p + 4A) = 64q^2 - 9p^2$;

б) $(A - 5c)(A + 5c) = 0{,}64d^2 - 25c^2$; г) $(-6A - 9s)(6A - 9s) = 81s^2 - 144r^4$.

357 Выполните умножение многочленов:

а) $3(x + 2)(x - 2)$; в) $z^2(z - 7)(z + 7)$; д) $(-3t^2 + 2)(3t^2 + 2)(9t^4 + 4)$;

б) $2y(y - 4)(y + 4)$; г) $-5a^3(-a - 3)(a - 3)$; е) $4(2r^2 + 1)(2r^2 - 1)(4r^4 + 1)$.

358 Представьте многочлен в виде произведения суммы и разности двух выражений:

а) $a^2 - 25$; в) $25x^2 - 0{,}04$; д) $16d^2 - 81z^2$; ж) $4p^2q^2 - 9q^4$;

б) $-b^2 + c^2$; г) $0{,}49y^2 - 1{,}44$; е) $-2{,}25m^2 + 1{,}69n^2$; з) $-400 + r^{12}$.

359 Решите уравнение:

а) $x^2 - 16 = 0$; в) $-4z^2 + 64 = 0$; д) $49z^2 = 1$;

б) $100 - y^2 = 0$; г) $625 - 25a^2 = 0$; е) $81m^2 = 9$.

360 Представьте выражение в виде произведения двух многочленов:

а) $(x - 3)^2 - 4$; б) $(2y - 5)^2 - 16$; в) $9(z + 11)^2 - z^2$.

361 Упростите выражение:

а) $5a^2 - (2a - 3)(2a + 3)$; в) $(d + 5)(d - 5) - (d - 7)(d + 7)$;

б) $10b^2 - 5c^6 - (3b + 2c^3)(3b - 2c^3)$; г) $2p(-3p - 4)(4 - 3p) - 4p(2p - 4)(4 + 2p)$.

362 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{5a + 5b}{b^2 - a^2}$; б) $\dfrac{25c^2 - 16d^2}{5c + 4d}$; в) $\dfrac{9x^2 - 64y^2}{9x^2 + 48xy + 64y^2}$.

363 Докажите тождество:

а) $81z^2 - (9z + 2)(9z - 2) = 4$; б) $5(12p^2 - 15) - 15(2p - 3)(2p + 3) = 60$.

364 Докажите, что при любом целом p значение выражения делится на a:

а) $25q^2 - (3q - 4)^2$, $a = 8$; б) $(6r + 11)^2 - 64$, $a = 3$.

365 Сравните значения выражений:

а) $78^2 - 26^2$ и $93^2 - 41^2$; б) 16^4 и $10 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 22$.

366 Найдите наибольшее значение выражения:

а) $(5 - 7r)(5 + 7r)$; б) $(2 - 3p)(2 + 3p) - (-7 - 4q)(-4q + 7) + 9$.

367 Найдите наименьшее значение выражения:

а) $(6m - 10)(6m + 10)$; б) $7 + (2k - 9)(2k + 9) - (-4n - 0{,}5)(4n - 0{,}5)$.

368 а) Проведенная оценочной компанией переоценка старого оборудования пончиковой компании Антона и Ксюши показала, что текущая стоимость оборудования равна 511 тыс. р., что составляет $\dfrac{7}{11}$ его первоначальной стоимости. Сколько денег Антон с Ксюшей потратили на покупку этого оборудования?

б) Совет директоров пончиковой компании Антона и Ксюши принял решение о распределении прибыли в 2010 году. На развитие компании было решено потратить $\dfrac{9}{16}$ всей прибыли, $\dfrac{3}{20}$ решили потратить на выплаты премий сотрудникам компании, а $\dfrac{7}{40}$ – перечислить в качестве благотворительного взноса в детскую больницу. Оставшиеся 72 тыс. р. решили выплатить учредителям компании Антону и Ксюше в качестве дивидендов за 2010 год. Какую прибыль получила пончиковая компания в 2010 году?

369 Упростите выражение:

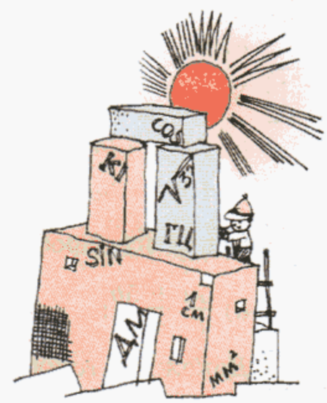
а) $(5x - 8{,}5y) - (2x - 6y) - (6x + 2{,}5y)$; б) $12y - (4x + (16y - 7x)) - (-11x - 28 - 4y)$.

370 Изобразите на координатной прямой Ox множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x \geqslant -3$; б) $x - 4 < 5$; в) $-3 \leqslant x + 6 < 7$; г) $|x - 2| < 8$.

371 Докажите, что разность квадратов A и B равна 84:

$$A = \frac{\left(15\frac{1}{4} - 14\frac{5}{27} - \frac{5}{6}\right) \cdot 230\frac{1}{25} + 46\frac{3}{4}}{10}; \qquad B = \frac{\frac{3}{7} + 4\frac{1}{3}}{10\frac{1}{3} - 9\frac{1}{7}}.$$



С **372*** Два альпиниста поднимаются на две одинаковые горы, а затем, не отдыхая, спускаются с них. Первый поднимается вверх со скоростью в два раза меньшей, чем второй. При этом второй спускается вниз со скоростью в три раза меньшей, чем первый. На восхождение и последующий спуск оба альпиниста затратили одинаковое время. Во сколько раз меньше времени требуется второму альпинисту, чтобы подняться вверх, чем спустится вниз?

373* Пять различных чисел таковы, что сумма трех наименьших равна 10, трех наибольших – 23, а сумма наименьшего, наибольшего и среднего равна 18. Чему равна сумма трех средних по величине чисел?

3. Куб суммы и разности

Существует достаточно света для тех, кто хочет видеть, и достаточно мрака для тех, кто не хочет.

Блез Паскаль (1623–1662),
французский математик, физик, философ

Получив в предыдущих пунктах формулы для квадрата суммы и разности, у нас естественно возникает вопрос, а можно ли проще, чем прямым умножением, возвести двучлен в куб, четвертую и более высокие степени.

Оказывается, такие формулы есть, и они позволяют возводить двучлен в произвольную натуральную степень, не проводя прямых вычислений.

Для начала разберемся с кубом суммы и разности. Обозначим буквами a и b соответственно первый и второй члены двучлена. Тогда

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Таким образом, мы приходим к следующей формуле сокращенного умножения:

Формула куба суммы

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения, плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе, плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго, плюс куб второго выражения.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Заменяя в полученной формуле b на $(-b)$, приходим к новой формуле сокращенного умножения, которую называют формулой куба разности двух выражений:

$$(a - b)^3 = (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Формула куба разности

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения, минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе, плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго, минус куб второго выражения.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Так как полученные равенства верны при подстановке вместо a и b любых чисел и выражений, то они являются тождествами.

Заметим, что в формулах куба суммы и разности члены итогового многочлена принято записывать в специальном порядке. Сначала записывают одночлен a^3, который также может быть записан как a^3b^0. В следующем одночлене степень a уменьшается на 1, а степень b увеличивается на 1. Остальные члены одночлена записываются в том же порядке, и так до одночлена $a^0b^3 = b^3$.

Можно заметить также, что в формуле куба разности при указанной записи итогового многочлена знаки его членов чередуются: сначала «плюс», затем «минус» и так далее. Это происходит потому, что степень одночлена b сначала равна нулю – четная, затем на 1 больше, то есть нечетная, и так далее.

Формулы куба суммы и разности позволяют быстро вычислять кубы разных чисел и выражений, не производя каждый раз почленное умножение двучленов и приведение подобных слагаемых. Рассмотрим примеры.

Пример 1.

Возведите в куб двучлены: 1) $(x^2 + 2y)^3$; 2) $(x^2 - 2y)^3$.

Решение:

1) $(x^2 + 2y)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2 \cdot (2y) + 3x^2 \cdot (2y)^2 + (2y)^3 = x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3$;

2) $(x^2 - 2y)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2 \cdot (2y) + 3x^2 \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = x^6 - 6x^4y + 12x^2y^2 - 8y^3$.

Пример 2.

Вычислите: а) 11^3; б) $3{,}9^3$; в) $\left(4\frac{7}{19}\right)^3 + 3 \cdot \left(4\frac{7}{19}\right)^2 \cdot \left(\frac{12}{19}\right) + 3 \cdot \left(4\frac{7}{19}\right) \cdot \left(\frac{12}{19}\right)^2 + \left(\frac{12}{19}\right)^3$.

Решение:

а) $11^3 = (10 + 1)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 1 + 3 \cdot 10 \cdot 1^2 + 1^3 = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331$;

б) $3{,}9^3 = (4 - 0{,}1)^3 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 4 \cdot 0{,}1^2 - 0{,}1^3 = 64 - 4{,}8 + 0{,}12 - 0{,}001 = 59{,}319$;

в) $\left(4\frac{7}{19}\right)^3 + 3 \cdot \left(4\frac{7}{19}\right)^2 \cdot \left(\frac{12}{19}\right) + 3 \cdot \left(4\frac{7}{19}\right) \cdot \left(\frac{12}{19}\right)^2 + \left(\frac{12}{19}\right)^3 = \left(4\frac{7}{19} + \frac{12}{19}\right)^3 = 5^3 = 125.$

☺☺☺ А как возводить двучлен в четвертую, пятую, шестую и более высокие степени?

Оказывается, существует достаточно простое правило, которое позволяет делать это почти моментально. Это правило обобщает те закономерности, которые мы наблюдали при возведении двучлена в квадрат и в куб.

Так, мы видели, что при возведении двучлена $a + b$ в квадрат получаются слагаемые с буквенной частью:

$$a^2b^0,\ a^1b^1,\ a^0b^2,$$

при возведении в куб – слагаемые с буквенной частью:

$$a^3b^0,\ a^2b^1,\ a^1b^2,\ a^0b^3.$$

Продолжая эту закономерность, можно доказать, что при возведении двучлена $a + b$ в любую натуральную степень n итоговый многочлен будет состоять только из одночленов, подобных следующим:

$$a^nb^0,\ a^{n-1}b^1,\ a^{n-2}b^2,\ \dots\ ,\ a^2b^{n-2},\ a^1b^{n-1},\ a^0b^n.$$

Мы видим, что одночлены записаны в таком порядке, что у каждого следующего одночлена показатель степени с основанием a последовательно уменьшается от n до 0, а показатель степени с основанием b, наоборот, увеличивается от 0 до n. Именно в таком порядке и договорились записывать члены многочлена, являющегося результатом возведения двучлена в некоторую натуральную степень.

Например, при возведении двучлена $a + b$ в шестую степень получится выражение вида:

$$(a + b)^6 = \dots a^6 + \dots a^5b + \dots a^4b^2 + \dots a^3b^3 + \dots a^2b^4 + \dots ab^5 + \dots b^6,$$

где вместо пропусков стоят некоторые числа. Таким образом, проблема возведения двучлена в шестую степень (как и в любую другую n-ю степень, $n \in N_0$) сводится к проблеме нахождения коэффициентов всех членов итогового многочлена.

Эта проблема была решена еще в 17 веке. Французский математик Блез Паскаль в своем «Трактате об арифметическом треугольнике» (1655 г.) установил способ, который позволяет достаточно легко найти требуемые коэффициенты при возведении двучлена в любую n-ю степень ($n \in N_0$).

Для того чтобы определить эти коэффициенты, поставим в вершине и вдоль боковых сторон некоторого равнобедренного треугольника число 1. В каждой строке этого треугольника, начиная с третьей, между единицами находятся числа, равные сумме двух расположенных над ним чисел. При этом строк у этого треугольника может быть сколь угодно много.

$(a + b)^0$ 1

$(a + b)^1$ 1 1

$(a + b)^2$ 1 2 1

$(a + b)^3$ 1 3 3 1

$(a + b)^4$ 1 4 6 4 1

$(a + b)^5$ 1 5 10 10 5 1

$(a + b)^6$ 1 6 15 20 15 6 1

…

Построенный таким образом треугольник называется ***треугольником Паскаля***. В нем в каждой $(n + 1)$-й строке стоят коэффициенты многочлена, полученного при возведении двучлена в степень n, $n \in N_0$. При этом коэффициенты членов многочлена идут в том порядке, в котором договорились записывать члены итогового многочлена. Значит,

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

А при возведении в n-ю степень разности двух выражений знаки «+» и «−» будут чередоваться, начиная с «+», как мы это наблюдали ранее для 2-й и 3-й степени. Так,

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

У нас пока недостаточно знаний, чтобы строго доказать истинность данного способа нахождения коэффициентов, но мы можем проанализировать, как получаются коэффициенты, например, при возведении двучлена в четвертую степень. А это, в свою очередь, поможет нам понять логику получения коэффициентов в треугольнике Паскаля:

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= (a + b)(a + b)^3 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = \\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + \\ &\quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

Итак, мы можем записать следующий алгоритм возведения двучлена в любую натуральную степень.

Алгоритм возведения двучлена в n-ю степень, $n \in N_0$

1. Выписать в установленном порядке все одночлены, которым подобны члены итогового многочлена.
2. Записать треугольник Паскаля до $(n + 1)$-й строки.
3. Записать последовательно в качестве коэффициентов выписанных одночленов числа из $(n + 1)$-й строки треугольника Паскаля.
4. При возведении в степень суммы $(a + b)^n$ поставить перед всеми одночленами знак «плюс».
5. При возведении в степень разности $(a - b)^n$ поставить перед первым одночленом знак «плюс», перед вторым – знак «минус» и далее чередовать знаки «плюс», «минус» до последнего одночлена.

374 Запишите выражение:

а) куб суммы x и y;
б) сумма кубов x и y;
в) разность кубов z и r;
г) куб разности z и r.

375 Докажите, что $(-m)^3 = -m^3$. Используя данное свойство, докажите, что

$$(-x - y)^3 = -(x + y)^3, \qquad (x - y)^3 = -(y - x)^3.$$

376 1) Запишите произведение двучленов как многочлен стандартного вида:

а) $(a - 1)^2(a - 1)$;
б) $(5b - 2)^2(5b - 2)$;
в) $(1 + 2a)^2(1 + 2a)$;
г) $(b + 3)^2(b + 3)$.

2) Как можно иначе назвать эти произведения? Какую закономерность в итоговых многочленах вы замечаете?

377 1) Запишите куб суммы a и b как многочлен стандартного вида. Используя полученную формулу куба суммы, выведите формулу куба разности a и b.

2) Сформулируйте правила возведения в куб суммы и разности двух выражений и сравните свои формулировки с правилами на стр. 71 учебника.

378 Возведите двучлены в куб:

а) $(m + n)^3$; д) $(-a - 3)^3$; и) $(2m - 1)^3$; н) $(-3y - \frac{2}{3}x)^3$;

б) $(-p - q)^3$; е) $(1 + s)^3$; к) $(5 - 2n)^3$; о) $(c - 3d)^3$;

в) $(c - d)^3$; ж) $(4 - b)^3$; л) $(-3p - 1)^3$; п) $(4m + \frac{n}{3})^3$;

г) $(-r + t)^3$; з) $(x - 2)^3$; м) $(2 + 4q)^3$; р) $(-3b + 2a)^3$.

379 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(x^2 - 1)^3$; д) $(p^3 + 2q)^3$; и) $(m^2 - n^2)^3$; н) $(-2yz - 5y^2)^3$;

б) $(-y^3 + 4)^3$; е) $(r^4 - 5s)^3$; к) $(-2x^2 - 3y^3)^3$; о) $(\frac{1}{4}a^2b - 8ab^2)^3$;

в) $(2 - m^5)^3$; ж) $(3a - b^2)^3$; л) $(-6m^2 + 10n^4)^3$; п) $(mn^3 + 4n^4)^3$;

г) $(-n^4 - 3)^3$; з) $(-4c - d^5)^3$; м) $(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}t^3)^3$; р) $(-3cd^3 + 5cd^2)^3$.

380 В формулы $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ и $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ подставьте $b = a$, $b = 2a$, $b = 3a$ и убедитесь в истинности полученных равенств.

381 Вычислите, используя формулу куба суммы или куба разности:

а) 19^3; б) 31^3; в) 99^3; г) 101^3; д) $4{,}9^3$; е) $1{,}1^3$.

382 Вычислите устно:

а) $\left(2\frac{3}{11}\right)^3 + 3 \cdot \left(2\frac{3}{11}\right)^2 \cdot \left(4\frac{8}{11}\right) + 3 \cdot \left(2\frac{3}{11}\right) \cdot \left(4\frac{8}{11}\right)^2 + \left(4\frac{8}{11}\right)^3$;

б) $\left(6\frac{4}{35}\right)^3 - 3 \cdot \left(6\frac{4}{35}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{35}\right) - 3 \cdot \left(6\frac{4}{35}\right) \cdot \left(\frac{4}{35}\right)^2 - \left(\frac{4}{35}\right)^3$.

383 Представьте многочлен как куб двучлена:

а) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; в) $125p^3 + 75p^2q + 15pq^2 + q^3$;

б) $b^3 - 3b^2 + 3b - 1$; г) $24ab^2 + 8a^3 - 8b^3 - 24ba^2$.

384 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(a + 3)(-a - 3)^2$; г) $(x + 4y)^3 - 12x^2y - 48xy^2$;

б) $(2b - 7)^2(7 - 2b)$; д) $-(2 + p)^2 - 2(1 - p)^3$;

в) $(-2p^2 - 3q)(2p^2 + 3q)^2$; е) $8(1 - c)^3 + (c - 5)^3$.

385 Какие одночлены можно подставить вместо A, B, C и D, чтобы получившееся равенство стало тождеством?

а) $(2m + A)^3 = B + C + D + 8n^3$; г) $(4p - A)^3 = B + C + 108pq^2 + D$;

б) $(A + 3y)^3 = 125x^3 + B + C + D$; д) $(A - rs)^3 = B + 21r^2s^2t^2 + C + D$;

в) $(A + B)^3 = 27z^3 + C + D + 8v^3$; е) $(A + B)^3 = 125x^3 - 150x^2y + C + D$.

386 Докажите, что при любом целом x указанное выражение делится на a:

а) $(2x + 1)^3 + (2x - 1)^3$, $a = 4$; в) $(3x + 5)^3 + (x - 1)^3$, $a = 4$;

б) $(5x + 1)^3 - (7 - x)^3$, $a = 6$; г) $(x + 4)^2 - (3x + 2)^2$, $a = 2$.

387 Какое выражение надо прибавить к $(a - b)^3$, чтобы получить $(a + b)^3$?

388 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $2(a + 3)^3$;
б) $4(c - b)^3$;
в) $3(-2p - q)^3$;
г) $-5(m + 2n)^3$;
д) $z^2(9 - z) - (3 - z)^3$;
е) $4(x + 4)^3 - 4x^2(x + 12)$;
ж) $(a + b)^3 - (b + c)^3 + (c - a)^3$;
з) $2p(p + 2q)^3 - 3q(2p + q)^3$.

389 Решите уравнение:

а) $a^3 - (a - 3)^3 = 54 + 9a^2$;
б) $(b + 2)^3 - b(b + 3)(b - 3) - 6b^2 = 113$;
в) $27c^2(c - 1) - (3c - 1)^3 = 19$;
г) $3(d + 2)^3 + (2d - 1)^3 - d^2(11d + 6) = 2$.

390 Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

а) $8a^3 - 24a^2 + 24a - 8$, если $a = 11$;
б) $27b^3 + 135b^2a + 225ba^2 + 125a^3$, если $b = -1{,}5$; $a = 2{,}5$.

391 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{x + y}{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$;
б) $\dfrac{5z - 5t}{z^3 - 3z^2t + 3zt^2 - t^3}$;
в) $\dfrac{8a^3 + 12a^2 + 6a + 1}{4a^2 + 4a + 1}$;
г) $\dfrac{9p^2 - 12pq^2 + 4q^4}{-54p^2q^2 + 27p^2 + 36pq^4 - 8q^6}$.

392 Докажите тождество:

а) $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$;
б) $p^3 - q^3 - 3pq(p - q) = (p - q)^3$;
в) $(kx + ky)^3 = k^3(x + y)^3$;
г) $(c - 3d)^3 - (2c - 3d)(3cd + (c - 3d)^2) = -c^3$.

393 В многочлен $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ вместо переменной x подставьте данное выражение и запишите полученное выражение как многочлен стандартного вида:

а) $y + 5$;
б) $2y - 1$;
в) $3y + 4$.

394 а) Найдите значение выражения $a^3 + b^3$, если известно, что $a + b = -6$ и $ab = 3{,}5$.

б) Найдите значение выражения $a^3 - b^3$, если известно, что $a - b = 5$ и $ab = -4{,}6$.

395 Докажите тождество:

а) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(x + z)(y + z)$;
б) $(a + b)^3 = a(a - 3b)^2 + b(b - 3a)^2$;
в) $(m^2 + n^2)^3 - 3m^2n^2(m + n)^2 + 8m^3n^3 = (m^3 + n^3)^2$.

396 Запишите выражение как многочлен стандартного вида и определите его степень:

а) $(z + 1)^3 + 4(z - 1)^3 - 7(z + 1)^2(z - 1)$;
б) $5(x + 3y)^3 + 3(2x - y)^3 - 3(x + y)(x - y)^2$;
в) $3p[(2q + r^2)^3 + (2r^2 - q)^3]$;
г) $a(a + b)^3 - b(a - b)^3 - a(a^3 + b^3) + b(a^3 - b^3)$.

397 Какие многочлены можно поставить вместо A и B, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $(3a^5 + A)^3 = B + 8b^3$;

б) $(b - 3)^3 + (b + 3)^3 - A = B^3$;

в) $(2c + 3)^3 + (3c - 1)^3 - A = B^3$;

г) $(3y - 4)^3 + (y - 5)^3 + A = B^3$.

398 а) Целое число при делении на 8 дает в остатке 7. Докажите, что куб этого числа при делении на 8 дает в остатке 7.

б) Целое число при делении на 5 дает в остатке 4. Докажите, что сумма куба и квадрата этого числа делится на 5.

в) Целое число при делении на 5 дает в остатке 2. Докажите, что куб этого числа при делении на 5 дает в остатке 3;

г) Целое число при делении на 4 дает в остатке 3. Докажите, что сумма куба и квадрата этого числа делится на 4.

399 Пользуясь треугольником Паскаля, запишите формулу для возведения в седьмую степень:

а) $(a + b)$;

б) $(a - b)$.

400 1) Сложите числа, расположенные в каждой из первых шести строк треугольника Паскаля. Какую закономерность вы замечаете?

2) В формулы для $(a + b)^2$; $(a + b)^3$; $(a + b)^4$; $(a + b)^5$ подставьте $b = a$. Какую связь этого задания с заданием 1) вы замечаете?

π **401** Используя диаграммы Эйлера–Венна, определите правильность логического вывода:

а) Если некоторые натуральные числа четные, то некоторые четные числа – натуральные.

б) Если все решения неравенства $3x > 0$ положительные числа и некоторые положительные числа – натуральные, то некоторые натуральные числа – решения неравенства $3x > 0$.

в) Если ни одно решение неравенства $5x - 1 > 0$ не является отрицательным числом, а некоторые отрицательные числа делятся на 3, значит, некоторые делящиеся на 3 числа не являются решениями неравенства $5x - 1 > 0$.

г) Если ни один квадрат рационального числа не отрицательный, то ни одно отрицательное число не является квадратом рационального числа.

д) Если ни одно решение уравнения $2x = 1$ не является целым числом, то ни одно целое число не является решением уравнения $2x = 1$.

402 Вычислите рациональным способом:

а) $(93 + 45) - (-7 + 155)$;

б) $-(5{,}2 + 7{,}9) - (4{,}8 + 2{,}1)$;

в) $39 - (13 + 4) - (17 + 6)$;

г) $5{,}8 + 7{,}3 - (24{,}7 - 4{,}2) - (-2{,}7 + 6{,}3)$;

д) $(28 : 9) \cdot (36 : 7)$;

е) $(-4 : 9) : (20 : 18)$;

ж) $-(72 : 17) \cdot (51 : 9) : (8 : 5)$;

з) $(-9 : 11) \cdot (35 : 24) : (7 : 4) : (5 : 11) \cdot 3$.

403 Решите уравнение:

а) $2c - \frac{3}{5}c = \frac{3}{2}c - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}c\right) + 2$;

б) $b + 1\frac{1}{2}b + 9 = \frac{2}{3}b + 4 + \frac{5}{6}b - \left(\frac{6}{5}b - \frac{3}{5}\right)$;

в) $2\frac{1}{3}d - \left(3\frac{1}{2}d - 1\right) = d - \left(5\frac{1}{3}d - 3\frac{1}{5}d\right)$;

г) $1\frac{4}{5}a - \left(2\frac{1}{2}a + 2\right) = -\left(2\frac{1}{3}a + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)$.

404 Найдите значение выражения:

а) $\frac{(5^{53} : 5^{28}) \cdot (x^{75} : x^{67}) \cdot x^{23} \cdot (y^2)^{11} \cdot y^{46}}{(5xy)^{10} \cdot x^6 \cdot y^3 \cdot (y^{99} : y^{45}) \cdot ((5x)^7)^2} + 7 : (xy)^0$, если $x = 5$, $y = 8$;

б) $\frac{p^{37} \cdot (q^{71} : q^{39}) \cdot r^{49} \cdot (p^5)^9 \cdot q^{26}}{(pq)^{47} \cdot q^{36} \cdot (p^9 : p^5) \cdot (p^{10})^3 \cdot q^{21} \cdot r} - 3(pq)^0 - 6(qr)^0$, если $p = 4$, $q = 3$, $r = 6$.

405 а) Из города A в город B выехал велосипедист. Через 1,5 часа из города A вслед за велосипедистом отправился мотоциклист, который обогнал велосипедиста и прибыл в город B на 1 час раньше него. При этом на весь путь от A до B мотоциклисту потребовался 1 час 40 мин. Чему равна скорость мотоциклиста, если она была на 18 км/ч больше скорости велосипедиста?

б) Из пункта A в пункт B выехал автобус, а через 2 часа вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого была на 80 км/ч больше скорости автобуса. Чему была равна скорость автомобиля, если он прибыл в пункт B на 40 мин раньше автобуса, а вся дорога от A до B заняла у него 1 час 20 мин?

в) Чтобы прийти в назначенный срок к месту туристической стоянки, турист должен от станции электропоезда идти по установленному маршруту со скоростью 4 км/ч. Пройдя половину пути с этой скоростью, турист встретил попутную машину и оставшуюся часть пути проехал на ней со скоростью 20 км/ч. В результате к месту туристической стоянки турист прибыл на 2 часа раньше назначенного срока. Чему равно расстояние от станции электропоезда до места туристической стоянки?

406 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) $256b^{56}c^{32}d^{72}$; б) $t^{345}s^{391}$; в) $a^{497} : b^{781}$; г) $x^{301} : y^{559}$.

407 а) Целое число a при делении на 12 дает в остатке 5, а целое число c при делении на 12 дает в остатке 7. Какой остаток дает ac при делении на 12?

б) Какой остаток при делении на 8 дает квадрат нечетного числа?

408 Возведите двучлен в куб:

а) $(-x - y)^3$; б) $(3 + z)^3$; в) $(4 - 2a)^3$; г) $\left(\frac{1}{3}v - 2c\right)^3$.

409 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(-a^2 + 1)^3$; б) $(b^3 + 2c)^3$; в) $(-3d^4 - 2t^2)^3$; г) $(m^4n - 2mn^4)^3$.

410 Вычислите, используя формулу квадрата суммы или квадрата разности:

а) 49^3; б) 201^3; в) $2{,}9^3$; г) $2{,}1^3$.

411 Вычислите устно:

$$\left(5\frac{7}{15}\right)^3 + 3 \cdot \left(5\frac{7}{15}\right)^2 \cdot \left(3\frac{8}{15}\right) + 3 \cdot \left(5\frac{7}{15}\right) \cdot \left(3\frac{8}{15}\right)^2 + \left(3\frac{8}{15}\right)^3.$$

412 Какие одночлены можно подставить вместо A, B, C и D, чтобы получившееся равенство стало тождеством:

а) $(2n + A)^3 = B + C + D + 27m^3$; в) $(3r - A)^3 = B - 54r^2s + C + D$;

б) $(A + B)^3 = 8p^3 + C + D + 125q^3$; г) $(A + B)^3 = C + 48x^2y + 96xy^2 + D$.

413 Представьте многочлен как куб двучлена:

а) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; в) $27z^3 + 54z^2r^2 + 36zr^4 + 8r^6$;

б) $y^3 - 6y^2x + 12yx^2 - 8x^3$; г) $-15a^4b + a^6 - 125b^3 + 75b^2a^2$.

414 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(x + 2)(-x - 2)^2$; в) $(z + 2s)^3 - 6zs(z + 2s)$;

б) $(3y - 1)^2(1 - 3y)$; г) $-6m(3 + 2m)^2 - 3(3 - 2m)^3$.

415 Докажите, что при любом целом x указанное выражение делится на a:

а) $(x + 5)^3 - (x - 5)^3$, $a = 10$; б) $(2x + 6)^3 - (2 + 6x)^3$, $a = 16$.

416 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $3(s - t)^3$; в) $2(z + 2)^3 - 2z^2(z + 6)$;

б) $2x(-3x - y)^3$; г) $(p - q)^3 + (q - r)^3 + (r - p)^3$.

417 Решите уравнение:

а) $8b^3 - (2b - 1)^3 = 13 + 12b^2$; б) $(c + 3)^3 - c(c + 5)(c - 5) - 9c^2 = 1$.

418 Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

а) $125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$ при $x = 2{,}2$;

б) $8y^3 + 60y^2z + 150yz^2 + 125z^3$ при $y = 2{,}5$; $z = -4{,}6$.

419 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{3x + 3y}{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$; б) $\dfrac{8a^6 - 12a^4 + 6a^2 - 1}{4a^4 - 4a^2 + 1}$.

420 В многочлен $2y^3 - y^2 + 5y - 9$ вместо переменной y подставьте данное выражение и запишите полученное выражение как многочлен стандартного вида:

а) $a + 2$; б) $3a - 1$; в) $2a + 5$.

421 а) Найдите значение выражения $a^3 + b^3$, если известно, что $a + b = -7$ и $ab = 6{,}5$.

б) Найдите значение выражения $a^3 - b^3$, если известно, что $a - b = 4$ и $ab = -2{,}5$.

422 а) Целое число при делении на 6 дает в остатке 5. Докажите, что куб этого числа при делении на 6 дает в остатке 5.

б) Целое число при делении на 9 дает в остатке 7. Докажите, что куб этого числа при делении на 9 дает в остатке 1.

423 Какие многочлены можно поставить вместо A и B, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $(a^5 + A)^3 = B + 125b^6$; б) $(s + 4)^3 + (2s - 1)^3 - A = B^3$.

424 Запишите выражение как многочлен стандартного вида и определите его степень:

а) $6(2a + 3b)^3 + 4(3a - b)^3 - 2(3a + 2b)(3a - 2b)^2$;

б) $x(x + 2y)^3 - y(y - 2x)^3 - 14xy(x^2 + y^2)$.

425 Решите уравнение:

а) $3 + 2\frac{1}{4}r + 2\frac{3}{5} = 2r + 8{,}6 + \frac{2}{5}r$; б) $\frac{3}{4}s - (2s + 13{,}5) = \frac{3}{5}s - \frac{1}{2}s$.

426 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{(7^{35} : 7^{21}) \cdot (x^{22} : x^{12}) \cdot x^{18} \cdot (y^3)^8 \cdot y^{25}}{(7xy)^{14} \cdot x^{15} \cdot y^{14} \cdot (y^{37} : y^{18})} - 7(xy)^0$, если $x = 6$, $y = -9$;

б) $\dfrac{p^{21} \cdot (q^{43} : q^{26}) \cdot r^{37} \cdot (p^3)^4 \cdot q^{15}}{q^{14} \cdot (p^{18} : p^{13}) \cdot (p^3)^9 \cdot q^{17} \cdot r^{36}} + 11 : (pq)^0$, если $p = 3$, $q = -5$, $r = 5$.

427 а) Со склада пончиковой компании Антона и Ксюши к клиенту выехал грузовик с товаром. Через 2 часа по тому же маршруту вслед за грузовиком выехала «газель», скорость которой была на 28 км/ч больше скорости грузовика. Чему была равна скорость «газели», если она прибыла к клиенту на 1 час раньше грузовика, а вся дорога от склада до клиента заняла у «газели» 4 часа 30 мин?

б) Скорость движения лифта в здании, в котором находится офис пончиковой компании Антона и Ксюши, на 1,5 м/с больше, чем скорость движения лифта в доме Антона. Для того чтобы подняться на лифте с первого этажа в офис или квартиру Антона, надо проехать на лифте одинаковое расстояние. Подъем на лифте с первого этажа в офис пончиковой компании занимает на 20 секунд меньше времени, чем подъем с первого этажа в квартиру Антона. Считая, что скорость лифтов постоянная, найдите скорость лифта в здании, в котором находится офис пончиковой компании, если для того, чтобы подняться в квартиру Антона, требуется 40 с.

428 а) Целое число a при делении на 14 дает в остатке 7, а целое число b при делении на 14 дает в остатке 9. Какой остаток при делении на 14 дает ab?

б) Целое число при делении на 3 дает остаток 2. Какой остаток при делении на 3 дает его квадрат?

429 Докажите, что A и B дают одинаковые остатки при делении на 13:

$A = (57{,}8 + 17{,}2)(0{,}823 + 0{,}117) - 171{,}1 : (4{,}418 + 1{,}382)$;

$B = 503{,}2 - (5 \cdot (20 + 9{,}744 : 2{,}4) - 16{,}3) : 0{,}25 + 0{,}752 : 0{,}04$.

C **430*** Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $\frac{1}{21}$.

431* На какую цифру оканчивается число $2222^{222^{22^2}}$?

4. Сумма и разность кубов

Благоприятная возможность скрывается среди трудностей и проблем.

Альберт Эйнштейн (1879–1955), один из основателей современной теоретической физики, создатель теории относительности

В нашем арсенале формул сокращенного умножения уже есть формулы квадрата и куба суммы, квадрата и куба разности, а также формула разности квадратов. Для суммы квадратов мы получить формулу не смогли. А можно ли получить формулу для суммы и разности кубов?

Вспомним, как мы получили формулу разности квадратов. Мы перемножили сумму и разность двух выражений, и здесь нас ждала удача. Оказалось, что

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

где a и b могут быть как любыми числами, так и любыми выражениями.

Попробуем аналогичным способом действовать и для получения формулы разности кубов. Умножим, например, сумму двух выражений на *квадрат* их разности:

$$(a + b)(a - b)^2 = (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - \underline{2a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} + \underline{a^2b} - \underline{\underline{2ab^2}} + b^3 =$$
$$= a^3 - a^2b - ab^2 + b^3.$$

К сожалению, ни сумма, ни разность кубов у нас пока не получилась. Однако можно заметить, что если в множителе $(a^2 - 2ab + b^2)$ коэффициент 2 заменить на 1, то при раскрытии скобок подобные слагаемые взаимно уничтожатся и останется как раз выражение $a^3 + b^3$. Тем самым получим формулу для суммы кубов.

Проверим нашу гипотезу:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3.$$

Выражение $a^2 - ab + b^2$ получило название **неполного квадрата разности** a и b, так как в отличие от квадрата разности у произведения ab нет множителя 2.

Таким образом, в результате нашего исследования нам удалось получить формулу *суммы кубов* двух выражений.

Формула суммы кубов

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на неполный квадрат их разности.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Теперь, чтобы получить формулу разности кубов, заметим, что

$$a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3 = (a + (-b))(a^2 - a(-b) + (-b)^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Выражение $a^2 + ab + b^2$ получило название **неполного квадрата суммы** a и b, так как в нем также отсутствует коэффициент 2 у произведения ab.

Итак, мы приходим к следующей формуле *разности кубов* двух выражений:

Формула разности кубов

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений на неполный квадрат их суммы.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Полученные нами формулы суммы и разности кубов, как и все другие формулы сокращенного умножения, рассмотренные ранее, верны для любых a и b, а значит, являются тождествами. Их использование значительно упрощает различные преобразования выражений и вычисления. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Запишите произведение как многочлен стандартного вида

$$(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2).$$

Решение:

$$(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) = (2x)^3 + (3y)^3 = 8x^3 + 27y^3.$$

Пример 2. Упростите выражение

$$0{,}027a^3 + 0{,}075b^3 - (0{,}3a - 0{,}5b)(0{,}09a^2 + 0{,}15ab + 0{,}25b^2).$$

Решение:

$$0{,}027a^3 + 0{,}075b^3 - (0{,}3a - 0{,}5b)(0{,}09a^2 + 0{,}15ab + 0{,}25b^2) =$$
$$= 0{,}027a^3 + 0{,}075b^3 - ((0{,}3a)^3 - (0{,}5b)^3) = \cancel{0{,}027a^3} + 0{,}075b^3 - \cancel{0{,}027a^3} + 0{,}125b^3 =$$
$$= 0{,}2b^3.$$

Пример 3. Вычислите: $\dfrac{19^3 + 21^3}{40} - (19^2 + 21^2)$.

Решение:

$$\frac{19^3 + 21^3}{40} - (19^2 + 21^2) = \frac{\overset{1}{\cancel{(19 + 21)}}(19^2 - 19 \cdot 21 + 21^2)}{\underset{1}{\cancel{40}}} - (19^2 + 21^2) =$$
$$= \cancel{19^2} - 19 \cdot 21 + \cancel{21^2} - \cancel{19^2} - \cancel{21^2} = -19 \cdot 21 = -(20 - 1)(20 + 1) = -(400 - 1) = -399.$$

432 Представьте выражение в виде степени с показателем 3, если это возможно:

а) $27a^9b^{12}$; б) $8x^6y^{15}z^{18}$; в) $64a^7b^2a^5b$; г) $\dfrac{125}{p^{21}}$; д) $\dfrac{27m^{27}n^{12}}{k^3}$; е) $\dfrac{r^4s^7r^8s^{11}}{8t^6}$.

433 Прочитайте выражения:

$(A + B)^3$; $(A - B)^3$; $A^3 + B^3$; $A^3 - B^3$.

Соотнесите приведенные ниже записи с одним из этих четырех выражений, указав возможные A и B:

а) $(2x + 1)^3$; г) $8y^3 - 27z^6$; ж) $(5a - 3b)^3$; к) $-125c^9 + d^{12}$;

б) $64c^3 + d^6$; д) $(12p^3 - 15q^3)^3$; з) $r^{15} + 8s^6$; л) $(6z + 11)^3$;

в) $(-x^2 + y^4)^3$; е) $m^{18} + 27n^{33}$; и) $(9k + 8)^3$; м) $125a^{21} - a^3$.

434 1) Запишите произведение суммы a и b и неполного квадрата разности a и b как многочлен стандартного вида. Что вы замечаете?

2) В полученную формулу подставьте $(-b)$ вместо b. Какая формула получилась?

3) Используя полученные равенства, сформулируйте соответствующие правила и сравните свои формулировки с формулировками на стр. 80–81 учебника.

435 Докажите, что:

а) $-a^3 - b^3 = -(a^3 + b^3)$; б) $b^3 - a^3 = -(a^3 - b^3)$.

436 Пользуясь формулами суммы и разности кубов, докажите, что для любых a и b верно равенство:

а) $(-a - b)(a^2 - ab + b^2) = -a^3 - b^3$;
б) $(-a - b)(-a^2 + ab - b^2) = a^3 + b^3$;
в) $(a - b)(-a^2 - ab - b^2) = b^3 - a^3$;
г) $(a + b)(-a^2 + ab - b^2) = -a^3 - b^3$;
д) $(-a + b)(a^2 + ab + b^2) = b^3 - a^3$;
е) $(-a + b)(-a^2 - ab - b^2) = a^3 - b^3$.

437 Выполните умножение:

а) $(a + 1)(a^2 - a + 1)$;
б) $(b - 1)(b^2 + b + 1)$;
в) $(-c - 2)(c^2 - 2c + 4)$;
г) $(3 - d)(d^2 + 3d + 9)$;
д) $(2p + 3)(4p^2 - 6p + 9)$;
е) $(3q - 4)(9q^2 + 12q + 16)$;
ж) $(-5r + 2)(25r^2 + 10r + 4)$;
з) $(-1 - 4s)(1 - 4s + 16s^2)$;
и) $(2n + m^2)(4n^2 - 2nm^2 + m^4)$;
к) $(-v - 4w)(v^2 - 4vw + 16w^2)$;
л) $(5t - 3r)(25t^2 + 15tr + 9r^2)$;
м) $(-4z + 2s)(16z^2 + 8zs + 4s^2)$.

438 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$;
б) $(1 - z^3)(z^6 + z^3 + 1)$;
в) $(-y^8 - 5y^4 - 25)(5 - y^4)$;
г) $(a^5 - 2)(a^{10} + 2a^5 + 4)$;
д) $(-4 - b^3)(-b^6 + 4b^3 - 16)$;
е) $(-c^2 + 3)(-c^4 - 3c^2 - 9)$;
ж) $(3d^2 + 2c)(9d^4 - 6d^2c + 4c^2)$;
з) $(4p^3 - 5q^2)(16p^6 + 20p^3q^2 + 25q^4)$;
и) $(-2r^2 - s^5)(4r^4 - 2r^2s^5 + s^{10})$;
к) $(-25m^6 + 10m^3n^3 - 4n^6)(-5m^3 - 2n^3)$;
л) $(-9k^8 - 12k^4s^5 - 16s^{10})(3k^4 - 4s^5)$;
м) $(0{,}1r^6 + 0{,}2s^4)(-0{,}01r^{12} + 0{,}02r^6s^4 - 0{,}04s^8)$.

439 Вычислите, используя формулы сокращенного умножения:

а) $\dfrac{31^3 - 19^3}{12} + 31 \cdot 19$;
б) $\dfrac{127^3 + 67^3}{194} - 127 \cdot 67$;
в) $\dfrac{39^3 + 41^3}{80} - (39^2 + 41^2)$;
г) $\dfrac{48^3 - 52^3}{-4} - (48^2 + 52^2)$.

440 Какой одночлен можно подставить вместо A, чтобы получившееся равенство стало тождеством?

а) $(2x + A)(4x^2 - 2xA + A^2) = 8x^3 + 27y^3$;
б) $(A - 4b)(A^2 + 4bA + 16b^2) = a^6 - 64b^3$;
в) $(-A - 3c)(A^2 - 3cA + 9c^2) = -27c^3 - 8d^9$;
г) $(-4t + A)(16t^2 + 4tA + A^2) = 125s^6 - 64t^3$.

441 Запишите выражение как многочлен стандартного вида, используя нужную формулу сокращенного умножения:

а) $(a + b)(b^2 - 2ab + a^2)$;
б) $(-c - d)(d^2 - cd + c^2)$;
в) $(-x + y)(x^2 + xy + y^2)$;
г) $(z - s)(z^2 + 2zs + s^2)$;
д) $(p - q)(p^2 - 2pq + q^2)$;
е) $(-m - n)(m^2 - mn + n^2)$.

442 Выполните умножение многочленов:

а) $5(a^2 + 2)(a^4 - 2a^2 + 4)$;
б) $b(b - 3)(b^2 + 3b + 9)$;
в) $3c(-c - 1)(c^2 - c + 1)$;
г) $5d^3(-d + 5)(d^2 + 5d + 25)$;
д) $(x + 3)^2(x^2 - 3x + 9)$;
е) $(-y^2 + 5)^2(y^4 + 5y^2 + 25)$;
ж) $(z^2 - 1)(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1)$;
з) $s^2(s^2 + 2s + 4)(s - 2)(s + 2)$.

443 Представьте многочлен в виде произведения двух многочленов:

а) $x^3 - 27$;
б) $64 + y^3$;
в) $-a^3 - b^3$;
г) $-b^3 + c^3$;
д) $8p^3 - 0{,}001$;
е) $125 + 27q^3$;
ж) $-0{,}027 - 64r^3$;
з) $-0{,}125s^3 + 8$;
и) $64m^3 - 27n^3$;
к) $-k^6 - 0{,}008r^3$;
л) $\frac{1}{27}x^3 - \frac{64}{125}y^3$;
м) $64p^9 + 216q^3$;
н) $-a^3b^3 - b^6$;
о) $-27x^3z^6 + z^9$;
п) $p^3q^3r^3 - 125p^9$;
р) $343 + r^{12}$.

444 Решите уравнение:

а) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x - 3)(x + 3) = 26$;
б) $6(y + 1)^2 + 2(y - 1)(y^2 + y + 1) - 2(y + 1)^3 = 32$;
в) $(s + 2)^3 - s(3s + 1)^2 + (2s + 1)(4s^2 - 2s + 1) = 53$;
г) $5z(z - 3)^2 - 5(z - 3)(z^2 + 3z + 9) + 30(z + 2)(z - 2) = 42$.

445 Представьте выражение в виде произведения многочленов:

а) $(x - 7)^3 - 1$;
б) $(y + 9)^3 + 27$;
в) $64 - (z - 5)^3$;
г) $(5a - 4)^3 - 8$;
д) $(7b + 3)^3 + 125$;
е) $0{,}216 + (c + 0{,}2)^3$;
ж) $64(m + 5)^3 - m^3$;
з) $n^3(n - 8)^3 + 8n^6$;
и) $343r^6 - (r - 11)^3$.

446 Докажите, что значение выражения:

а) $72^3 - 44^3$ делится на 7;
б) $215^3 + 94^3$ делится на 3;
в) $97^3 + 93^3$ делится на 19;
г) $396^3 - 114^3$ делится на 141.

447 Упростите выражение:

а) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
б) $z(z - 3)(z + 3) - (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$;
в) $2(2 - t)(4t + 3) + t(t + 5)^2 - (t + 4)(t^2 - 4t + 16)$;
г) $(p^2 - 3)^3 - (p^2 - 3)(p^4 + 3p^2 + 9)$;
д) $(q^2 - 1)(q^4 + q^2 + 1) - (q^2 - 1)^3$.

448 Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

а) $2a^3 + 9 - 2(a + 1)(a^2 - a + 1)$ при $a = 11{,}7$;

б) $b(b + 2)(b - 2) - (b - 3)(b^2 + 3b + 9)$ при $b = 2{,}5$;

в) $3(c - 1)^2 + (c + 2)(c^2 - 2c + 4) - (c + 1)^3$ при $c = -3$;

г) $(d - 1)^3 - 4d(d + 1)(d - 1) + 3(d - 1)(d^2 + d + 1)$ при $d = -2$.

449 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{4x + 4y}{x^3 + y^3}$; в) $\dfrac{4m^2 - 9n^2}{8m^3 - 27n^3}$; д) $\dfrac{27a^3 - 125b^3}{9a^2 - 30ab + 25b^2}$;

б) $\dfrac{3z^3 - 3t^3}{2z - 2t}$; г) $\dfrac{25p^2 - 16q^2}{125p^3 + 64q^3}$; е) $\dfrac{16c^2 + 12cd + 9d^2}{64c^3 - 27d^3}$.

450 При допустимых значениях переменных докажите тождество:

а) $xy + \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} = (x + y)^2$; в) $\dfrac{a^3 - b^3}{a^2 - ab + b^2} \cdot \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} = a^2 + b^2$;

б) $\dfrac{z^3 + s^3}{z + s} - zs = (z - s)^2$; г) $\dfrac{c^3 - d^3}{c - d} - cd = c^2 + d^2$.

451 Докажите, что при любом целом q значение выражения делится на a:

а) $(q + 11)^3 - q^3$, $a = 11$; г) $343 - (6q + 1)^3$, $a = 6$;

б) $8q^3 + (17 - 2q)^3$, $a = 17$; д) $(7q + 11)^3 - 64$, $a = 7$;

в) $(4q - 2)^3 + 8$, $a = 4$; е) $3q^3 - 3(q - 4)^3$, $a = 12$.

452 Сравните значения числовых выражений:

а) $36^3 - 12^3$ и $(36 - 12)^3$; в) $53^2 + 46^2$ и $\dfrac{53^3 - 46^3}{7}$;

б) $48^3 + 24^3$ и $(48 + 24)^3$; г) $\dfrac{29^3 + 31^3}{60}$ и 904.

453 Найдите значение выражения $a^3 - b^3$, если известно, что:

а) $a - b = 4$ и $ab = -1{,}75$; б) $a - b = -5$ и $ab = -6$.

454 Найдите значение выражения $a^3 + b^3$, если известно, что:

а) $a + b = 6$ и $ab = 8{,}75$; б) $a + b = -2$ и $ab = -8$.

455 Представьте выражение в виде произведения многочленов:

а) $a^3b^6 - 8$; г) $xy^6 - z^3x$; ж) $(c - d)^3 + (-c - d)^3$;

б) $x^3y^3z^3 + t^6$; д) $c^7 - c$; з) $(a + b)^3 - (a - b)^3$;

в) $1 - p^3q^6r^9$; е) $m^6n^6 + 27m^3n^3$; и) $(x - 5)^3 + (x + 5)^3$.

456 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(a + 1)(a^2 - a + 5)$; д) $(2p - 3)(4p^2 + 6p + 10)$;

б) $(b - 1)(b^2 + b - 3)$; е) $(3q + 5)(9q^2 - 15q + 17)$;

в) $(-c - 2)(c^2 - 2c - 7)$; ж) $(m + n)(m^2 - 3mn + n^2)$;

г) $(3 - d)(d^2 + 3d + 6)$; з) $(r - s)(r^2 + 5rs + s^2)$.

457 Какими многочленами можно заменить A, B, C и D, чтобы равенство стало тождеством?

а) $(2x + A)(B + 9y^2) = C^3 - D^3$;
в) $(3m + A)(B + C) = n^6 + D^3$;
б) $(A - 4p)(25q^2 - B) = C^3 + D^3$;
г) $(5r - A)(B - C) = D^3 - 8s^{12}$.

458 а) Два целых числа при делении на 4 дают в остатке соответственно 1 и 3. Доказать, что сумма кубов этих чисел делится на 4.

б) Два целых числа при делении на 7 дают в остатке соответственно 2 и 3. Доказать, что сумма кубов этих чисел делится на 7.

459 Докажите тождество:

а) $(x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = x^6 - y^6$;
б) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^8 + a^4b^4 + b^8) = a^{12} - b^{12}$;
в) $(c - d)^2(c + d)^2(c^4 + c^2d^2 + d^4)^2 = c^{12} - 2c^6d^6 + d^{12}$;
г) $(p^2 - q^2)(p^2 - pq + q^2)(p^2 + pq + q^2) = p^6 - q^6$.

460 Докажите, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 3.

П **461** Прочитайте высказывание и определите, истинно оно или ложно. Для ложных высказываний постройте отрицания и докажите истинность отрицаний:

а) $\exists\ p, q \in Z$: $p^2 = q$;
г) $\exists\ p, q \in Z$: $p^2 = -q$;
б) $\exists\ m, n, l \in N, m \neq l$: $n^2 = ml$;
д) $\forall\ x, y \in Q$: $(x - y)^2 = x^2 - y^2$;
в) $\exists\ a, b \in Q$: $a^2 = 4b^2$;
е) $\forall\ c, d \in Q$: $cd^2 - c^2d = 0$.

462 На прилавке магазина было две коробки с помидорами по 450 штук в каждой. Помидоры в различных коробках отличались ценой продажи. Так, помидоры из первой коробки должны были продавать по цене 50 р. за 10 штук, а из второй – по цене 40 р. за 5 штук. Таким образом, все помидоры из первой коробки стоили $50 \cdot (450 : 10) = 2250$ р., а из второй – $40 \cdot (450 : 5) = 3600$ р. Значит, за все помидоры из этих двух коробок планировалось получить выручку в сумме 5850 р. Продавец рассудил, что, взяв из первой коробки 10 помидоров, а из второй 5, он должен продать эти 15 помидоров за 90 р. Поэтому он смешал помидоры из обеих коробок вместе и продавал все 900 помидоров по цене 90 р. за 15 штук. В результате им была получена выручка в размере $(900 : 15) \cdot 90 = 5400$ р., то есть на 450 р. меньше того, что он должен был получить от продажи всех помидоров. Почему так произошло?

463 Сравните значения числовых выражений:

а) $5{,}3 \cdot (-4) \cdot |-3|$ и $5{,}3 \cdot (-4) \cdot (-3)$;
б) $(-7{,}8) \cdot (-3{,}6) \cdot (-|-7|)$ и $7{,}8 \cdot 3{,}6 \cdot |-7|$;
в) $10{,}2 \cdot (-5) \cdot (-4)$ и $|10{,}2 \cdot 5 \cdot (-4)|$;
г) $(-9{,}7)^2 \cdot (-4{,}5)^3 \cdot |-2|^3$ и $|9{,}7^2 \cdot (-4{,}5)^3| \cdot (-2)^3$.

464 Найдите множество целых решений неравенства:

а) $-2 \leqslant x < 4$;
в) $-6 < x \leqslant -2$;
д) $1 < x - 3 < 5$;
ж) $-2 < x - 7 \leqslant 3$;
б) $3 \leqslant x \leqslant 7$;
г) $|x| < 2$;
е) $2 \leqslant x + 4 < 9$;
з) $|x + 5| \leqslant 2$.

465 а) В произведении трех чисел первый множитель увеличили на 50%, а второй увеличили на $33\frac{1}{3}\%$. Как надо изменить третий множитель, чтобы произведение не изменилось?

б) Разность двух чисел равна 58. Найдите эти числа, если известно, что 7% одного из них равно 35% другого.

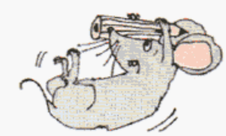
в) В начале января число женщин, работавших в магазине, составляло 80% от числа всех сотрудников этого магазина. После того как в феврале уволились 8 женщин, а 10 мужчин были приняты на работу, число мужчин и женщин, работающих в этом магазине, стало одинаковым. Сколько сотрудников было в этом магазине в начале января?

г) Два завода должны были вместе выпустить в январе 360 автомобилей. Однако первый завод перевыполнил план на 10%, а второй – на 20%. Поэтому они выпустили вместе в январе на 40 автомобилей больше запланированного. Сколько автомобилей сверх плана выпустил в январе каждый из этих заводов?

466 Известно, что $|a| = 5$, а $|b| = 7$. Какие значения может принимать:

а) $|a + b|$; б) $|a - b|$?

467 Найдите остаток от деления числа 6^{100} на 7.



Д **468** Выполните умножение:

а) $(-x - 3)(x^2 - 3x + 9)$; в) $(p - 3q)(p^2 + 3pq + 9q^2)$; д) $(-6z + 5)(36z^2 + 30z + 25)$;

б) $(4 - y)(y^2 + 4y + 16)$; г) $(-2 - 3t)(4 - 6t + 9t^2)$; е) $(-7m + n)(49m^2 + 7mn + n^2)$.

469 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(-x^6 - 4x^3 - 16)(4 - x^3)$; г) $(-3p^3 - q^4)(9p^6 - 3p^3q^4 + q^8)$;

б) $(y^5 - 3)(y^{10} + 3y^5 + 9)$; д) $(-6m^2 - n^7)(-36m^4 + 6m^2n^7 - n^{14})$;

в) $(-2 - z^3)(-z^6 + 2z^3 - 4)$; е) $(5r^5 - 3s^3)(-25r^{10} - 15r^5s^3 - 9s^6)$.

470 Вычислите, используя формулы сокращенного умножения:

а) $\dfrac{93^3 - 57^3}{36} + 93 \cdot 57$; б) $\dfrac{79^3 + 81^3}{160} - (79^2 + 81^2)$.

471 Какой одночлен можно подставить вместо A, чтобы получившееся равенство стало тождеством?

а) $(4p + A)(16p^2 - 4pA + A^2) = 64p^3 + 125q^6$;

б) $(A - 6n)(A^2 + 6nA + 36n^2) = 27m^6 - 216n^3$.

472 Выполните умножение многочленов:

а) $x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$; в) $(-z^2 + 2)^2(z^4 + 2z^2 + 4)^2$;

б) $4y(-y - 3)(y^2 - 3y + 9)$; г) $(t^2 - 4)(t^2 - 2t + 4)(t^2 + 2t + 4)$.

473 Представьте многочлен в виде произведения двух многочленов:

а) $a^3 - 64$; в) $27c^3 - 1000$; д) $27p^3 - 64r^3$; ж) $-z^6t^9 - s^{12}$;

б) $8 + b^3$; г) $216 + 0{,}001q^3$; е) $-x^9 - 8y^6$; з) $-125d^3c^9 + a^{15}$.

474 Решите уравнение:

а) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - x(x - 4)(x + 4) = 59$;

б) $9(b + 2)^2 + 3(b - 4)(b^2 + 4b + 16) - 3(b + 1)^3 = 3$.

475 Представьте выражение в виде произведения многочленов:

а) $(a + 7)^3 + 64$; б) $(9b + 5)^3 - 27$; в) $c^6(c - 6)^3 + 125c^9$.

476 Докажите, что значение выражения:

а) $68^3 - 24^3$ делится на 11; в) $79^3 + 95^3$ делится на 58;

б) $326^3 + 54^3$ делится на 38; г) $424^3 - 318^3$ делится на 53.

477 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{5a + 5b}{a^3 + b^3}$; в) $\dfrac{25p^2 - 16q^2}{125p^3 - 64q^3}$; д) $\dfrac{1000x^3 - 27y^3}{100x^2 + 30xy + 9y^2}$;

б) $\dfrac{9c^3 - 9d^3}{5c - 5d}$; г) $\dfrac{49m^2 - 16n^2}{343m^3 + 64n^3}$; е) $\dfrac{z^4 + 12z^2t + 36t^2}{z^6 + 216t^3}$.

478 Представьте выражение в виде произведения многочленов:

а) $x^6y^9 - 1$; в) $a^2y^9 - t^6a^2$; д) $(2x + y)^3 - (2x - y)^3$;

б) $5z^6 - 40s^{12}$; г) $b^{10} - b$; е) $(4x + 5y)^4 + 4x + 5y$.

479 Найдите множество целых решений неравенства:

а) $-3 \leqslant y < 1$; в) $-4 < y \leqslant -1$; д) $2 < y - 4 \leqslant 3$; ж) $-1 < y - 1 \leqslant 1$;

б) $6 \leqslant y \leqslant 8$; г) $|y| < 3$; е) $5 \leqslant y + 2 < 7$; з) $|y + 3| \leqslant 4$.

480 а) В начале 2008 года число мужчин, работавших в одном из филиалов пончиковой компании Антона и Ксюши, составляло 60% от числа всех сотрудников этого филиала. В течение года уволилось 10 мужчин, а 6 женщин были приняты на работу. После этого оказалось, что мужчин – работников этого филиала стало столько же, сколько женщин. Сколько сотрудников работало в этом филиале пончиковой компании в начале 2008 года?

б) Два филиала пончиковой компании должны были вместе выпустить в декабре 40 т пончиков. В конце декабря выяснилось, что первый филиал перевыполнил план на 20%, а второй – на 30%. А их совместный выпуск в декабре составил 50 т. Сколько тонн пончиков сверх плана выпустил каждый из этих филиалов в декабре?

481 Найдите остаток от деления числа 38^{200} на 9.

482 Докажите, что сумма кубов A и B делится на 36:

$$A = \frac{14\frac{4}{5} - 6\frac{11}{12} + 12\frac{3}{4} - 7\frac{2}{15}}{10\frac{2}{3} - 3\frac{11}{12}} + 2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{4};\quad B = \frac{36\frac{2}{3} : 15 + 8\frac{2}{3} \cdot 7}{12\frac{1}{3} + 8\frac{6}{7} : 2\frac{4}{7}} + \frac{2\frac{3}{8} : \frac{3}{4} + 24 \cdot \frac{7}{9}}{7\frac{2}{3} - 157\frac{4}{5} : 24}.$$

C **483*** У двух грибников спросили, сколько они собрали грибов. Первый из них сказал, что он собрал грибов в два раза меньше, чем второй, плюс еще 30 грибов. А второй грибник сказал, что он собрал столько же грибов, сколько первый, плюс еще 50 грибов. Сколько грибов собрали оба грибника?

484* Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

§ 4. Разложение многочленов на множители

1. Вынесение общего множителя за скобки

Видеть и делать новое –
очень большое удовольствие.

Вольтер (1694–1778),
французский философ

Для того чтобы разобраться в том, что значит разложить многочлены на множители и зачем это нужно, вычислим произведение двучленов $(x + 1)(x - 2)$. Получаем

$$(x + 1)(x - 2) = x^2 + \underline{x} - \underline{2x} - 2 = x^2 - x - 2.$$

А теперь решим уравнение: $x^2 - x - 2 = 0$. Мы только что получили, что

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2),$$

поэтому

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0.$$

Произведение нескольких множителей тогда и только тогда равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно,

$$(x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ или } x - 2 = 0$$

Но мы уже умеем решать такие уравнения:

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1,$$
$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Таким образом, корни исходного уравнения $x = -1$ и $x = 2$.

Если бы мы не узнали, что многочлен $x^2 - x - 2$ можно представить в виде произведения $(x + 1)(x - 2)$, то не смогли бы решить данное уравнение, так как пока не знаем общего способа решения уравнений такого вида.

Умение *раскладывать многочлены на множители*, то есть представлять их в виде произведения двух или более многочленов, оказывается очень полезным при решении различных задач. А значит, нам надо этому научиться.

Следует отметить, что любой многочлен мы всегда можем представить в виде произведения некоторого числа и многочлена, причем бесконечным числом способов. Для этого достаточно вынести за скобки любой числовой множитель, например:

$$x^2 - x - 2 = 2(0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1) = \frac{1}{3}(3x^2 - 3x - 6) = 0{,}2(5x^2 - 5x - 10) \text{ и т. д.}$$

Но такое разложение на множители не поможет нам в решении многих задач (например, в решении уравнения, которое мы только что рассмотрели). Поэтому, когда мы будем говорить о разложении многочленов на множители, мы будем иметь в виду разложение многочленов на буквенные множители (то есть такие разложения, в которых каждый многочлен-множитель имеет степень, большую нуля).

Например, операцию представления многочлена $2a + 2b$ в виде $2(a + b)$ мы не будем считать операцией разложения многочлена на множители, а будем считать операцией вынесения числового множителя за скобку.

Итак,

Определение. Разложить многочлен на множители (на буквенные множители) – это значит представить его в виде произведения двух или более многочленов, степень которых больше нуля.

Разложить многочлен на множители не всегда легко, а порой и невозможно. Поиск соответствующего способа разложения – процесс творческий, требующий большой изобретательности. Тем не менее существуют приемы, позволяющие упростить этот поиск.

Одним из наиболее простых способов разложения многочлена на множители является *вынесение общего множителя за скобки*. Этот способ основан на распределительном законе умножения:

$$\forall\, a, b, c \in Q\colon a(b + c) = ab + ac \Leftrightarrow ab + ac = a(b + c)$$

(п.п. 3.1.1 – 3.1.2).

Например, каждый член многочлена $5x^3 - 10x^2 + 25x$ имеет множитель $5x$. Значит, этот многочлен мы можем рассматривать как произведение одночлена $5x$ и многочлена $x^2 - 2x + 5$. Ведь

$$5x^3 - 10x^2 + 25x = 5\underline{x} \cdot x^2 - 5\underline{x} \cdot 2x + 5\underline{x} \cdot 5 = 5x(x^2 - 2x + 5).$$

Таким образом, мы разложили многочлен $5x^3 - 10x^2 + 25x$ на множители $5x$ и $x^2 - 2x + 5$.

Проверить правильность разложения многочлена на множители можно ***умножением***. Так, умножив $5x$ на многочлен $x^2 - 2x + 5$, записанный в скобках, мы получим исходный многочлен $5x^3 - 10x^2 + 25x$.

Вынеся общий множитель $5x$ за скобки, в скобках мы записали многочлен, каждый член которого мы разделили на $5x$.

Проведенное рассуждение верно и в общем случае. Действительно, пусть все члены некоторого многочлена $ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n$, $n \in N$, имеют общий множитель c. Тогда если $c \neq 0$, то вынесем за скобки общий множитель c, выполнив следующие равносильные преобразования:

$$ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c\left(\frac{ca_1}{c} + \frac{ca_2}{c} + \ldots + \frac{ca_n}{c}\right) = c\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Если же $c = 0$, то равенство $ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ также будет верно. Поэтому вынесение за скобки общего множителя, в отличие от действия деления, возможно для множителей как равных, так и не равных нулю.

Итак, чтобы **вынести за скобки общий множитель c, мы можем в скобках записать многочлен, каждый член которого получен в результате его деления на c.**

Заметим, что члены исходного многочлена $5x^3 - 10x^2 + 25x$ имеют и другие общие буквенные множители: x, $-x$, $-5x$, $2x$ и т.д. Но за скобки удобнее всего выносить $5x$ или $-5x$. В этом случае *в скобках остается многочлен, все члены которого не имеют общих буквенных множителей. При этом коэффициенты всех членов получившегося в скобках многочлена – целые числа, которые не имеют общих делителей, отличных от* 1. Именно к такому разложению многочленов на множители мы и будем стремиться, вынося общий множитель за скобки.

Рассмотрим несколько примеров использования разложения многочленов на множители при решении задач.

Пример 1. Упростите при $a \neq 0$ выражение: $\dfrac{9ac - 3ab - 6a^2}{3a}$.

Решение:

Заметим, что все члены многочлена, стоящего в числителе, имеют общий множитель $3a$. Вынесем его за скобки, разделив каждый из членов многочлена, стоящего в числителе, на $3a$.

Получаем:

$$\frac{9ac - 3ab - 6a^2}{3a} = \frac{3a\left(\dfrac{9ac}{3a} - \dfrac{3ab}{3a} - \dfrac{6a^2}{3a}\right)}{3a} = \frac{3a(3c - b - 2a)}{3a}.$$

Теперь, поскольку $3a \neq 0$, мы можем сократить дробь на $3a$. В итоге получаем:

$$\frac{9ac - 3ab - 6a^2}{3a} = 3c - b - 2a.$$

Отметим, что выносить за скобки можно не только одночлены, но и более сложные выражения, если они являются общими множителями всех слагаемых некоторой суммы.

Пример 2. Решите уравнение:

$$3(2x - 1)^3 - 6(2x - 1)^2 - 9(2x - 1) = 0.$$

Решение:

Выражение в левой части уравнения состоит из трех слагаемых, имеющих общий множитель $\underline{3(2x - 1)}$:

$$3(2x - 1)^3 = \underline{3(2x - 1)} \cdot (2x - 1)^2$$
$$6(2x - 1)^2 = \underline{3(2x - 1)} \cdot 2(2x - 1)$$
$$9(2x - 1) = \underline{3(2x - 1)} \cdot 3$$

Вынесем его за скобки и преобразуем выражение, полученное в скобках:

$$3(2x - 1)^3 - 6(2x - 1)^2 - 9(2x - 1) =$$
$$= \underline{3(2x - 1)} \cdot (2x - 1)^2 - \underline{3(2x - 1)} \cdot 2(2x - 1) - \underline{3(2x - 1)} \cdot 3 =$$
$$= \underline{3(2x - 1)} \cdot [(2x - 1)^2 - 2(2x - 1) - 3] =$$
$$= 3(2x - 1) \cdot [4x^2 - \underline{4x} + \cancel{1} - \underline{4x} + \cancel{2} - \cancel{3}] = 3(2x - 1)(4x^2 - 8x)$$

Выражение $4x^2 - 8x$, стоящее во второй скобке, мы также можем разложить на множители, вынося за скобки общий множитель $4x$. Получим:

$$3(2x - 1)(4x^2 - 8x) = 3(2x - 1) \cdot 4x(x - 2) = 12x(2x - 1)(x - 2).$$

Значит, исходное уравнение равносильно уравнению $12x(2x - 1)(x - 2) = 0$.

Произведение нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно,

$$12x(2x - 1)(x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x = 0 \text{ или } 2x - 1 = 0 \text{ или } x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ или } x = 0{,}5 \text{ или } x = 2.$$

Ответ: $\{0;\ 0{,}5;\ 2\}$.

Заметим, что при решении примера 2 нам пришлось выносить общий множитель за скобки несколько раз. Ведь если бы мы вынесли за скобки только один из общих множителей, x или $2x - 1$, это не дало бы нам возможности решить исходное уравнение.

К **485** Сократите дробь:

а) $\frac{2a + 2b}{2}$; б) $\frac{-24}{3x - 3y}$; в) $\frac{4}{12c - 16b}$; г) $\frac{25p + 45q}{-10}$; д) $\frac{27r + 18s}{6t - 21v}$.

486 Какой одночлен надо поставить вместо A, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $36x^2y = A \cdot 4xy$; в) $18p^{10} = p^8 \cdot A$; д) $12abc = A \cdot 3c$;

б) $54z^4t^2 = 27A \cdot z^3$; г) $15q^3r^2 = 5A \cdot rq$; е) $9d^2s^3 = 3A \cdot 3d^2$.

487 Вычислите рациональным способом. Какой закон умножения вы при этом использовали?

а) $6 \cdot 19 + 6$; в) $34 \cdot 3 + 17 \cdot 4$; д) $58 + 29 \cdot 3$;

б) $27 \cdot 5 + 13 \cdot 5$; г) $40 \cdot 4 + 32 \cdot 15$; е) $72 + 36 \cdot 8$.

488 1) Пользуясь распределительным законом умножения, вынесите за скобки общий числовой множитель тремя различными способами:

$$x^2 - x - 2.$$

Сколько различных способов вынесения за скобки общего числового множителя существует?

2) Найдите произведение двучленов $(x + 1)(x - 2)$. Что вы замечаете?

3) Используя один из способов разложения многочлена $x^2 - x - 2$ на множители, решите уравнение:

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

4) Сравните способы представления трехчлена $x^2 - x - 2$ в виде произведения нескольких множителей, полученных в заданиях 488 (1) и 488 (2). Чем они похожи? Чем отличаются?

5) Предложите свой вариант определения операции «разложение многочлена на множители». Сравните свое определение с определением, приведенным на стр. 89 учебника.

489 Вынесите общий множитель за скобку и проверьте правильность своего результата, выполнив умножение:

а) $3 - 3a$; г) $4m - 8n$; ж) $pq + 8p$; к) $2kt - t^2$;

б) $5b - 20$; д) $15x + 45y$; з) $ab - bc$; л) $m^3 + 3m$;

в) $2 + 6c$; е) $18c - 72d^2$; и) $x^2 - xy$; м) $7z^2 - z^3$.

В каких случаях мы говорим, что выполнено разложение многочлена на множители?

490 Разложите многочлен на множители тремя различными способами:

$$6y^3 - 12y^2 + 36y.$$

Какое действие над членами данного многочлена надо выполнить, чтобы найти выражение в скобках? Какой общий буквенный множитель удобнее всего выносить за скобки? Почему? Сравните свои выводы с выводами на стр. 89 учебника.

491 Разложите двучлен на множители:

а) $3a^3 - 6a^4$; д) $9x^3 - 6x^2y$; и) $16m^2n + 8m^2n^3$; н) $-p^2qr - 5pqr$;

б) $16b^4 - 8b^3$; е) $7r^4s + 21r^4$; к) $-5u^3v^4 - 10uv^2$; о) $2s^5t^4v^3 - s^7t^3v^2$;

в) $6c^4 - 12c^6$; ж) $18pq^3 - 9q^4$; л) $-27a^3b + 18a^2b^2$; п) $8mn^3t + 24mnt^2$;

г) $10d^7 + 30d^5$; з) $2a^5 + 4a^4b$; м) $51c^2d^3 - 34c^3d^2$; р) $-15x^6yz + 10x^4yz^2$.

492 Разложите трехчлен на множители:

а) $ab - bc + db$; д) $3mn - 9m^2n^2 + 12m^3n^2$; и) $8c^4d^3 - 6c^4d^2 + 16c^3d^4$;

б) $-xy - zy + yt$; е) $-8a^4b + 16a^2b^2 - 20a^5b^3$; к) $-20m^4n^3 - 12m^2n^4 + 16m^8n^2$;

в) $-2a + ab - ac$; ж) $2p^3q^3 + 4p^2q^2 - 6pq$; л) $15a^7b^4 + 5a^6b^3 - 10a^5b^9$;

г) $3p - 2pq + 4pr$; з) $9x^5y^2 - 6x^3y^3 + 15x^2y^5$; м) $24r^5s^6 - 16r^9s^7 - 40r^{10}s^5$.

493 Из блоков, приведенных ниже, постройте алгоритм разложения многочлена на множители путем вынесения общего буквенного множителя за скобки:

Найти общий буквенный множитель C всех членов многочлена

Записать исходный многочлен в виде произведения CA

Найти этот общий множитель и обозначить его C_1

Положить новое значение C равным произведению C_1 и найденного ранее C

Записать разложение в виде произведения CA

Имеют ли все члены A общий буквенный множитель?

494 Найдите значение выражения рациональным способом:

а) $6{,}98a - a^2$ при $a = 1{,}98$;

б) $b^3c - bc^3$ при $b = 7$; $c = -3$;

в) $32p^2q - 25pq$ при $p = 0{,}5$; $q = 30$;

г) $8m^3 - 18mn^2$ при $m = 4{,}5$; $n = -\frac{1}{3}$;

д) $\dfrac{6x - 6y}{x^2y - xy^2}$ при $x = 1{,}5$; $y = -2$;

е) $\dfrac{15z - 21}{25z^2 - 70z + 49}$ при $z = 2{,}6$;

ж) $\dfrac{2a^2 + 4b}{a^4 - 4b^2}$ при $a = -0{,}3$; $b = 0{,}04$;

з) $\dfrac{3cd - 12c^3d^3}{1 + 4cd + 4c^2d^2}$ при $c = 1{,}4$; $d = 5$.

495 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{3xy - 6x}{7xy - 14x}$; в) $\frac{7z^2 - 21zd}{4zd^2 - 12d^3}$; д) $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{5x + 5y}$;

б) $\frac{5ab + 2bc}{25a + 10c}$; г) $\frac{3p^2 - 8pq}{24pq - 9p^2}$; е) $\frac{7a - 7b}{a^2 - 2ab + b^2}$.

496 Докажите, что значение выражения кратно a:

а) $21 \cdot 37 + 62 \cdot 37$ при $a = 83$; д) $7^5 + 49^2$ при $a = 8$;

б) $46{,}6 \cdot 8 - 17{,}6 \cdot 8$ при $a = 29$; е) $81^6 - 9^9$ при $a = 13$;

в) $92 \cdot 75 + 23 \cdot 48$ при $a = 87$; ж) $36^2 - 6^3 + 36$ при $a = 31$;

г) $63 \cdot 55 + 105 \cdot 84$ при $a = 39$; з) $25^4 + 5^7 - 25^3$ при $a = 29$.

497 Разложите многочлен на множители:

а) $a(b + c) + d(b + c)$; д) $(x - y)^2 - (x - y)$; и) $s(t - 1)^2 - r(1 - t)$;

б) $5x(y + z) - 3t(y + z)$; е) $(3z + t)^2 + (3z + t)$; к) $2m(4n - 3) - 3k(3 - 4n)^2$;

в) $6m(p - q) + 7n(q - p)$; ж) $4(m - n) - 3(m - n)^2$; л) $x^2(2 - y^2)^2 + z^2(y^2 - 2)$;

г) $9r(s - t) - 2k(t - s)$; з) $2p(p - q) - (p - q)^2$; м) $4a^2(b^2 + 3)^2 - 9c^2(-b^2 - 3)$.

498 Решите уравнение, используя разложение многочлена на множители:

а) $x^2 + 3x = 0$; е) $c(3c - 1) - 2(3c - 1) = 0$; л) $5a^3 + 4a^2 = 0$;

б) $6y^2 - y = 0$; ж) $2d(5d + 3) + 3(5d + 3) = 0$; м) $b^4 - b^3 = 0$;

в) $8z - 12z^2 = 0$; з) $5m(m - 4) - 4(4 - m) = 0$; н) $s^5 - 3s^4 = 0$;

г) $-7t^2 - 1{,}4t = 0$; и) $7(n - 8) + 6n(8 - n) = 0$; о) $r^4 - 6r^3 = 0$;

д) $-3r + 1{,}8r^2 = 0$; к) $-8p(6p - 5) - 4(6p - 5) = 0$; п) $9d^7 + 2d^8 = 0$.

499 Представьте выражение в виде произведения многочленов:

а) $(4p - 5q)(3m - 2n) + (4q - 5p)(3m - 2n)$; г) $x^2(y^3 - z^3) + y^2(y^3 - z^3)$;

б) $(5c - 2d)(2r + 3s) - (2c - 7d)(2r + 3s)$; д) $m^3(n - r)^2 + m^3(n + r)^2$;

в) $(7a + 3b)(9c + 8d) - (6a + 2b)(8d + 9c)$; е) $ab(c^2 + cd + d^2) + ab(c^2 - cd + d^2)$.

500 Разложите многочлен на множители:

а) $3a(b - 1) - 2c(b - 1) + d(b - 1)$; е) $a(2 - x^2) + b(x^2 - 2) - 2 + x^2$;

б) $7c(r - s) + 5k(r - s) + 3n(r - s)$; ж) $x(a + b) + ay + by$;

в) $p(q^2 + r^2) + m(q^2 + r^2) + n(q^2 + r^2)$; з) $q(b^4 + b^2 - b) + b^4 + b^2 - b$;

г) $s(a + b + c) - t(a + b + c) + k(a + b + c)$; и) $3b(m + n) + m + n$;

д) $4z(m + n - k) + 5y(m + n - k) - 7x(m + n - k)$; к) $k(p + q) - rp - rq$.

501 Представьте выражение как произведение ($n, k, m \in N$):

а) $3^{n+2} + 3^n$; в) $4^{m+3} - 4^m$; д) $2^{2k+2} + 2^{2k-2}$;

б) $7^{k+1} - 7^k$; г) $5^{n+1} - 5^{n-1}$; е) $6^{3m+1} - 6^{3m-1}$.

502 Найдите значение выражения рациональным способом:

а) $x(z + 3) - y(z + 3)$ при $x = 0{,}75$; $y = 0{,}5$; $z = -7$;

б) $5a(b - 2) - 4a(b - 2)$ при $a = 0{,}8$; $b = 14{,}5$;

в) $4p^2(q + 7) - 3p^2(q + 7)$ при $p = -0{,}2$; $q = 8$;

г) $(4m - 3n)(5r + 2s) - (6m - 4n)(5r + 2s)$ при $m = -0{,}5$; $n = 2$; $r = 0{,}2$; $s = -3$.

503 Докажите, что:

а) сумма целого числа и его квадрата есть число четное;

б) разность куба целого числа и самого числа делится на 6;

в) сумма двух последовательных натуральных степеней числа 3 делится на 12;

г) разность двух последовательных натуральных степеней числа 5 делится на 20.

504 Какие из приведенных ниже высказываний являются общими, а какие – высказываниями о существовании? Определите истинность высказываний. Для ложных высказываний постройте отрицания и докажите истинность отрицаний:

а) $\forall\ a \in Q$: $a^{32} \cdot a^{43} = a^{75}$;

б) $\exists\ a \in Q$, $a \neq 0$: $a^{32} \cdot a^{43} = 2a^{75}$;

в) $\forall\ a \in Q$: $a^{32} \cdot a^{43} = a^{32} + a^{43}$;

г) $\forall\ n \in N$: $28^n = 7^n + 4^n$;

д) $\forall\ n \in N$: $28^n = 7^n \cdot 4^n$;

е) $\exists\ a, b \in Q$: $(a - b)^3 = a^3 - b^3$.

505 Множества A, B и C заданы перечислением их элементов:

$A = \{-11; -8; 3; 5\}$; $B = \{-11; 2; 3; 7\}$; $C = \{3; 5; 7; 9\}$.

1) Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A, B и C и отметьте на ней элементы данных множеств.

2) Найдите:

а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $B \cup C$; г) $B \cap C$; д) $(A \cup B) \cap C$; е) $C \cup (A \cap B)$; ж) $B \cap C \cap A$; з) $A \cup B \cup C$.

506 Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A и B. Найдите их пересечение и объединение:

а) $A = \{a\colon a = 5n + 3;\ n \in N;\ 0 \leqslant n < 5\}$;
$B = \{b\colon b = 3m + 2;\ m \in N;\ -1 < m \leqslant 3\}$;

б) $A = \{a\colon a = -4n + 3;\ n \in N;\ -2 \leqslant n < 2\}$;
$B = \{b\colon b = 3m + 1;\ m \in N;\ 0 < m < 3\}$.

507 Переведите в указанные единицы измерения и вычислите:

а) в килограммы:
0,78 т – 595 кг + 615 г + 3,2 ц;

б) в сантиметры:
15,9 м – 215 мм – 15,9 см – 21,4 дм;

в) в часы:
45 мин + 2 суток – 12,25 ч – 3600 с;

г) в рубли:
6,7 тыс.р. – 1200 коп. + 245,3 р. – 90 коп.

508 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{9p^2 + 24pq + 16q^2}{3p + 4q}$; в) $\dfrac{4x^2 - 28xy + 49y^2}{4x^2 - 49y^2}$; д) $\dfrac{8m^3 - 36m^2n + 54mn^2 - 27n^3}{4m^2 - 12mn - 9n^2}$;

б) $\dfrac{7m - 5n}{49m^2 - 70mn + 25n^2}$; г) $\dfrac{25c^2 - 9d^2}{25c^2 + 30cd + 9d^2}$; е) $\dfrac{64p^3 - q^3}{16p^2 + 4pq + q^2}$.

509 Найдите неполное частное и остаток при делении на (−11) следующих чисел:

а) 0; в) 12; д) 15; ж) 27; и) −45; л) 98;

б) 5; г) −12; е) −15; з) −27; к) 45; м) −98.

510 Докажите:

а) Если целое число делится на (−7), то оно не может при делении на (−14) давать остаток 5.

б) Если целое число при делении на (−12) дает остаток 5, то оно не делится на (−4).

в) Если целое число делится на (−5), то при делении на (−15) оно не может давать остаток 11.

г) Если целое число при делении на (−36) дает остаток 35, то оно не делится на (−9).

511 а) Средний возраст 12 игроков баскетбольной команды равен 24 года, а средний возраст этих игроков вместе с тренером равен 25 годам. Сколько лет тренеру этой баскетбольной команды?

б) В городе N был проведен анализ стоимости картофеля. Для этого были собраны данные о стоимости 1 кг картофеля в 10 магазинах и на 5 рынках города. После вычислений получилось, что в городе N средняя стоимость 1 кг картофеля в магазинах составляет 19,5 р., а средняя стоимость картофеля на рынках – 18,3 р. Чему равна средняя стоимость 1 кг картофеля в этих 15 торговых точках города N?

в) Выехав из Москвы в Санкт-Петербург, автомобилист проехал сначала 120 км со скоростью 60 км/ч, затем 240 км – со скоростью 80 км/ч, а последние 350 км – со скоростью 70 км/ч. С какой средней скоростью передвигался автомобилист по дороге из Москвы в Санкт-Петербург?

512 Может ли среднее арифметическое 27 целых чисел равняться 19,8?

Д **513** Вынесите общий множитель за скобку и, выполнив умножение, проверьте правильность своего результата:

а) $17x + 51y$; б) $a^4 + 7a$; в) $4b^5 - 16b^3$; г) $y^3 - xyz$.

514 Разложите многочлен на множители:

а) $16a^2 - 7a^4$; в) $5c^2d + 15cd^2$; д) $8zt^3 - 14z^2t^5$;

б) $7b^5 - 11b^3$; г) $9x^4y^4 - 27x^3y^3$; е) $12pq^5 - 16q^6$.

515 Запишите выражение в виде произведения многочленов:

а) $ab - ac - ad$; в) $9m^3n - 18m^2n^2 - 12m^5n^3$; д) $14x^5y^4 - 21x^2y^4 + 28x^7y^3$;

б) $-5x - xy + xz$; г) $8r^4t^3 - 24r^2t^3 + 20rt^2$; е) $12p^6q^5 + 6p^7q^3 - 48p^5q^9$.

516 Найдите значение выражения:

а) $a^4b^2 - a^2b^4$ при $a = 3$; $b = -2$;

б) $16c^2d - 12cd$ при $c = 0{,}5$; $d = 40$;

в) $\dfrac{9z - 12}{9z^2 - 24z + 16}$ при $z = 3$;

г) $\dfrac{7x^2 + 21y}{x^4 - 9y^2}$ при $x = 4$; $y = 2$.

517 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{6ab - 12a}{3ab - 6a}$;

б) $\dfrac{7c^2 - 4cd}{21cd - 12d^2}$;

в) $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{9x - 9y}$;

г) $\dfrac{3z - 4t}{9z^2 - 24zt + 16t^2}$;

д) $\dfrac{9p^2 + 48pq + 64q^2}{9p^2 - 64q^2}$;

е) $\dfrac{27m^3 + 8n^3}{9m^2 - 6mn + 4n^2}$.

518 Разложите многочлен на множители:

а) $x(y - z) + y(y - z)$;

б) $3b(a + c) - 7c(a + c)$;

в) $5m^2(m + 2) - n(-2 - m)$;

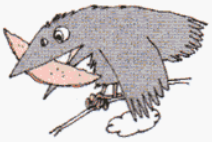
г) $8(p - 7) + 3q^2(7 - p)$;

д) $(c - d)^2 + (d - c)$;

е) $(5x + y)^2 + (5x + y)$;

ж) $a^2(3 - b^2)^2 + b^2(b^2 - 3)$;

з) $2p^2(q^2 + 9)^2 - 12q^2(-q^2 - 9)$.



519 Решите уравнение:

а) $x^2 + 7x = 0$;

б) $9y^2 - y = 0$;

в) $-4z + 24z^2 = 0$;

г) $a(4a - 1) - 5(4a - 1) = 0$;

д) $3b(7b + 5) + 9(7b + 5) = 0$;

е) $4c(8c - 12) - 5(8c - 12) = 0$;

ж) $7p^3 + 3p^2 = 0$;

з) $q^5 - q^4 = 0$;

и) $11p^9 + 6p^8 = 0$.

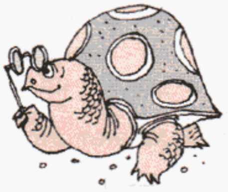
520 Представьте выражение в виде произведения двух многочленов:

а) $(7a - 3b)(4a - 3c) - (8a - 4b)(4a - 3c)$;

б) $(2x + 5y)(8z + 9t) + (2x + 5y)(11z + 5t)$;

в) $p^2(p^2 - q^2) + q^2(p^2 - q^2)$;

г) $mn(m^2 + 2mn + n^2) + mn(m^2 - 2mn + 2n^2)$.



521 Найдите значение выражения:

а) $a(b - 3) - b(b - 3)$ при $a = 3{,}8$; $b = 2{,}3$;

б) $(3c - 2d)(6r + 3s) - (3c - 2d)(4r + 5s)$ при $c = 7$; $d = 0{,}5$; $r = 0{,}3$; $s = 0{,}4$.

522 Разложите многочлен на множители:

а) $4x(x - 1) - 3y(x - 1) + 5z(x - 1)$;

б) $m(m - n - p) - n(m - n - p) + p(m - n - p)$;

в) $5a(a + b - c) + 4b(a + b - c) - 6c(a + b - c)$;

г) $x(3 - y^2) + y(y^2 - 3) - 3 + y^2$;

д) $7a(c + d) + c + d$;

е) $3m(z + r) - nz - nr$.

523 Представьте выражение как произведение ($n, m \in N$):

а) $5^{n+2} + 5^n$; б) $2^{m+3} - 2^m$; в) $7^{n+1} - 7^{n-1}$; г) $8^{3m+1} - 8^{3m-1}$.

524 Множества A, B и C заданы перечислением их элементов:

$A = \{-5;\ -3;\ 4;\ 7\}$; $\qquad B = \{-3;\ 2;\ 4;\ 9\}$; $\qquad C = \{3;\ 4;\ 7;\ 9\}$.

1) Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A, B и C и отметьте на ней элементы данных множеств.

2) Найдите:

а) $A \cup B$; б) $A \cap C$; в) $C \cup (A \cap B)$; г) $A \cap B \cap C$.

525 Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A и B. Найдите их пересечение и объединение:

$A = \{a\colon a = 7n + 5;\ n \in N;\ 1 \leqslant n < 5\}$; $B = \{b\colon b = 4m + 1;\ m \in N;\ 5 < m \leqslant 8\}$.

526 Найдите неполное частное и остаток при делении на (-9) следующих чисел:

а) 0; в) 11; д) 14; ж) 25; и) -37; л) 56;

б) 6; г) -11; е) -14; з) -25; к) 37; м) -56.

527 Докажите:

а) Если целое число делится на (-3), то оно не может при делении на (-12) давать остаток 7.

б) Если целое число при делении на (-12) дает остаток 5, то оно не делится на (-18).

528 а) В пончиковой компании Антона и Ксюши провели анализ цен на пончики у конкурентов в разных городах. Средняя цена одного пончика в пяти городах Центрального региона России равна 15,6 р., в восьми городах Северо-Западного региона – 16,8 р., а в семи городах Южного региона – 18,6 р. Чему равна средняя цена одного пончика в этих 20 городах?

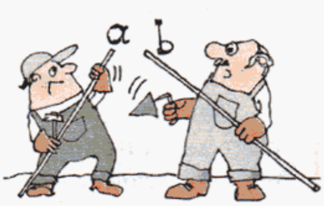
б) По дороге из дома в офис Антон проехал на автомобиле сначала 12,8 км со скоростью 16 м/с, затем 11 км – со скоростью 22 м/с, а последние 20 км – со скоростью 10 м/с. С какой средней скоростью Антон ехал из дома в офис? (Ответ округлите с точностью до десятых метра в секунду.)

529 Может ли среднее арифметическое 56 целых чисел равняться 13,2?

530 Докажите, что разность кубов A и B делится на 29:

$$A = \left(33\frac{16}{18} - 26\frac{34}{36} + 1\frac{22}{48}\right) \cdot 6\frac{6}{11} + 15 \cdot 20{,}15 : 2{,}5 - 100{,}9;$$

$$B = 17{,}5 - 7\frac{7}{9} \cdot \left(0{,}85 + \frac{4}{35}\right) + 75{,}11 : 3{,}7 \cdot \frac{10}{29}.$$



C **531*** В строку выписали одно за другим натуральные числа от 1 до 60:

1234567891011...585960

Вычеркните 100 цифр, чтобы оставшееся число было как можно

а) бо́льшим; б) меньшим.

532* Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый – с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета в таком мяче?

2. Способ группировки

«Как показывает опыт, ничто с такой силой не побуждает высокие умы к работе над обогащением знания, как постановка трудной и в то же время полезной задачи».

Иоганн Бернулли (1667–1748),
швейцарский математик

В некоторых случаях удается разложить на множители и такие многочлены, члены которых не имеют общего буквенного множителя.

Рассмотрим, например, многочлен

$$3ac + 3bc - 8ad - 8bd.$$

Его члены не имеют общего буквенного множителя. Но мы можем сгруппировать их так, что после некоторых преобразований общий множитель будут иметь образованные нами группы.

Например, в первую группу объединим первый и второй члены многочлена, а во вторую – третий и четвертый (при этом если перед вторыми скобками мы поставим знак «минус», то не забудем поменять знаки слагаемых в скобках на противоположные). После этого из каждой группы вынесем за скобки общий множитель:

$$3ac + 3bc - 8ad - 8bd = (3ac + 3bc) - (8ad + 8bd) = 3c(a + b) - 8d(a + b).$$

Мы получили сумму двух выражений, каждое из которых имеет множитель $a + b$. Вынесем его за скобки:

$$3c(a + b) - 8d(a + b) = (a + b)(3c - 8d).$$

В результате нам удалось разложить исходный многочлен на множители:

$$3ac + 3bc - 8ad - 8bd = (a + b)(3c - 8d).$$

Способ, которым мы здесь воспользовались, называется **способом группировки.** Он состоит в том, что мы объединяем члены многочлена в группы таким образом, чтобы после проведения некоторого числа равносильных преобразований у слагаемых нового выражения появились общие множители.

Заметим, что вовсе не обязательно группировать члены многочлена, стоящие рядом. Например, в рассмотренном нами многочлене можно было сгруппировать первый член с третьим, а второй – с четвертым:

$$3ac + 3bc - 8ad - 8bd = (3ac - 8ad) + (3bc - 8bd) = a(3c - 8d) + b(3c - 8d) =$$

$$= (3c - 8d)(a + b).$$

Однако далеко не каждая группировка приводит к разложению многочлена на множители. Так, если в рассмотренном нами примере сгруппировать первый член с четвертым, а второй – с третьим, то желаемого результата мы не получим.

Выбор подходящей группировки требует порой большой изобретательности. Но существуют некоторые стандартные приемы. Именно их мы сейчас и рассмотрим.

Перестановка слагаемых

Если слагаемые, которые мы хотим объединить в группы, идут не подряд, то часто бывает удобно поменять их местами. Мы можем это сделать на основании переместительного закона сложения. Перестановка слагаемых позволяет избежать ошибок при составлении групп, особенно тогда, когда слагаемых достаточно много.

Пример 1. Разложите на множители многочлен

$$3x^3 + 7xy + 3x^2 + 7yx^2 + 3x + 7y.$$

Решение:

Сгруппируем в нашем многочлене слагаемые с коэффициентом 3 и слагаемые с коэффициентом 7 и вынесем в каждой группе за скобки общий множитель. Тогда

$$3x^3 + 7xy + 3x^2 + 7yx^2 + 3x + 7y = (3x^3 + 3x^2 + 3x) + (7xy + 7yx^2 + 7y) =$$
$$= 3x(x^2 + x + 1) + 7y(x + x^2 + 1) = 3x(x^2 + x + 1) + 7y(x^2 + x + 1).$$

Значит, исходный многочлен можно записать в виде суммы двух выражений, каждое из которых имеет множителем трехчлен $x^2 + x + 1$. Вынося его за скобки, получаем

$$3x(x^2 + x + 1) + 7y(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(3x + 7y).$$

Таким образом, исходный многочлен разложен на множители:

$$3x^3 + 7xy + 3x^2 + 7yx^2 + 3x + 7y = (x^2 + x + 1)(3x + 7y).$$

Представление члена многочлена в виде суммы или разности подобных ему членов

Нередко члены многочлена, который требуется разложить на множители, нельзя сразу разбить на нужные группы. В этом случае можно попробовать представить какой-нибудь из его членов в виде суммы или разности нескольких подобных ему одночленов. Проиллюстрируем сказанное следующими примерами.

Пример 2. Разложите на множители многочлен $x^6 + 5x^3 + 4$.

Решение:

Коэффициенты членов исходного многочлена равны 1, 5, 4. Так как $5 = 1 + 4$, представим $5x^3$ в виде суммы подобных ему одночленов с коэффициентами 1 и 4. Тогда

$$x^6 + 5x^3 + 4 = x^6 + (x^3 + 4x^3) + 4 = x^6 + x^3 + 4x^3 + 4.$$

Теперь в первую группу объединим первые два слагаемых, а во вторую – третье и четвертое, после чего вынесем в каждой из групп общие множители. Получим

$$x^6 + x^3 + 4x^3 + 4 = (x^6 + x^3) + (4x^3 + 4) = x^3(x^3 + 1) + 4(x^3 + 1).$$

Каждое из слагаемых полученной суммы имеет множитель $x^3 + 1$. Вынесем его за скобки:

$$x^3(x^3 + 1) + 4(x^3 + 1) = (x^3 + 1)(x^3 + 4).$$

Таким образом, исходный многочлен разложен на множители:

$$x^6 + 5x^3 + 4 = (x^3 + 1)(x^3 + 4).$$

Пример 3. Разложите на множители многочлен $3y^2 + 7y - 10$.

Решение:

Коэффициенты членов исходного многочлена равны 3, 7, –10. Представим $7y$ в виде разности одночленов $10y - 3y$, тогда

$$3y^2 + 7y - 10= 3y^2 + (10y - 3y) - 10 = 3y^2 + 10y - 3y - 10 = 3y^2 - 3y + 10y - 10 =$$
$$= 3y(y - 1) + 10(y - 1).$$

Мы записали исходный многочлен в виде суммы двух выражений, каждое из которых имеет множитель $y - 1$. Вынесем его за скобки:

$$3y(y - 1) + 10(y - 1) = (y - 1)(3y + 10).$$

Таким образом, исходный многочлен разложен на множители:

$$3y^2 + 7y - 10 = (y - 1)(3y + 10).$$

Прибавление и вычитание одного и того же слагаемого

Следующий прием разложения многочлена на множители основан на том, что если мы к многочлену прибавим и вычтем из него одно и то же выражение, то многочлен от этого не изменится.

Пример 4. Разложите на множители многочлен $x^5 - 1$.

Решение:

В данном многочлене всего два члена. Чтобы разложить его на множители с помощью группировки, добавим и вычтем из него одночлены x^4, x^3, x^2 и x, а затем сгруппируем их попарно и вынесем из каждой группы за скобки общий множитель. Получим

$$x^5 - 1 = \underbrace{x^5 - x^4} + \underbrace{x^4 - x^3} + \underbrace{x^3 - x^2} + \underbrace{x^2 - x} + \underbrace{x - 1} =$$

$$= (x^5 - x^4) + (x^4 - x^3) + (x^3 - x^2) + (x^2 - x) + (x - 1) =$$

$$= x^4(x - 1) + x^3(x - 1) + x^2(x - 1) + x\,(x - 1) + (x - 1).$$

Мы записали исходный многочлен в виде суммы выражений, каждое из которых имеет множитель $x - 1$. Вынесем его за скобки:

$$x^4(x - 1) + x^3(x - 1) + x^2(x - 1) + x\,(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

Таким образом, исходный многочлен разложен на множители:

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

Конечно, чтобы догадаться о том, какие слагаемые надо добавить и вычесть из многочлена, зачастую нужно попробовать много разных вариантов. И, наблюдая за тем, как изменяется при этом исходный многочлен, какие возможности его разложения появляются, можно в итоге получить искомое разложение.

К **533** Вычислите рациональным способом:

а) $7 \cdot 43 + 12 \cdot 5 - 23 \cdot 7 + 5 \cdot 68$;

б) $9{,}6 \cdot 46 - 14{,}3 \cdot 59 + 54 \cdot 9{,}6 - 141 \cdot 14{,}3$;

в) $136 : 5 + 213 : 8 + 114 : 5 - 13 : 8$;

г) $7{,}8 : 14 - 73{,}4 : 9 + 20{,}2 : 14 - 16{,}6 : 9$.

534 Среди представленных одночленов найдите пять пар одночленов, имеющих общие буквенные множители:

а) $7x^3y^2$, $3ab^2$, $40m^2n^3$, $11ax^2$, $2b^4y^3$, $17a^4b^2$, $19x^2y$;

б) $3ab$, $16m^3n$, $15xy$, $11xz$, $4c^2d$, $9x^3y^4$, $14mn^4$, $18a^5p^3$.

535 Среди представленных выражений найдите те, которые имеют общие буквенные множители:

а) $x(x-4)$, $p(p-4)$, $y(4-x)$, $2a(x-y)$, $-3b(x-4)$, $4m(x-1)$;

б) $2k(p-q)$, $3m(a+b)$, $q(a^2+b^2)$, $n(a^2-b^2)$, $-7b(a+b)^2$, $c(-a-b)$;

в) $4a(m^2+1)$, $5b(m-1)$, $-3n(m+1)$, $c(m-1)^3$, $7k(1-m)$, $11p(m^3-1)$;

г) $11c(c+3)$, $7d(c^2+9)$, $-4x(c-3)$, $9y(c^3+27)$, $5k(c^3+81)$, $17(c+3)^3$.

536 1) Убедитесь в том, что все члены многочлена не имеют общего буквенного множителя:

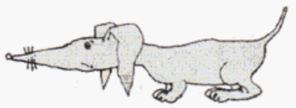
$$2x^2+2xy+9x+9y.$$

Разложите данный многочлен на множители, группируя члены, имеющие общие множители.

2) Проанализируйте решение предыдущего примера и сформулируйте идею способа группировки при разложении многочлена на множители. Сравните свой вывод с формулировкой, приведенной на стр. 98 учебника.

3) Предложите другой вариант группировки, позволяющий разложить данный многочлен на множители.

537 Докажите, что для любых a, b, $c \in Q$:



а) $a(b-c) = -a(c-b)$; б) $a(-b-c) = -a(b+c)$.

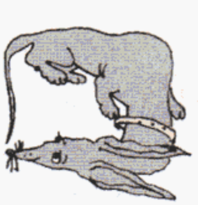
538 Разложите многочлен на множители способом группировки:

а) $3x(a+b)+a+b$;
б) $4z(p-q)+p-q$;
в) $6a(x+y)-x-y$;
г) $11d(m-n)-m+n$;
д) $2a(x+y)-3y-3x$;
е) $5b(z-t)+5t-5z$;
ж) $8c(2v-w)-4w+8v$;
з) $6d(3p+2q)-9p-6q$;
и) $(x+y)^2-x-y$;
к) $3a-4b-(4b-3a)^2$;
л) $(p-q)^2-9p+9q$;
м) $(m-n)^2-mk+kn$.

539 Разложите многочлен на множители:

а) $5x+5y+3xz+3yz$;
б) $11z-11s-8zr+8sr$;
в) $pq+pr+12q+12r$;
г) $9m-9n+kn-km$;
д) $ab+ac-2b-2c$;
е) $5-4bx-5x+4b$;
ж) $mn+nk-m-k$;
з) $cd-cr-d+r$;
и) $xy+yz+nx+nz$;
к) $ab-ac+db-dc$;
л) $p^2+pq+pr+qr$;
м) $m^2-mn+kn-km$;
н) $x^3+7x^2+7x+49$;
о) $p^2+pq-7p-7q$;
п) $z^2-zx-4z+4x$;
р) $a^2-6a-ab+6b$;
с) a^3+a^2b+a+b;
т) $x^2+xy-x-y$;
у) b^3-b^2-b+1;
ф) $12y^2+3ay-4y-a$;
х) $6x^3-3x-1+2x^2$;
ц) $7x^4z-2y+7yz-2x^4$;
ч) $3m^3-12nk-3nmk+12m^2$;
ш) $5z^3a+8y-10z^2-4ayz$.

540 Найдите значение выражения:



а) $x^2-7x+xy-7y$ при $x=9{,}6$; $y=0{,}4$;

б) $p^2+4q-pq-4p$ при $p=4{,}5$; $q=-5{,}5$;

в) $5m^2+8n-5mn-8m$ при $m=2{,}4$; $n=-2{,}6$;

г) $9ab-2cd+2ad-9cb$ при $a=5{,}7$; $b=\dfrac{1}{3}$; $c=-0{,}3$; $d=-4$.

541 Разложите многочлен на множители двумя разными способами:

а) $15ab - 5bc + 3ad - cd$;
б) $8zy - 20zx - 6ry + 15rx$;
в) $3b^2 - 3bc - 8b + 8c$;
г) $6p^2 + 6pq - 7p - 7q$;
д) $4rm - 9sm - 9sn + 4rn$;
е) $24a^2 - 18ab + 45bc - 60ac$;
ж) $11d^2 + 8c^2 - 8cd - 11dc$;
з) $r^3 + r^2s - r^2t - rst$;
и) $m^3 + m^2 + m + 1$;
к) $n^5 - n^3 - n^2 + 1$.

542 Представьте выражение в виде произведения многочленов степени большей нуля:

а) $2abc + 4ac + 10ab + 20a$;
б) $21x + 35x^3 + 3x^2 + 5x^4$;
в) $4c^4 - 6c^2r - 6crd + 4c^3d$;
г) $2z^4 + 3z^2 - 9z - 6z^3$.

543 Каким одночленом можно заменить A, чтобы полученный в результате замены многочлен можно было разложить на множители?

а) $3ab + cb + 3ad + A$;
б) $x^4 - 5x^3 + 7x + A$;
в) $4pr + 12p - 3qr + A$;
г) $8y^2z - 24y - 12z + A$.

544 Разложите многочлен на множители способом группировки:

а) $3x^2 - x + 3xy - y - 3xz + z$;
б) $ac^2 - bc^2 - bc + ac - a + b$;
в) $xy^2 + zy^2 - zy - xy + x + z$;
г) $mr^2 + nr^2 + mr - sr^2 + nr - sr$;
д) $pt^2 + qt^2 - qt - pt + wt^2 - wt$;
е) $a^2b + a + ab^2 + b + 2ab + 2$;
ж) $z^2x - xy - tz^2 - zy + ty + z^3$;
з) $x^2a + bx + yb^2 + abxy + a^2bx + ab^2$;
и) $c^4d - c^5 - c^3d^2 + c^2d^3 - cd^4 + d^5$;
к) $ax^2 + by^2 + ay^2 + bx^2 + cx^2 + cy^2$.

545 Разложите трехчлен на множители, представляя один из его членов в виде суммы или разности подобных членов:

а) $a^2 + 5a + 6$;
б) $b^2 - 6b + 8$;
в) $c^2 + 8c + 7$;
г) $d^2 + 4d + 3$;
д) $k^2 + 9k - 10$;
е) $x^2 + 5xy + 4y^2$;
ж) $z^2 + 6zt + 5t^2$;
з) $u^2 - 4uw + 3w^2$;
и) $m^2 - 9mn + 20n^2$;
к) $2p^2 - pq - q^2$;
л) $p^3 - 8p^2 + 45$;
м) $q^4 - q^2 - 6$;
н) $r^4 - 7r^2 + 12$;
о) $s^4 + 7s^2 + 12$;
п) $2t^4 - t^2 - 3$.

546 Решите уравнение:

а) $(x^2 - 5x) + 5 - x = 0$;
б) $(y^2 + 3y) - 4y - 12 = 0$;
в) $z^2 - 2z - 15 = 0$;
г) $t^2 + 5t - 14 = 0$;
д) $r^2 - 6r - 7 = 0$;
е) $s^2 + 3s - 4 = 0$;
ж) $a^2 - 14a + 48 = 0$;
з) $b^2 - 5b + 6 = 0$;
и) $c^2 - 3c + 2 = 0$;
к) $d^2 + d - 20 = 0$;
л) $p^2 - 4p - 21 = 0$;
м) $q^2 - q - 30 = 0$.

547 Докажите тождество:

а) $(a - 3b)(a^2 + 2ab + b^2) + (3b - a)(a^2 - 2ab + b^2) = 4a^2b - 12ab^2$;
б) $x^2(x^2 - 5xy + 7y^2) - y^2x^2 + 5xy^3 - 7y^4 - y(x^2 - y^2)(7y - 5x) = x^4 - x^2y^2$.

548 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{3x + 3y - bx - by}{5x^2 + 5xy}$; г) $\dfrac{25 - p^2}{2pq - 10q + 4p - 20}$; ж) $\dfrac{15a + 5b}{6ac + 2bc - 3ad - bd}$;

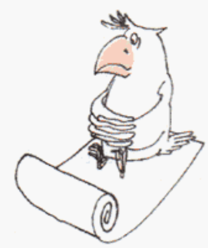
б) $\dfrac{ax - x^2}{a^2 - ax + 7x - 7a}$; д) $\dfrac{4m^2 - mn + 6n - 24m}{4mn - n^2 + 24m - 6n}$; з) $\dfrac{2pa + 2pb + qa + qb}{2pa + qa - 2bp - bq}$;

в) $\dfrac{ab + 7a - 7b - 49}{a^2 - 14a + 49}$; е) $\dfrac{9rs - r^2 - 9s + r}{9s^2 - rs + 9s - r}$; и) $\dfrac{49 - x^2}{35xy - 5x^2y + 6x - 42}$.

549 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{ad + bd + 4a + 4b}{5d + 20} \cdot \dfrac{10d - 30}{ad + bd - 3a - 3b}$;

б) $\dfrac{xy - 7xc + 4y - 28c}{4c^2y - 28c^3} \cdot \dfrac{c^3y + 7c^4}{2xy + 8y + 14cx + 56c}$.



550 Разложите многочлен на множители:

а) $3x^2 + 10x - 8$; в) $4z^2 + 25z - 21$; д) $4b^2 - 14b + 12$;

б) $2y^2 - y - 15$; г) $6a^2 + a - 12$; е) $9c^2 - 6c - 35$;

ж) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$; з) $p^2(q + r) + q^2(p + r) + r^2(p + q) + 3pqr$.

551 Найдите значение выражения:

а) $a^3 - b^3 - a^2b^2 + ab$ при $a = 0{,}5$; $b = 1{,}5$;

б) $5p^3 - 8q^3 - 40p^2q^2 + pq$ при $p = 0{,}2$; $q = 0{,}25$;

552 Какие одночлены можно подставить вместо A, B и C, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $8x^3 - 12x^2y - 18xy + A = (2x - 3y)(B + C)$;

б) $12a^3 + 15a^2b - A - 40b^3 = (B - C)(3a^2 - 8b^2)$;

в) $63p^4 - A - 9pq^3 + 4q^3 = (B - C)(7p^3 - q^3)$;

г) $44m^5 - A + 36m - 63n = (11m^4 + 9)(B - C)$.

553 Разложите многочлен на множители:

а) $(mx + ny)^2 + (my - nx)^2 + k^2x^2 + k^2y^2$;

б) $(pq + rs)^3 + (ps + qr)^3 - (p^3 + r^3)(q^3 + s^3)$;

в) $t^3 + at^2 + abt + bt^2 + bct + act + ct^2 + abc$;

г) $s^3 - rs^2 + prs - ps^2 - qrs - pqs + qs^2 + pqr$.

554 Решите уравнение:

а) $y^3 - 7y^2 + y - 7 = 0$; в) $2z^3 + 6z^2 + 9z + 27 = 0$;

б) $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 35x = 0$; г) $3t^3 - 18t^2 + 8t - 48 = 0$.

555 Разложите многочлен на множители, добавляя и вычитая слагаемые:

а) $x^5 - 32$; в) $r^4 - 1$; д) $y^7 - 1$;

б) $z^5 + z + 1$; г) $s^8 - 1$; е) $a^9 - 1$.

556 Прочитайте высказывания и запишите их на математическом языке. Определите истинность высказываний. Для ложных высказываний постройте их отрицания:

а) Квадрат суммы двух рациональных чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого и второго чисел, плюс квадрат второго числа.
б) Квадрат разности некоторых рациональных чисел равен разности их квадратов.
в) Существуют рациональные числа, квадрат суммы которых равен квадрату их разности.
г) Куб разности двух рациональных чисел может быть не равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата первого и второго чисел, плюс утроенное произведение первого и квадрата второго чисел, минус куб второго числа.

557 Используя диаграммы Эйлера–Венна, определите правильность логического вывода:

а) Если некоторые решения уравнения $x^2 - 1 = 0$ – отрицательные числа, то некоторые отрицательные числа – решения этого уравнения.
б) Если все решения уравнения $x^2 - 9 = 0$ кратны 3 и некоторые числа, кратные 3, кратны 9, то некоторые числа, кратные 9, – решения уравнения $x^2 - 9 = 0$.
в) Если ни одно решение уравнения $(x - 1)(x - 2) = 0$ не кратно 5, а некоторые числа, кратные 5, делятся на 3, значит, некоторые делящиеся на 3 числа не являются решениями уравнения $(x - 1)(x - 2) = 0$.
г) Если все решения уравнения $(x - 7)(x - 21) = 0$ кратны 7 и ни одно решение этого уравнения не кратно 9, то некоторые кратные 7 числа не кратны 9.

558 Сравните значения числовых выражений:

а) $5^{17} + 5^{15}$ и $5^{17} \cdot 5^{15}$;
б) $7^{34} - 7^{27}$ и $7^{34} : 7^{27}$;
в) $(11^{15})^2(11^2)^{15}$ и $(11^{15})^2 + (11^2)^{15}$;
г) $(178 + 595)^2$ и $178^2 + 595^2$;
д) $(1314 - 98)^2$ и $1314^2 + 98^2$;
е) $(904 + 79)^3$ и $904^3 + 79^3$.

559 Представьте выражение в виде произведения степеней простых чисел и букв:

а) $(7x)^{23}$;
б) $(45a)^{12}$;
в) $(-11z)^{28}$;
г) $(4p^3q)^{13}$;
д) $(-56b)^{26}$;
е) $(-5r^5s^7)^8$;
ж) $(63c)^{17}$;
з) $(3a^7b^9c^{11})^9$.

560 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{x^{16} \cdot x^{27} \cdot x^{36} \cdot (x^4)^3 \cdot (3x)^{23}}{3^{21} \cdot x^{11} \cdot (x^{51} : x^{34}) \cdot x^{66} \cdot x^{19}} + 16x^0$, если $x = 3$;

б) $\dfrac{a^{43} \cdot (b^{69} : b^{47}) \cdot c^{85} \cdot (a^6)^8 \cdot b^{39}}{(abc)^{37} \cdot b^{23} \cdot (a^{34} : a^{17}) \cdot (a^{12})^3 \cdot c^{47}} - 7(ab)^0$, если $a = 4$, $b = 3$, $c = 6$.

561 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\dfrac{6}{259}$ и $\dfrac{5}{407}$;
б) $\dfrac{3}{335}$ и $\dfrac{4}{1273}$;
в) $\dfrac{5}{1391}$ и $\dfrac{7}{2033}$.

562 а) В бюджете розничной сети запланировано к концу второго года добиться снижения расходов по сравнению с текущими годовыми расходами на 36%. Каждый год расходы должны снижаться на одно и то же число процентов. На сколько процентов нужно в течение этих двух лет снижать ежегодные расходы?

б) В городе N в настоящее время живет 69 212 жителей. Известно, что население этого города последние три года ежегодно увеличивалось на 10%. Сколько человек жило в этом городе 3 года назад?

в) Вложив в инвестиционный фонд 20 000 р., вкладчик получил через 2 года доход в размере 8 800 р. Известно, что годовая рентабельность вложений (отношение дохода к сумме вложенных денег) в этом инвестиционном фонде в эти годы была одинаковой. Чему была равна годовая рентабельность вложений в этом инвестиционном фонде?

563 Зная, что 1 января 2011 года суббота, определите, каким днем недели будет:

а) 1 мая 2011 г.; б) 1 сентября 2011 г.; в) 31 декабря 2011 г.

564 Какой остаток при делении на 8 дает число $999^{7777} \cdot 7777^{999}$?

Д **565** Разложите многочлен на множители способом группировки:

а) $7m(m - n) + m - n$; г) $4c(r - s) - s + r$; ж) $(2m + n)^2 - 2m - n$;
б) $6p(p - q) + q - p$; д) $3x(5y - z) - 15y + 3z$; з) $5x - 3y - (3y - 5x)^2$;
в) $11a(a + b) - a - b$; е) $8r(6s + 7t) - 28t - 24s$; и) $7p + 2q + (2q + 7p)^2$.

566 Разложите многочлен на множители:

а) $4x^2 + 4xy + 9x + 9y$; д) $ab - bc + da - dc$; и) $r^3 - r^2s + r - s$;
б) $8 - 3bx - 8x + 3b$; е) $m^2 + mn - 5m - 5n$; к) $6x^4z - 9y + 6yz - 9x^4$;
в) $ab + bc - a - c$; ж) $3y^2 - 3yx - 7y + 7x$; л) $7m^3 - 13nk - 7nmk + 13m^2$;
г) $rs - rt - s + t$; з) $4a^2 - 15a - 4ab + 15b$; м) $6z^3a + 6y - 12z^2 - 3ayz$.

567 Найдите значение выражения:

а) $a^2 - 8a + ab - 8b$ при $a = 0{,}8$; $b = 1{,}2$;
б) $4c^2 + 5dc - 4cd - 5d^2$ при $c = 0{,}6$; $d = -0{,}4$.

568 Представьте выражение в виде произведения многочленов степени большей нуля:

а) $3xyz + 7xz + 9xy + 21x$; в) $12a^4 - 18a^2b - 18abc + 12a^3c$;
б) $ab^2 + cb^2 + ab - db^2 + cb - db$; г) $m^4n - m^5 - m^3n^2 + m^2n^3 - mn^4 + n^5$.

569 Разложите трехчлен на множители, представляя один из его членов в виде суммы или разности подобных членов:

а) $x^2 + 6x + 8$; г) $a^2 + ab - 6b^2$; ж) $m^2 + 5m - 14$;
б) $y^2 - 10y + 21$; д) $c^2 + 7cd + 12d^2$; з) $a^2 - a - 6$;
в) $z^2 + 12z + 32$; е) $a^2 - 2ay - 35y^2$; и) $n^2 + 2n - 48$.

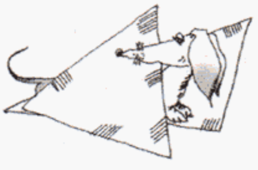
570 Решите уравнение:

а) $(a^2 - 3a) + 3 - a = 0$; в) $c^2 - 11c + 28 = 0$; д) $y^2 + y - 12 = 0$;
б) $b^2 + 2b - 15 = 0$; г) $x^2 - 4x - 12 = 0$; е) $z^2 + 8z + 15 = 0$.

571 Сократите дроби при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{ax - xb}{a^2 - ab + 9b - 9a}$; в) $\dfrac{5pq - 6p^2 + q^2}{7q - pq - 7p - p^2}$;

б) $\dfrac{ab + 4a - 4b - 16}{a^2 - 8a + 16}$; г) $\dfrac{28a + 7b}{12ac + 3bc - 4ad - bd}$.



572 Разложите многочлен на множители:

а) $3x^2 + 22x - 16$; б) $4x^2 - 33x - 27$; в) $8x^2 - 19x - 15$; г) $6x^2 - 17x - 28$.

573 Какие одночлены можно подставить вместо A, B и C, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $35x^3 - 20x^2y - 42xy + A = (7x - 4y)(B - C)$;

б) $32m^4 - A + 32m - 56n = (8m^3 + 8)(B - C)$.

574 Решите уравнение:

а) $2y^3 - 18y^2 + y - 9 = 0$; б) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 32x = 0$.

575 Сравните значения числовых выражений:

а) $8^{14} + 8^{12}$ и $8^{14} \cdot 8^{12}$; в) $(215 + 647)^2$ и $215^2 + 647^2$;

б) $11^{45} - 11^{23}$ и $11^{45} : 11^{23}$; г) $(536 - 197)^2$ и $536^2 + 197^2$.

576 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{x^{25} \cdot x^{17} \cdot x^{16} \cdot (7x)^{34}}{7^{33} \cdot x^{19} \cdot (x^{34} : x^{15}) \cdot x^{53}} + 3x^0$ при $x = 3$;

б) $\dfrac{p^{34} \cdot (q^{58} : q^{47}) \cdot r^{85} \cdot (p^6)^8 \cdot q^{39}}{(pr)^{37} \cdot q^{49} \cdot (p^{46} : p^{38}) \cdot (p^{12})^3 \cdot r^{47}} - 9(pqr)^0$ при $p = 4$, $q = 3$, $r = 6$.

577 а) В бюджете пончиковой компании Антона и Ксюши запланировано к концу второго года добиться снижения расходов по сравнению с текущими годовыми расходами на 19%. Каждый год расходы должны снижаться на одно и то же число процентов. На сколько процентов нужно в течение этих двух лет снижать ежегодные расходы?

б) В пончиковой компании Антона и Ксюши в настоящее время работают 432 сотрудника. Известно, что в последние два года число сотрудников пончиковой компании ежегодно увеличивалось на 20%. Сколько человек работало в пончиковой компании 2 года назад?

578 Зная, что 1 января 2012 года воскресенье, определите, каким днем недели будет:

а) 23 февраля 2012 г.; б) 1 июня 2012 г.; в) 4 ноября 2012 г.

579 Какой остаток при делении на 7 дает число $333^{444} \cdot 444^{333}$?

580 Докажите, что A и B являются решениями уравнения $(x - 29)(x + 28) = 0$:

$A = 2\frac{8}{15} \cdot 5 + 4\frac{7}{9} \cdot 3 - 21\frac{7}{15} : 7 + 25\frac{1}{3} : 5$; $B = 7\frac{8}{14} \cdot 7 - 9\frac{5}{18} \cdot 9 + 2 \cdot 28\frac{3}{4} : 23$.

581* Миша, Гоша и Антон решали задачи. Миша решил на 25% больше задач, чем Антон, и на 50% меньше, чем Гоша. На сколько процентов Гоша решил задач больше, чем Антон?

582* Когда пассажир проехал треть всего пути, он стал смотреть в окно и смотрел до тех пор, пока не осталось проехать треть того пути, что он проехал, смотря в окно. Какую часть всего пути пассажир проехал, смотря в окно?

3. Формулы сокращенного умножения и разложение многочленов на множители

«Математика – один из видов искусства».

Норберт Винер (1894–1964),
американский математик и философ,
основоположник кибернетики

Иногда разложить многочлен на множители помогают полученные нами в § 3 этой главы формулы сокращенного умножения. И действительно, если нам надо будет, например, разложить на множители многочлен $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, то, вспомнив формулу куба суммы, мы сразу напишем требуемое разложение:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b).$$

А если на множители надо разложить многочлен $a^3 + b^3$, то, зная формулу суммы кубов, мы запишем

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Конечно, когда для разложения на множители требуется непосредственно применить одну из формул, то ответ мы можем записать сразу. Однако чаще всего раскладывать на множители приходится многочлены, которые не являются явными формулами сокращенного умножения, и, прежде чем применить ту или иную формулу, нужно выполнить некоторые преобразования исходного многочлена. Умение увидеть нужное преобразование приходит с опытом. И каждый, кто хорошо знает формулы сокращенного умножения, может этому научиться.

Рассмотрим несколько примеров, в которых использование формул сокращенного умножения упрощает разложение многочленов на множители.

Пример 1. Разложите на множители многочлен $x^6 - 2x^3 + 1$.

Решение:

Заметим, что $x^6 = (x^3)^2$, $1 = 1^2$, а $2x^3$ является удвоенным произведением x^3 и 1. Значит, для разложения данного многочлена на множители можно воспользоваться формулой квадрата разности. Получаем:

$$x^6 - 2x^3 + 1 = (x^3)^2 - 2 \cdot x^3 \cdot 1 - 1^2 = (x^3 - 1)^2.$$

Пример 2. Разложите на множители многочлен $x^4 - 1$.

Решение:

Каждый член данного многочлена можно представить в виде квадрата: $x^4 = (x^2)^2$, а $1 = 1^2$. Следовательно, для разложения многочлена на множители можно воспользоваться формулой разности квадратов. Получаем:

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

Часто бывает так, что в многочлене, который надо разложить на множители, слагаемые идут не в том порядке, к которому мы привыкли в формуле. Но так как согласно переместительному закону сложения мы можем менять слагаемые местами, то это не должно помешать нам увидеть формулу.

Пример 3. Разложите на множители многочлен $3c - 1 - 3c^2 + c^3$.

Решение:

Переставив слагаемые в данной алгебраической сумме, мы получим куб разности чисел c и 1:

$$3c - 1 - 3c^2 + c^3 = c^3 - 3c^2 + 3c - 1 = (c - 1)^3.$$

Иногда для использования формул сокращенного умножения при разложении многочлена на множители вначале приходится некоторым образом сгруппировать его члены. Так, для решения следующего примера сначала нужно выбрать правильную группировку.

Пример 4. Разложите на множители многочлен $y^3 + y^2 - x^2 - x^3$.

Решение:

Заметим, что первый и четвертый члены многочлена образуют разность кубов y и x, а второй и третий члены – разность квадратов тех же самых чисел y и x. Значит, в обеих группах можно выделить общий множитель $y - x$, а затем вынести его за скобки:

$$y^3 + y^2 - x^2 - x^3 = (y^3 - x^3) + (y^2 - x^2) = (y - x)(y^2 + xy + x^2) + (y - x)(y + x) =$$
$$= (y - x)(y^2 + xy + x^2 + y + x).$$

В некоторых примерах формулы сокращенного умножения становятся видны лишь после вынесения за скобки общего множителя.

Пример 5. Разложите на множители многочлен $7a^2 + 28ab + 28b^2$.

Решение:

Анализируя заданное выражение, замечаем, что каждое его слагаемое имеет общий множитель 7. После вынесения за скобки числа 7 в скобках остается квадрат суммы двух выражений, a и $2b$:

$$7a^2 + 28ab + 28b^2 = 7(a^2 + 4ab + 4b^2) = 7(a + 2b)^2.$$

Одним из способов разложения многочленов на множители с использованием формул сокращенного умножения является ***способ выделения полного квадрата.*** Чтобы проиллюстрировать идею этого способа, рассмотрим следующий пример.

Пример 6. Разложите на множители многочлен $x^2 + 4x + 3$.

Решение:

Заметим, что исходному многочлену не хватает до полного квадрата единицы. Если мы прибавим к нему, а затем вычтем число 1, то выражение не изменится, но в нем можно будет выделить полный квадрат:

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 3 + 1 - 1 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x + 2)^2 - 1.$$

Полученное выражение представляет собой разность квадратов. Разложим его на множители:

$$(x + 2)^2 - 1 = (x + 2 - 1)(x + 2 + 1) = (x + 1)(x + 3).$$

В данном случае можно было бы разложить многочлен на множители и без использования формул сокращенного умножения: разбив слагаемое $4x$ на два слагаемых x и $3x$, а затем проведя группировку:

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + x + 3x + 3 = (x^2 + x) + (3x + 3) = x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x + 3).$$

Таким образом, действуя независимо двумя разными способами, мы получили одно и то же разложение исходного многочлена на множители:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3).$$

Конечно, выбор способа, которым производится разложение многочлена на множители, – это выбор человека, решающего конкретную задачу. Но для того чтобы иметь возможность выбирать, надо знать, какие способы существуют. Ведь, зная различные способы разложения многочленов на множители, вы сможете выбрать тот, который вам покажется наиболее эффективным, или придумать новый свой способ, отличающийся от тех, которые уже известны.

К **583** Среди представленных выражений найдите те, которые являются: а) разностью квадратов; б) суммой кубов; в) разностью кубов.

$a^3 + 27$;	$1 - z^3$;	$pq^2 - 4$;	$r^{12} + 216$;	$p^4r^4 - 1$;
$ab - 81$;	$4y^2 - 9$;	$m^3 + 25$;	$27a^2 - 1$;	$125y^3 + 64$;
$64 - x^3$;	$n^6 - 8$;	$3c^2 - 9$;	$8z^2 - x^2y^4$;	$4x^{10} - 49$;
$4y^2 + 16$;	$b^3 + 8$;	$5x^3 + 27$;	$m^6 - 27$;	$a^2b^4c^6 - 81$.

584 Запишите неполный квадрат суммы и неполный квадрат разности выражений a и b:

а) $a = 2x,\ b = 3y$; в) $a = -3m,\ b = 8n$;

б) $a = 4p,\ b = -7c$; г) $a = -5z,\ b = -2r$.

585 Вычислите (устно):

а) $\dfrac{11^2 - 12^2}{23}$; в) $\dfrac{32^2}{15^2 + 2 \cdot 5 \cdot 17 + 17^2}$;

б) $\dfrac{22^3 - 18^3}{22^2 + 22 \cdot 18 + 18^2}$; г) $\dfrac{(-74)^2}{38^3 + 3 \cdot 38^2 \cdot 36 + 3 \cdot 38 \cdot 36^2 + 36^2}$.

586 1) Можно ли разложить данный многочлен на множители, вынося за скобки общий буквенный множитель? Разложите многочлен на множители, используя способ группировки:

$$-54x^2y + 9x^4 + 81y^2.$$

2) Какой формулой сокращенного умножения можно воспользоваться, чтобы разложить этот многочлен на множители? Разложите многочлен на множители, используя эту формулу.

587 Сократите дроби при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$; г) $\dfrac{y^2 - 49}{y - 7}$; ж) $\dfrac{1 - 4x^4}{2x^2 - 1}$; к) $\dfrac{121c^2 - 169d^2}{13d - 11c}$;

б) $\dfrac{c^2 - d^2}{c - d}$; д) $\dfrac{25 - m^2}{m - 5}$; з) $\dfrac{16 - y^2z^2}{yz + 4}$; л) $\dfrac{36 - p^2q^4}{pq^2 - 6}$;

в) $\dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$; е) $\dfrac{16 - n^2}{n + 4}$; и) $\dfrac{49a^2 - 81b^2}{9b + 7a}$; м) $\dfrac{1 - 9c^4d^6}{3c^2d^3 + 1}$.

588 Представьте выражение в виде произведения двух многочленов, используя формулу разности квадратов:

а) $x^2 - y^2$; б) $z^2 - 36$; в) $25 - a^2$; г) $4b^2 - 9$; д) $81c^2 - 49$; е) $16m^2 - 256$; ж) $1 - 144n^2$; з) $r^2s^2 - 64$; и) $p^2 - q^2r^2$; к) $x^4y^2 - z^6$; л) $(x + 3y)^2 - z^2$; м) $(3a + 4b)^2 - 9c^2$; н) $(5p^2 - 7q^2)^2 - 121p^2$; о) $16a^2 - (x - y)^2$; п) $a^4b^2 - (c^2 - d)^2$; р) $(a + 2b)^2 - (3c + 4d)^2$; с) $(m - 2n)^2 - (2p - 3q)^2$; т) $(5a - 4c)^2 - (3b + 8d)^2$; у) $(11 + 9x^2)^2 - (2y^3 + 7z)^2$; ф) $(4w^5 + 3v)^2 - (8x^4 - 9d)^2$.

589 Разложите многочлен на множители, используя формулы квадрата суммы и разности:

а) $x^2 + 2xy + y^2$; б) $a^2 + 6a + 9$; в) $-2mn + m^2 + n^2$; г) $4a^2 + 4a + 1$; д) $9m^2 - 6m + 1$; е) $-6a - a^2 - 9$; ж) $a^4 + 2a^2b + b^2$; з) $x^4 - 4b^2x^2 + 4b^4$; и) $25m^4 - 10m^2n + n^2$; к) $9p^4 + 6p^2q + q^2$; л) $49x^4 - 14x^2y^2 + y^4$; м) $36p^4 + 12p^2q^2 + q^4$; н) $m^8 - 6m^4k^3 + 9k^6$; о) $4p^{10} + 20p^5z^6 + 25z^{12}$; п) $9n^6 + 48n^3r^2 + 64r^4$; р) $36x^8 - 84x^4y^2 + 49y^4$; с) $4p^6 - 4p^3q^4 + q^8$; т) $64a^{10} - 112a^5n^6 + 49n^{12}$.

590 Представьте выражение в виде произведения двух многочленов, используя формулы суммы и разности кубов:

а) $m^3 + n^3$; б) $c^3 - d^3$; в) $x^3 - 8$; г) $n^3 + 27$; д) $8a^3 - 1$; е) $27 + 8y^3$; ж) $64c^3 - b^3$; з) $27m^3 + 125n^3$; и) $a^6 + b^6$; к) $m^9 - n^3$; л) $a^3b^6 + c^6d^3$; м) $x^6y^6 - z^9s^{12}$; н) $(7b + 3)^3 - 64$; о) $(4c + 5)^3 + 125$; п) $8 + (9 - a^2)^3$; р) $(5m + 4n)^3 - 216y^3$.

591 Разложите многочлен на множители, используя формулы куба суммы и разности:

а) $3x^2y + y^3 + 3xy^2 + x^3$; б) $3pq^2 - q^3 - 3p^2q + p^3$; в) $6m^2n + 8n^3 + 12mn^2 + m^3$; г) $64 - 96z + 48z^2 - 8z^3$; д) $27a^3b^6 + 54a^2b^4c^2 + 36ab^2c^4 + 8c^6$; е) $d^3 + 27p^2c^6d + 9pc^3d^2 + 27p^3c^9$; ж) $8x^3y^3 - 125z^3 + 150xyz^2 - 60x^2y^2z$; з) $x^9y^{12} + 3x^3y^4z^4 - 3x^6y^8z^2 - z^6$.

592 Найдите значение выражения:

а) $5x^2 - 5y^2$ при $x = 0{,}8$; $y = 1{,}2$;

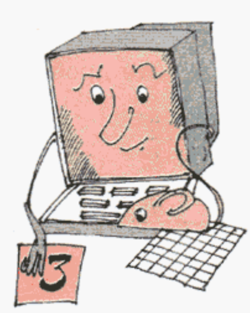
б) $28z^4 - 63s^2$ при $z = 0{,}5$; $s = \frac{1}{3}$;

в) $-2ab + a^2 + b^2$ при $a = 7{,}6$; $b = -0{,}4$;

г) $16c^2 + 36d^2 - 48cd$ при $c = 0{,}5$; $d = \frac{1}{12}$;

д) $8m^3 - 36m^2 + 54m - 27$ при $m = 3{,}5$;

е) $b^3 + 15b^2c^2 + 75bc^4 + 125c^6$ при $b = -3$; $c = 0{,}8$.



593 Докажите, что если $z^3 - z$ для любого целого числа z делится на 5, то:

а) $z^3 + 14z$ делится на 5; в) $3z^3 - 18z$ делится на 15;

б) $2z^3 + 8z$ делится на 10; г) $4z^3 + 16z$ делится на 20.

594 Докажите, что:

а) разность квадратов двух последовательных четных чисел делится на 4;

б) разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8;

в) $(6a + 1)^2 - 1$ делится на 12 для любого целого a;

г) $(8b + 5)^2 - 9$ делится на 16 для любого целого b.

595 Решите уравнение:

а) $x^2 - 64 = 0$; д) $(3x - 4)^2 - 81 = 0$; и) $(m + 2)^2 - (3m + 3)^2 = 0$;

б) $100 - y^2 = 0$; е) $25 - (4y + 11)^2 = 0$; к) $(6n - 5)^2 - (7n + 4)^2 = 0$;

в) $9z^2 - 4 = 0$; ж) $(5z - 6)^2 - 16z^2 = 0$; л) $(4p - 11)^2 - (9p + 14)^2 = 0$;

г) $81r^2 - 36 = 0$; з) $(7r + 42)^2 - 4r^2 = 0$; м) $(5q + 9)^2 - (4q - 3)^2 = 0$.

596 Разложите на множители:

а) $a + b + a^2 - b^2$; д) $mn^2 + 2m - m^3 - 2n$; и) $x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2$;

б) $c - d + d^2 - c^2$; е) $p^2 - q^2 - 8p + 8q$; к) $z^3 - s^3 - 5z(z^2 + zs + s^2)$;

в) $x + y - x^2 + y^2$; ж) $9 - c^2 - 3d + dc$; л) $p^3 + q^3 + 2p^2 - 2pq + 2q^2$;

г) $9t^2 - z^2 - z - 3t$; з) $4d^4 - 25 - 2d^2r^2 - 5r^2$; м) $m^4 + mn^3 - m^2n + n^3$.

597 Докажите тождество:

а) $(m^2 + 4)^2 - 16m^2 = (m^2 - 4)^2$;

б) $(n^2 + n)^2 + (n^2 - n)^2 + (n^2 - 1)^2 = 3n^4 + 1$;

в) $(p + 7)^2 - 2(p + 7)(p - 3) + (p - 3)^2 = 100$;

г) $(q - 6)^2 - 2(q - 6)(q - 10) + (q - 10)^2 = 16$.

598 Каким одночленом можно заменить A, чтобы полученный в результате замены многочлен можно было разложить на множители?

а) $A^2 + 24a^2b^4 + 9b^8$; в) $81x^2y^4 + A + 16y^8$;

б) $49c^6 - 70c^3d^4 + A^2$; г) $36m^4n^8 - A + 49m^2n^2$.

599 Разложите многочлен на множители:

а) $x^4 - y^4$; в) $a^6 - a^2$; д) $c^6 - d^6$; ж) $m^8 - 6m^4n^4 + n^8$;

б) $1 - z^8$; г) $b^{16} - 1$; е) $p^{12} - 1$; з) $4pq^2 - 2p^2q + 8q^3 - p^3$.

600 Какой знак неравенства надо поставить вместо $\square$, чтобы в результате получилось неравенство, верное при всех значениях переменной?

а) $2x^2 + 6 \square 0$; д) $(p - 3)^2 + 9 \square 0$; и) $a^2 + 16a + 70 \square 0$;

б) $-5y^2 - 9 \square 0$; е) $-(q + 5)^2 - 1 \square 0$; к) $-b^2 + 8b - 20 \square 0$;

в) $a^2 - 10a + 25 \square 0$; ж) $-(r - 7)^2 - 4 \square 0$; л) $-4c^2 - 12c - 10 \square 0$;

г) $-b^2 + 14b - 49 \square 0$; з) $(s + 9)^2 + 1 \square 0$; м) $9d^2 - 30d + 30 \square 0$.

601 Разложите многочлен на множители:

а) $x^2 + 14x + 48$; в) $-z^2 - 20z - 64$; д) $-16b^2 - 40b - 16$;

б) $y^2 - 16y + 60$; г) $4a^2 - 12a + 5$; е) $49c^2 - 42c + 8$.

602 Решите уравнение:

а) $(x + 2)(x^2 + 4) - x^3 - 8 = 0$; в) $z^2 - 39 + 10z = 0$;

б) $(y - 3)(y^2 - 6) - y^3 + 27 = 0$; г) $4r^2 + 36r + 32 = 0$.

603 Какие многочлены можно поставить вместо A и B, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $(4x - 7)^2 - (A + B)^2 = (x - 12)(7x - 2)$;

б) $(A + B)^2 - (5x - 3)^2 = (7 - 2x)(8x + 1)$;

в) $(4x - 1)^2 + (3x + 2)^2 - AB = (x - 3)^2$;

г) $(6x + 7)^2 + (7x + 3)^2 + AB = (4 - x)^2$.

604 Сократите дроби при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{a^2 - 14a + 49}{(a - 6)^2 - 1}$; в) $\dfrac{(4c + 3d)^2 - 9c^2}{c^2 + 6cd + 9d^2}$; д) $\dfrac{z^2 - 6z - 16}{z^2 - 4z - 12}$;

б) $\dfrac{(b + 4)^2 - 1}{b^2 + 6b + 9}$; г) $\dfrac{49y^2 - 14xy + x^2}{(5x + 7y)^2 - 36x^2}$; е) $\dfrac{4r^2 - 20r - 39}{4r^2 - 28r + 13}$.

П **605** Постройте высказывание, обратное данному. Определите истинность исходного и обратного к нему высказываний. Для ложных высказываний постройте отрицания:

а) Если целое число a делится на 3, то число $10a$ также делится на 3.

б) Если целое число $15a$ делится на 5, то число a также делится на 5.

в) Если $x^2 = 4$, то $x = 2$ или $x = -2$.

г) Если $y = 3$, то $y^2 = 9$.

д) Если $z > 2$, то $|z| > 2$.

е) Если $|r| > 5$, то $r > 5$.

606 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{7^{27} \cdot 22^{41} \cdot 7^{55} \cdot (2^4)^8 \cdot (11^{96} : 11^{63})}{11^{45} \cdot \left(\dfrac{7}{11}\right)^{26} \cdot 7^{55} \cdot 2^{70}}$; б) $\dfrac{(9^{45} : 3^{20}) \cdot 5^{51} \cdot 7^{43} \cdot (7^8)^3 \cdot \left(\dfrac{5^{44}}{5^{31}}\right)}{5^{51} \cdot (7^{39} : 7^{37})^5 \cdot 15^{12} \cdot 21^{57}} + 15^0$.

607 а) Разделите число 2478 на три части пропорционально числам 2, 5, 7.

б) Разделите число 2420 на четыре части пропорционально числам 2, 3, 8, $11\frac{1}{5}$.

608 На координатной плоскости Oxy постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x > 5$; в) $y \leqslant -2$; д) $-3 \leqslant x < 8$; ж) $-1 \leqslant y \leqslant 5$;

б) $-3 < y \leqslant 6$; г) $|x| \leqslant 4$; е) $|y| > 2$; з) $|x - 2| \leqslant 3$.

609 На координатной плоскости Oxy постройте множество точек, заданных таблицей:

а)

x	-3	-1	0	1	3
y	-4	2	0	2	-4

б)

x	-5	-4	-3	-2	-1
y	3	-5	1	-2	0

в)

x	0	1	2	3	4	5
y	-5	5	-3	3	-2	2

г)

x	-6	-4	-2	2	4	6
y	-3	-1	0	0	1	3

610 а) Михаил и Василий, работая вместе, вырыли на дачном участке колодец за 24 рабочих дня. Если бы Михаил и Василий рыли такой колодец в одиночку, то Михаил выполнил бы эту работу в 1,5 раза быстрее, чем Василий. За сколько рабочих дней вырыл бы этот колодец Василий, работая самостоятельно?

б) Для наполнения резервуара водой используют три насоса. Первый насос может наполнить этот резервуар за 12 часов, второй – за 15 часов, а третий – за 20 часов. Сначала резервуар наполняли следующим образом: в течение первых трех часов работали только первый и третий насосы, а затем был включен и второй насос. В другой раз резервуар наполняли иначе: в течение первых 2 часов работали все три насоса, а затем третий насос выключили. В каком случае резервуар был наполнен быстрее?

в) Автомобильный завод получил большой заказ. Для выполнения заказа в срок он должен ежедневно выпускать 100 автомобилей. Выпуская в день на 20 автомобилей больше, завод на 5 дней раньше срока успел выпустить на 10% автомобилей больше. Заказ на производство какого количества автомобилей получил этот завод?

611 Найдите все натуральные значения x, удовлетворяющие равенствам:

а) $2^x = 128$; б) $3^{2x} = 729$; в) $6^{x+2} = 216$; г) $5^{x-3} = 625$.

612 Выполните указанное действие по модулю m:

а) $6 + 21$, $m = 8$; г) $28 - 12$, $m = 6$; ж) $16 \cdot 3$, $m = 5$;

б) $12 + 36$, $m = 7$; д) $34 - 42$, $m = 4$; з) $17 \cdot 5$, $m = 3$;

в) $58 + 11$, $m = 12$; е) $46 - 63$, $m = 2$; и) 4^4, $m = 11$.

Д **613** Сократите дроби при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{x^2 - 49}{x + 7}$; б) $\dfrac{64 - y^2}{y - 8}$; в) $\dfrac{25a^2 - 9b^2}{3b + 5a}$; г) $\dfrac{1 - 16c^6d^8}{4c^3d^4 - 1}$.

614 Представьте выражение в виде произведения многочленов, используя формулу разности квадратов:

а) $9a^2 - 25$; в) $c^4 - d^2s^2$; д) $36m^2 - (m - n)^2$; ж) $(12 + 5z^4)^2 - (3z^2 + 7z)^2$;

б) $64 - 49b^2$; г) $p^8q^4 - r^6$; е) $x^6y^4 - (x^3 - y^2)^2$; з) $(3v^3 + 5v)^2 - (8v^4 - 7v)^2$.

615 Разложите многочлен на множители, используя формулы квадрата суммы и квадрата разности:

а) $-2xy + x^2 + y^2$; в) $36a^4 - 12a^2b + b^2$; д) $25p^6 + 40p^3q^2 + 16q^4$;

б) $9z^2 + 6z + 1$; г) $49c^4 + 14c^2d + d^2$; е) $81m^8 - 36m^4n^3 + 4n^6$.

616 Представьте выражение в виде произведения двух многочленов, используя формулы суммы и разности кубов:

а) $m^3 - 64$; в) $8p^3 - q^3$; д) $x^6y^9 + z^{12}t^3$; ж) $343 + (11 - r^4)^3$;

б) $n^3 + 125$; г) $27r^3 + 216s^3$; е) $a^9b^{15} - c^9d^6$; з) $(7s + 3t)^3 - 216t^3$.

617 Разложите многочлен на множители, используя формулы куба суммы и разности:

а) $27a^2b + 27a^3 + 9ab^2 + b^3$; в) $x^6y^3 - 64z^3 + 48x^2yz^2 - 12x^4y^2z$;

б) $64c^3 - 96c^2d + 48cd^2 - 8d^3$; г) $m^{15}n^{12} - 3m^{10}n^8k^2 + 3m^5n^4k^4 - k^6$.

618 Найдите значение выражения:

а) $7a^2 - 7b^2$ при $a = 1{,}3$; $b = 1{,}7$;

б) $25c^2 + 49d^2 - 70cd$ при $c = 0{,}4$; $d = \frac{1}{14}$;

в) $64x^3 - 96x^2 + 48x - 8$ при $x = 0{,}75$.

619 Докажите, что:

а) $z^2 + (z + 1)^2$ при делении на 4 дает остаток 1 для любого целого z;

б) $(9t - 4)^2 - 16$ делится на 9 для любого целого t.

620 Решите уравнение:

а) $36a^2 - 25 = 0$; в) $(3c - 7)^2 - 4c^2 = 0$; д) $(3x - 9)^2 - (7x + 4)^2 = 0$;

б) $9b^2 - 64 = 0$; г) $(8d + 11)^2 - 16d^2 = 0$; е) $(6y + 5)^2 - (12y - 8)^2 = 0$.

621 Разложите на множители:

а) $2a + 2b - a^2 + b^2$; в) $16 - p^2 - 28q + 7pq$; д) $m^3 - n^3 + 3m^2 + 3mn + 3n^2$;

б) $4c^2 - d^2 - d - 2c$; г) $9r^4 - 49 - 3r^2t^2 - 7t^2$; е) $p^4 + pq^3 - p^3q - q^4$.

622 Разложите на множители:

а) $x^4 - 16$; б) $y^8 - y^4$; в) $z^6 - 64$; г) $4a^8 + 3a^4b^4 + b^8$.

623 Какой знак неравенства надо поставить вместо $\square$, чтобы в результате получилось неравенство, верное при всех значениях переменной?

а) $a^2 - 14a + 49 \square 0$; в) $-(c - 3)^2 - 5 \square 0$; д) $-x^2 + 10x - 28 \square 0$;

б) $-b^2 + 16b - 64 \square 0$; г) $(d + 11)^2 + 1 \square 0$; е) $4d^2 - 36d + 84 \square 0$.

624 Разложите многочлен на множители:

а) $x^2 - 6x - 7$; в) $4z^2 + 12z + 5$;

б) $y^2 - 10y - 24$; г) $-9t^2 + 42t - 33$.

625 Решите уравнение:

а) $(x - 3)(x^2 + 9) - x^3 + 27 = 0$; б) $z^2 - 5 + 4z = 0$.

626 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{3^{36} \cdot 10^{39} \cdot 3^{15} \cdot (2^3)^5 \cdot (5^{12} : 5^7)}{5^{14} \cdot 6^{22} \cdot 15^{29} \cdot 2^{31}}$; б) $\dfrac{(4^{26} : 2^{20}) \cdot 9^{15} \cdot 13^{34} \cdot (2^8)^7 \cdot \left(\dfrac{3^{44}}{3^{31}}\right)}{13^{19} \cdot 13^{15} \cdot (9^{28} : 3^{13}) \cdot 2^{86}} - 26^0$.

627 а) Разделите число 1298 на три части пропорционально числам 5, 6, 11.

б) Разделите число 2438 на четыре части пропорционально числам 3, 4, 9, $10\frac{1}{2}$.

628 На координатной плоскости Oxy постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $-2 < x \leqslant 3$; б) $|\,x\,| \leqslant 4$; в) $|\,y\,| > 3$; г) $|\,y - 3\,| \leqslant 2$.

629 а) Два филиала пончиковой компании Антона и Ксюши, работая вместе, выполнили крупный заказ за 6 рабочих дней. При этом первый филиал, работая самостоятельно, мог бы выполнить этот заказ в 1,2 раза быстрее, чем если бы этот заказ выполнял самостоятельно второй филиал. За сколько рабочих дней выполнил бы этот заказ один первый филиал?

б) Пончиковая компания Антона и Ксюши получила большой заказ на производство пончиков. Для выполнения заказа в срок необходимо ежедневно выпускать 500 кг пончиков. Выпуская в день на 150 кг пончиков больше, компания на 2 дня раньше срока успела выпустить на 20% пончиков больше. Сколько тонн пончиков необходимо было изготовить, чтобы выполнить этот заказ?

630 Найдите все натуральные значения x, удовлетворяющие равенствам:

а) $3^x = 243$; б) $2^{2x} = 256$; в) $7^{x+1} = 343$; г) $6^{x-5} = 216$.

631 Выполните указанное действие по модулю m:

а) $7 + 5,\ m = 3$; в) $36 - 18,\ m = 5$; д) $12 \cdot 7,\ m = 8$;

б) $23 + 14,\ m = 9$; г) $27 - 42,\ m = 4$; е) $3^3,\ m = 13$.

632 Докажите, что $A^2 + B^2$ делится на 5:

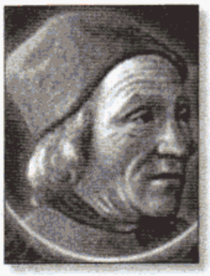
$A = (-4{,}2 + 3{,}7) - (2{,}3 + 5{,}7 - 4{,}3 - 2{,}7) - (-7{,}9 + 2{,}4)$;

$B = -4(2 + 0{,}4(9 - (2 + 7) + 2 - 4)) - (2{,}2 - 3{,}4 - 1{,}6)$.

С **633*** В Грузии, в горах, живет почтенный долгожитель Гиви. У него есть дети, внуки, правнуки и праправнуки. Всего их вместе с Гиви 2801 человек. У него, его детей, внуков и правнуков одинаковое количество детей. А у праправнуков детей еще нет. Определите, сколько у Гиви детей.

634* Отец и сын бегали по замкнутой беговой дорожке. Отец время от времени обгонял сына. После того как сын побежал в противоположном направлении, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз скорость отца больше скорости сына, если оба они бегают с постоянной скоростью?

4. Разложение многочленов на множители с применением нескольких способов



«Все ценное достается дорогой ценой – ценнейший из металлов самый тугоплавкий и самый тяжелый».

Грасиан-и-Моралес Бальтасар (1601–1658),
испанский философ

В предыдущих пунктах этого параграфа мы с вами рассмотрели несколько способов разложения многочленов на множители: вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, использование формул сокращенного умножения. Но чаще всего для разложения многочлена на множители требуется использование всевозможных комбинаций разных способов.

Рассмотрим более сложные примеры, в которых для разложения многочлена на множители нужно применить несколько разных способов.

Пример 1. Разложите на множители многочлен $a^4 + ax^2 - a^2x - x^4$.

Решение:

Выработка стратегии решения.

Так как $a^4 = (a^2)^2$, а $x^4 = (x^2)^2$, то, сгруппировав первое и четвертое слагаемое, мы сможем применить формулу разности квадратов:

$$a^4 - x^4 = (a^2 - x^2)(a^2 + x^2).$$

Замечая далее, что $a^2 - x^2 = (a - x)(a + x)$, мы получим, что

$$(a^2 - x^2)(a^2 + x^2) = (a - x)(a + x)(a^2 + x^2).$$

Значит, в итоге

$$a^4 - x^4 = (a - x)(a + x)(a^2 + x^2).$$

Теперь сгруппируем второе и третье слагаемое, они имеют общий множитель ax. После вынесения его за скобки в скобках останется многочлен $x - a$, равный $-(a - x)$.

$$ax^2 - a^2x = -ax\,(a - x).$$

Таким образом, в результате проведенных преобразований обе группы слагаемых будут иметь общий множитель $a - x$.

Реализация стратегии.

Проведем указанную группировку. Как и планировали, в первой группе применим формулу разности квадратов, а во второй – вынесем за скобки общий множитель ax:

$$a^4 + ax^2 - a^2x - x^4 = (a^4 - x^4) + (ax^2 - a^2x) = (a - x)(a + x)(a^2 + x^2) - ax(a - x) =$$

$$= (a - x)\,[(a + x)(a^2 + x^2) - ax].$$

Запишем выражение в квадратных скобках как многочлен стандартного вида:

$$(a + x)(a^2 + x^2) - ax = a^3 + ax^2 + a^2x + x^3 - ax.$$

В итоге получаем следующее разложение исходного многочлена на множители:

$$a^4 + ax^2 - a^2x - x^4 = (a - x)\,[a^3 + ax^2 + a^2x + x^3 - ax].$$

Пример 2. Разложите на множители многочлен $x^4 + x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^3$.

Решение:

Выработка стратегии решения.

Замечаем, что среди членов нашего многочлена есть одночлен $2xy^2$. Это слагаемое является удвоенным произведением x и y^2. Если бы у нас имелись также слагаемые x^2 и y^4, то, сгруппировав их, мы смогли бы применить формулу квадрата суммы. Но таких слагаемых у нас нет.

Однако, анализируя исходный многочлен, можно заметить, что в группе $x^2y + 2xy^2 + y^3$, состоящей из второго, четвертого и пятого слагаемых, мы можем вынести за скобки общий множитель y. А в скобках как раз окажется квадрат суммы x и y. Таким образом,

$$x^2y + 2xy^2 + y^3 = y(x^2 + 2xy + y^2) = y(x + y)^2.$$

Оставшиеся первое и третье слагаемые имеют общий множитель x. Если мы вынесем его за скобки, то в скобках останется сумма кубов x и y. Применяя соответствующую формулу, получим

$$x^4 + xy^3 = x(x^3 + y^3) = x(x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Таким образом, каждая из групп будет иметь общий множитель $x + y$, который можно вынести за скобки.

Реализация стратегии.

Объединим первый и третий члены исходного многочлена в одну группу, а второй, четвертый и пятый – в другую и вынесем в каждой группе за скобки общий множитель:

$$x^4 + x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^3 = (x^4 + xy^3) + (x^2y + 2xy^2 + y^3) = x(x^3 + y^3) + y(x^2 + 2xy + y^2).$$

Теперь в первом слагаемом применим формулу суммы кубов, а во втором – формулу квадрата суммы. Тогда в каждой группе образуется общий множитель $x + y$, который можно вынести за скобки:

$$x(x + y)(x^2 - xy + y^2) + y(x + y)^2 = (x + y)[x(x^2 - xy + y^2) + y(x + y)].$$

Преобразуя затем выражение в квадратных скобках, получаем:

$$x(x^2 - xy + y^2) + y(x + y) = x^3 - x^2y + xy^2 + xy + y^2.$$

Таким образом, мы приходим к следующему разложению исходного многочлена на множители:

$$x^4 + x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^3 = (x + y)[x^3 - x^2y + xy^2 + xy + y^2].$$

Пример 3. Разложите на множители многочлен $x^4 + 4$.

Решение:

Выработка стратегии решения.

Замечаем, что данное выражение мы можем записать в виде $(x^2)^2 + 2^2$. Таким образом, исходное выражение является суммой квадратов. Но формулы для суммы квадратов у нас нет, поэтому сразу разложить многочлен на множители нам не удастся.

Можно заметить также, что $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$. А значит, если мы добавим и вычтем из исходного многочлена одночлен $4x^2$, то получим:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2.$$

А полученное нами выражение мы уже сможем разложить на множители, используя формулу разности квадратов.

<u>Реализация стратегии</u>.

Как и планировали, добавим к исходному многочлену и вычтем из него $4x^2$, затем воспользуемся формулой квадрата суммы, а после этого применим формулу разности квадратов. Получаем:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$$
$$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

В итоге мы приходим к следующему разложению исходного многочлена на множители:

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

Пример 4. Разложите на множители многочлен: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

Решение:

<u>Выработка стратегии решения</u>.

Заметим, что в последних трех слагаемых, если добавить к ним x и вынести за скобки 6, «спрятана» формула квадрата суммы $(x + 1)^2$.

Чтобы выражение при этих преобразованиях не изменилось, из него надо вычесть x. Тогда неиспользованные слагаемые образуют группу $x^3 - x$, в которой есть общий множитель x. После вынесения его за скобки в скобках получим разность квадратов $x^2 - 1$, которую можно разложить на множители $(x + 1)(x - 1)$.

Таким образом, в каждой из образованных двух групп имеется множитель $x + 1$, который можно вынести за скобки.

<u>Реализация стратегии</u>.

Проведя указанные преобразования, получим:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + 6x^2 + 12x + 6 - x = (x^3 - x) + (6x^2 + 12x + 6) =$$

$$= x(x^2 - 1) + 6(x + 1)^2 = x(x + 1)(x - 1) + 6(x + 1)^2 = (x + 1)[x(x - 1) + 6(x + 1)].$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках. Для этого сначала упростим его, а затем слагаемое $5x$ разобьем на два слагаемых – $2x$ и $3x$:

$$x(x - 1) + 6(x + 1) = x^2 - x + 6x + 6 = x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 =$$

$$= (x^2 + 2x) + (3x + 6) = x\,(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3).$$

В результате мы получаем следующее разложение исходного многочлена на множители:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

Пример 5. Разложите на множители многочлен $x^2 + 0{,}5x - 3$.

Решение:

<u>Выработка стратегии решения</u>.

Разложим этот многочлен на множители способом выделения полного квадрата (см. стр. 108), который часто используется при разложении на множители многих трехчленов.

Для этого заметим, что слагаемое $0{,}5x$ можно записать как удвоенное произведение x и числа $\frac{1}{4}$. Теперь, добавляя и вычитая из исходного многочлена $\frac{1}{16}$ (квадрат числа $\frac{1}{4}$), выделяем полный квадрат. После этого для разложения многочлена на множители используем формулу разности квадратов.

<u>Реализация стратегии.</u>

Выполняя вышесказанное, получаем

$$x^2 + 0{,}5x - 3 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - 3 = \left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) - \frac{49}{16} =$$

$$= \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{4} - \frac{7}{4}\right) = (x + 2)(x - 1{,}5).$$

Итак, разложение на множители данного трехчлена имеет вид:

$$x^2 + 0{,}5x - 3 = (x + 2)(x - 1{,}5).$$

Как мы уже говорили, разложение многочленов на множители непростая, а порой – и невыполнимая задача. Так, например, не для всех a и b можно разложить на множители двучлен $a^2 + b^2$ (хотя, как мы убедились в примере 3, для некоторых конкретных a и b это разложение может быть найдено).

Задача разложения на множители требует не только четкого знания формул сокращенного умножения, но и смекалки, умения видеть общие множители и удачно группировать члены многочленов. Вместе с опытом выполнения подобных преобразований появляется «особое зрение», способность разглядеть «спрятанные» в многочленах формулы и общие множители различных групп слагаемых. Сейчас же, когда вы только начинаете раскладывать многочлены на множители, в выборе стратегии решения вам могут пригодиться следующие советы:

1. Если все члены многочлена имеют общий множитель, вынесите его за скобки.

2. Ищите в исходном многочлене признаки формул сокращенного умножения – удвоенные и утроенные произведения, сумму и разность кубов, разность квадратов.

3. Ищите общие множители групп слагаемых, пробуйте их сгруппировать и вынести общий множитель за скобки.

4. Там, где не помогла одна группировка, может помочь другая. Поэтому попробуйте сгруппировать члены многочлена иначе.

5. Если для применения формулы или группировки не хватает какого-либо слагаемого, добавьте и вычтите его или разбейте на несколько слагаемых один из членов многочлена.

6. Если требуется разложить на множители трехчлен вида $ax^2 + bx + c$, где a, b, $c \in Q$, и вы не видите удобного способа разложения, попробуйте выделить полный квадрат.

7. ***И самое главное:*** если не удалось получить разложение одним способом – пробуйте другим. Если опять не удалось – пробуйте еще. Ведь решение задачи, над которой пришлось много трудиться, принесет вам ни с чем не сравнимое удовольствие и радость.

635 Разложите многочлен на множители:

а) $2a^3 + a^5$; б) $xy - yz + zt - tx$; в) $4c^2 - 9d^2$; г) $49m^2 - 56mn + 16n^2$.

Какие изученные ранее способы разложения на множители вы использовали?

636 1) Разложите на множители многочлен: $a^4 + ax^2 - a^2x - x^4$.

2) Сравните свое решение с решением примера 1, стр. 116–117. Чем эта задача отличается от задач в № 635?

3) Рассмотрите приемы решения примеров 2–5 на стр. 117–119 и прочитайте советы, приведенные на стр. 119. Какие из них вам кажутся наиболее важными? Какие еще советы вы могли бы сформулировать сами?

637 Представьте многочлен в виде произведения нескольких многочленов степени большей нуля и назовите приемы разложения многочленов на множители, которые вы использовали:

а) $7a^2b - 7b^3$;
б) $4c^3d - 9cd^3$;
в) $5x^2y^2 - 45x^2z^2$;
г) $3p^4q^2 - 12p^2q^4$;
д) $144m^7n^5 - 81m^3n^3$;
е) $2ab^3 - 2ac^3$;
ж) $-64m^3n - 27n$;
з) $4x^4y + 32xy^4$;
и) $2r^3s - 16s$;
к) $r^2p^3 - 64r^2$;
л) $2a^4c - 32b^4c$;
м) $3mn^6 - 192m$;
н) $7p^6q - 7q^7$;
о) $t - 125r^6s^6t$;
п) $x^8y^9 - z^{10}t^2y^3$.

638 Разложите многочлен на множители. Какие приемы разложения вы здесь использовали?

а) $3x^2y + 6xy^2 + 3y^3$;
б) $5a^3 - 10a^2b + 5ab^2$;
в) $7xy^2 + 28xy + 28x$;
г) $2z - 4zt + 2zt^2$;
д) $12m^5n + 24m^4n + 12m^3n$;
е) $9p^4q^2 - 18p^3q^3 + 9p^2q^4$;
ж) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$;
з) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$;
и) $9 - m^2 + 4mn - 4n^2$;
к) $4p^2 - 20pq + 25q^2 - 36$;
л) $16r^2 - 8rs + s^2 - 49$;
м) $25c^2 - 4d^2 + 12dk - 9k^2$;
н) $a^2 - b^2 - a + b$;
о) $c + d + c^2 - d^2$;
п) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$;
р) $m^3 + m^2n - mn^2 - n^3$;
с) $pr - qr - p^2 + 2pq - q^2$;
т) $s^2 + 4st + 4t^2 - k^2 - 6kt - 9t^2$.

639 Решите уравнение, используя разложение многочлена на множители:

а) $a^2 + 6a + 8 = 0$;
б) $b^2 - 7b + 10 = 0$;
в) $c^2 - 3c - 10 = 0$;
г) $2d^2 + 10d + 12 = 0$;
д) $2x^2 - 6x + 4 = 0$;
е) $x^2 + 2x - 15 = 0$;
ж) $2y^2 + 14y + 24 = 0$;
з) $3z^2 + 27z + 54 = 0$;
и) $m^8 + 5m^4 - 6 = 0$;
к) $3n^4 - 6n^2 + 3 = 0$;
л) $q^8 - 15q^4 - 16 = 0$;
м) $2r^6 + 14r^3 - 16 = 0$;
н) $s^8 - 9s^6 + 4s^2 - 36 = 0$;
о) $5t^3 - 9t^2 - 2t = 0$;
п) $3k^3 - 7k^2 - 6k = 0$.

640 Разложите многочлен на множители:

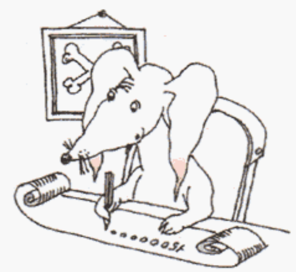
а) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$;
б) $y^3 + 8 + 6y^2 + 12y$;
в) $z^4 + z^3 + z + 1$;
г) $a^6 - a^4 + 3a^3 + 3a^2$;
д) $pq^2 - q^3 - p + q$;
е) $m^3 + m^2n - 9n - 9m$;
ж) $n^2r^4 + rn^2s^3 - r^3sn^2 - s^4n^2$;
з) $a^2b^4c^2 - a^2b^2c^4 + a^4b^2c^2 - a^4c^4$;
и) $d^3 - 3d^2 - 15d + 125$;
к) $p^3 - 7p^2 - 21p + 27$;
л) $b^3 + 27c^3 + b^2 - 3bc + 9c^2$;
м) $8m^3 - n^3 - 12m^2 - 6mn - 3n^2$;
н) $(x^2 + 7xy + 3y^2)^2 - (x^2 + 3y^2)^2$;
о) $(5z - 3z^3 + 2z^6)^2 - (2z^6 - 3z^3)^2$;
п) $(a - b)(a^2 - c^2) - (a - c)(a^2 - b^2)$;
р) $(p^2 - q^2)(p + q) + (p + q)^3$;
с) $(c - 3)^2 - 6(c - 3) + 9$;
т) $(x + y)^2 - 10(x^2 - y^2) + 25(x - y)^2$.

641 Найдите корни уравнения:

а) $x^3 - 4x = 0$;
б) $y^3 + 5y = 0$;
в) $z^3 + 7z^2 = 0$;
г) $r^3 - 3r^2 = 0$;
д) $6t^4 - 54t^2 = 0$;
е) $20s^2 - 5s^4 = 0$;
ж) $a^3 - 2a^2 + a = 0$;
з) $b^4 - 18b^2 + 81 = 0$;
и) $m^4 - m^3 - m^2 + m = 0$;
к) $p^3 - 5p^2 - 9p + 45 = 0$;
л) $n^3 - 12 + 3n^2 - 4n = 0$;
м) $8q^5 - q^2 - 200q^3 + 25 = 0$.

642 Найдите значение выражения:

а) $a^2 + b^2$, если $ab = 5$, $a + b = 2$;
б) $cd^2 - c^2d$, если $cd = -3$, $c - d = 7$;
в) $m^2 + 2mn + n^2$, если $m + n = 4$;
г) $pq^3 + p^3q$, если $pq = -4$, $p + q = -6$;
д) $r^3s^2 + r^2s^3$, если $rs = 2$, $r + s = -3$;
е) $x^3 - y^3$, если $x - y = 2$, $xy = 4$.



643 Сократите дроби при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{8 - 12p + 6p^2 - p^3}{2q - pq + 2r - rp}$;
б) $\dfrac{1 - m^3}{m^2n - 2m^2 + mn - 2m + n - 2}$;
в) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2 - 9a + 9b}$;
г) $\dfrac{x^2 + 4y^2 - z^2 + 4xy}{x^2 - 4y^2 + z^2 + 2zx}$;
д) $\dfrac{c^2 - 2c - d^2 + 1}{c^2 - 2cd + d^2 - 1}$;
е) $\dfrac{r^2 - rs - st - t^2}{s^2 + r^2 - 2sr - t^2}$.

644 Рациональным способом найдите значение выражения:

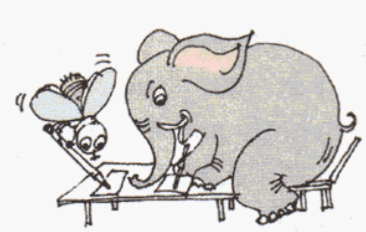
а) $7a^2b + 5ab^2$ при $a = \dfrac{2}{7}$; $b = -\dfrac{7}{5}$;
б) $x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 10x + 11$ при $x = 11$;
в) $(5m - 3n)^2 - (4m - 2n)^2$ при $m = \dfrac{2}{9}$; $n = \dfrac{3}{5}$;
г) $(3c - 4d)^2 - (2d - 3c)^2$ при $c = 0{,}75$; $d = -1{,}25$;
д) $y^3 - 2y^2z - 4yz + 8z^2$ при $y = 5{,}5$; $z = 0{,}25$;
е) $p^3 + p^2q - pq^2 - q^3$ при $p = 1{,}3$; $q = 0{,}8$.

645 Вычислите:

а) $15{,}4^2 - 7{,}6^2 + 23 \cdot 2{,}2$;
б) $46{,}8^2 - 12 \cdot 51{,}6 - 34{,}8^2$;
в) $43 \cdot 8{,}4 + 27{,}3^2 - 15{,}7^2$;
г) $18 \cdot 62{,}4 - 35{,}2^2 + 17{,}2^2$;
д) $\dfrac{9^6 + 9^7}{3^{12} + 3^{14} + 3^{15}}$;
е) $\dfrac{2^{16} - 2^{18} + 2^{19}}{16^4 - 16^6}$;
ж) $\dfrac{5^{12} - 5^{13} - 5^{14} - 5^{15}}{25^8 - 25^6}$;
з) $\dfrac{36^2 + 36^3}{6^4 - 6^5 + 6^6 - 6^7}$.

646 Докажите тождество:

а) $x^2 + 4x - y^2 + 4y = (x + y)(x - y + 4)$;
б) $z^2 - 3t + z - 9t^2 = (z - 3t)(z + 3t + 1)$;
в) $(m + n)(m + k) = m^2 + m(n + k) + nk$;
г) $(p - q)(p - r) = p^2 - p(q + r) + qr$.



647 Докажите, что:

а) если к произведению двух последовательных целых чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего из этих чисел;

б) разность кубов двух последовательных целых чисел не делится на 3;

в) если сумма трех последовательных целых чисел есть число нечетное, то их произведение делится на 24;

г) квадрат нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1.

648 Разложите трехчлен на множители, выделяя полный квадрат:

а) $a^2 + 4a - 5$; в) $3c^2 + 6c - 9$; д) $x^2 + 1{,}5x - 1$; ж) $3z^2 - 3{,}5z - 1{,}5$;

б) $b^2 - 10b - 11$; г) $2d^2 + 16d - 40$; е) $y^2 - 2{,}5y - 6$; з) $2n^2 - 5{,}5n - 10$.

649 Разложите многочлен на множители:

а) $x^2(x - 5) + 4x(x - 5) + 4x - 20$; д) $m^2 - p^2 + n^2 - q^2 - 2mn - 2pq$;

б) $y^2(y + 3) + 4y(y + 3) + 3y + 9$; е) $4x^2 + y^2 - z^2 - 9t^2 + 4xy + 6zt$;

в) $2z^2(z^2 + 1) - 5z(z^2 + 1) - 3z^2 - 3$; ж) $25a^2 - 4c^2 + 16b^2 - d^2 - 40ab - 4cd$;

г) $3t^2(t - 7) - t(t - 7) + 14 - 2t$; з) $p^2q^2 - p^2r^2 - q^2s^2 + r^2s^2 + 4pqrs$.

650 Докажите, что значение выражения не зависит от значений переменных:

а) $(x - 3)(x + 3) - (x - 6)(x + 6)$;

б) $4(3y - 7)(3y + 7) - 9(2y - 6)(2y + 6)$;

в) $(z + 2)(z^2 - 2z + 4) - (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$;

г) $(2r - 3)(4r^2 + 6r + 9) - (2r + 3)(4r^2 - 6r + 9)$.

651 Разложите на множители:

а) $ab(a - b) - ac(a - c) + bc(b - c)$; д) $119x - 51y + 42xz - 18yz$;

б) $mn(m + n) + mk(m - k) - nk(n + k)$; е) $95p + 114q + 65pr + 78qr$;

в) $p^2(q - r) + q^2(r - p) + r^2(p - q)$; ж) $105m - 135mk + 21n - 27kn$;

г) $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$; з) $132ac - 99bc + 156a - 117b$.

652 Докажите тождество:

а) $(2x^2 + 3)^2 - 4x^2(x - 2)^2 = (4x + 3)(4x^2 - 4x + 3)$;

б) $9y^2(2y - 3)^2 - 4(3y^2 + 1)^2 = (9y + 2)(9y - 2 - 12y^2)$;

в) $(a - b)^2(a + b) - 4ab(a + b) - 8ab(-a - b) = (a + b)^3$;

г) $(c + d)^2(c - d) + 6cd(c - d) + 10cd(d - c) = (c - d)^3$.

653 Решите уравнение:

а) $a^3 - 5a^2 + 4a = 0$; д) $m^3 - m^2 - 49m + 49 = 0$;

б) $2b^3 + 8b^2 + 6b = 0$; е) $n^5 - n^4 + 3n^3 - 3n^2 = 0$;

в) $c^3 + 3c^2 - 9c - 27 = 0$; ж) $2k^3 - k^2 + 9 - 18k = 0$;

г) $3d^3 - 5d^2 + 6d - 10 = 0$; з) $r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0$.

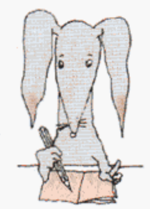
654 Докажите, что многочлен принимает только неотрицательные значения при любых числовых значениях переменных:

а) $9x^2 - 6x + 2$;
б) $y^2 - 12y + 40$;
в) $a^2 + b^2 + 2c^2 - 2ac - 2bc + 3$;
г) $m^2 - 8mn + 16n^2 + 9p^2 + q^2 - 6pq + 2$;
д) $p^2 - 6pq + 9q^2 + 5r^2$;
е) $9m^2 + n^2 - 6m + 1$;
ж) $11r^2 - 2r + 1$;
з) $z^2 - 8zt + 20t^2 - 4t + 1$.

655 Найдите значение выражения:

а) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, если $x + 1 = 10$;
б) $y^3 + 3y^2 - 4y - 12$, если $y + 3 = -10$;
в) $z^3 + 12z^2 + 44z + 48$, если $z + 4 = 2{,}2$;
г) $t^3 + 4t^2 - 9t - 36$, если $t - 3 = -0{,}5$.

656 Докажите тождество при $x \neq y$:



а) $\dfrac{x^8 - y^8}{x - y} = (x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$;

б) $\dfrac{x^{16} - y^{16}}{x - y} = (x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8)$;

в) $\dfrac{x^{2^5} - y^{2^5}}{x - y} = (x^{2^0} + y^{2^0})(x^{2^1} + y^{2^1})(x^{2^2} + y^{2^2})(x^{2^3} + y^{2^3})(x^{2^4} + y^{2^4})$;

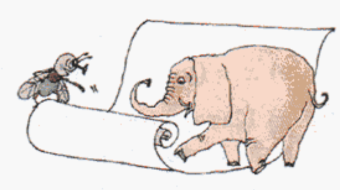
г) $\dfrac{x^{2^6} - y^{2^6}}{x - y} = (x^{2^0} + y^{2^0})(x^{2^1} + y^{2^1})(x^{2^2} + y^{2^2})(x^{2^3} + y^{2^3})(x^{2^4} + y^{2^4})(x^{2^5} + y^{2^5})$.

657 а) При каких значениях x произведение двучленов $x + 3$ и $x - 3$ меньше суммы их квадратов на 28?

б) При каких значениях y удвоенное произведение двучленов $y + 5$ и $y - 5$ меньше суммы их квадратов на $9y$?

П **658** Запишите следующие выражения на математическом языке:

а) квадрат произведения чисел 5, квадрата числа a, куба числа b;
б) произведение кубов чисел 3, x, y, 2, z;
в) сумма произведения чисел 5 и x и произведения чисел 4 и c;
г) разность частного чисел 9 и q и разности между числом 7 и a;
д) квадрат суммы чисел 6, r, s, t;
е) сумма квадратов чисел 8, m, n, k, l;
ж) четвертая степень суммы чисел a, b и c;
з) сумма пятых степеней чисел 2, 5 и y.



659 Множества A, B и C заданы следующим образом:
A – множество натуральных чисел, меньших 5;
B – множество целых чисел, модуль которых меньше или равен 3;
C – множество четных положительных чисел, меньших 8.

1) Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A, B и C и отметьте на ней элементы данных множеств.

2) Найдите:

а) $A \cap C$;
б) $A \cup B$;
в) $B \cup C$;
г) $A \cap B$;
д) $(A \cup C) \cap B$;
е) $A \cup (B \cap C)$;
ж) $C \cap A \cap B$;
з) $A \cup B \cup C$.

660 Составьте список элементов множеств, заданных характеристическим свойством:

а) $A = \{a\colon a \in Z;\ -3 \leqslant a \leqslant 5\frac{2}{5}\}$; в) $C = \{c\colon c \in N_0;\ -1 \leqslant c < 3\}$;

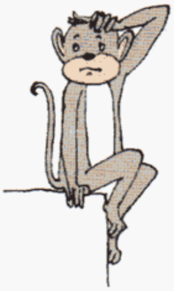
б) $B = \{b\colon b \in N;\ -5 < b \leqslant 6{,}9\}$; г) $D = \{d\colon -6 < d < 12$ и $d = 3n + 1;\ n \in N\}$.

661 Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A и B. Найдите их пересечение и объединение:

а) $A = \{a\colon a \equiv 2 \pmod 3);\ -2 \leqslant a < 10\}$; $B = \{b\colon b \equiv 3 \pmod 5);\ -3 \leqslant a < 9\}$;

б) $A = \{a\colon a \equiv 1 \pmod 4);\ -4 \leqslant a < 11\}$; $B = \{b\colon b \equiv 5 \pmod 6);\ -2 \leqslant a < 7\}$.

662 Проверьте справедливость высказываний. Для ложных высказываний постройте их отрицания:



а) Если число делится на 5 и на 7, то оно всегда делится на 35.

б) Если число делится на 3 и на 15, то оно всегда делится на 45.

в) Если число a не делится на 4, то число $5a$ не делится на 4.

г) Если число b четное, то число $7b$ всегда делится на 14.

д) Если число $8c$ делится на 7, то число c всегда делится на 7.

е) Если число $18d$ делится на 15, то число d всегда делится на 15.

663 Докажите:

а) Если натуральное число делится на 5, то оно не может при делении на 20 давать остаток 16.

б) Если натуральное число при делении на 27 дает остаток 7, то оно не делится на 9.

в) Если натуральное число делится на 8, то при делении на 16 оно не может давать остаток 7.

г) Если натуральное число при делении на 30 дает остаток 21, то оно не делится на 10.

664 Запишите многочлен в стандартном виде и определите его степень:

а) $(14ab^2 - 7ba^2 - 6ba) - (-6ab + 14ab^2) + 6ba^2$;

б) $-(9m - 7n) + (-6n - (4m + 11)) - (2m - (17 + 5n)) + (m - 4n)$;

в) $14a + 7b - (9a - 25b) - ((4b + 6a) + (-3a + 18b))$;

г) $2p + (3p - 2q) - 6p^2 - 9q^2 + (9 - 3(4 - 2p^2 - 3q^2)) - 6p + 12q$;

д) $-2(2a + 0{,}5(9c - (2d + 6a) + 2d - 5c)) - (-2a + 3d - c)$;

е) $x - (y - (z - x - y)) - (y + (x - (z - x - y)))$.

665 а) Катер прошел расстояние между двумя пристанями по течению реки за 6 часов, а против течения реки – за 8 часов. Чему равно расстояние между этими пристанями, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

б) Чтобы покататься по реке, Миша и Маша взяли напрокат моторную лодку. На какое максимальное расстояние они могут отплыть по реке от пункта проката, чтобы успеть вернуться через 4 часа, если известно, что собственная скорость лодки 8 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч?

в) Расстояние между двумя пристанями равно 35 км. Сколько времени потребуется Коле и Оле, чтобы проплыть на лодке от одной пристани до другой и сразу вернуться обратно, если собственная скорость лодки равна 6 км/ч, а скорость течения реки составляет 1 км/ч?

666 Представьте многочлен в виде произведения нескольких многочленов:

а) $16a^3b - 4ab^3$; в) $-125x^3 - 27$; д) $7m^6 - 448$;
б) $3c^2d^2 - 27c^2t^2$; г) $5y^4z + 40yz^4$; е) $3n^6 + 3k^6$.

667 Разложите многочлен на множители:

а) $6a^2 - 12ab + 6b^2$; г) $r^2 + 2rs + s^2 - t^2$; ж) $a - b - a^2 + b^2$;
б) $3cd^2 + 12cd + 12c$; д) $25 - m^2 + 6mn - 9n^2$; з) $2c^3 + c^2d - cd^2$;
в) $4p - 24pq + 36pq^2$; е) $9k^2 - 24kp + 16p^2 - 49$; и) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$.

668 Решите уравнение:

а) $a^2 + 2a - 15 = 0$; в) $3c^2 + 16c - 35 = 0$; д) $y^8 + 15y^4 - 16 = 0$;
б) $2b^2 + 2b - 12 = 0$; г) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$; е) $8z^6 + 7z^3 - 1 = 0$.

669 Разложите многочлен на множители:

а) $x^3 + 27 + 7x^2 + 21x$; д) $a^3 - 6a^2 - 4a + 24$;
б) $y^4 - y^3 - y + 1$; е) $27c^3 - d^3 - 45c^2 - 15cd - 5d^2$;
в) $z^6 - z^4 + 5z^2 - 5$; ж) $m^3 - 9m^2 - 4m + 36$;
г) $rs^2 + s^3 - r - s$; з) $(p^2 + 9pq + 5q^2)^2 - (p^2 + 5q^2)^2$.

670 Найдите корни уравнения:

а) $a^3 + 11a = 0$; в) $c^4 + c^3 - c^2 - c = 0$;
б) $b^3 - 8b^2 = 0$; г) $d^3 + 6d^2 - 9d - 54 = 0$.

671 Найдите значение выражения:

а) $xy^2 + x^2y$, если $xy = 5$, $x + y = 8$;
б) $9z^2 - 12zt + 4t^2$, если $2t - 3z = 9$;
в) $b^2 - a^2$, если $a - b = 3$, $a + b = -5$;
г) $c^3 - d^3$, если $c - d = 2$, $cd = 5$.

672 Сократите дроби при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{27 - 15a + 5a^2 - a^3}{3a + ab - 3b - a^2}$; в) $\dfrac{p^2 + 9q^2 - 4r^2 - 6pq}{p^2 - 9q^2 + 4r^2 + 4pr}$;

б) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2 - 3x - 3y}$; г) $\dfrac{m^2 + 2mn + 4nk - 4k^2}{4n^2 + m^2 + 4mn - 4k^2}$.

673 Разложите трехчлен на множители, выделяя полный квадрат:

а) $x^2 + 8x - 20$; в) $a^2 - 2{,}5a - 6$; д) $2c^2 - 5c - 3$;
б) $y^2 - 9y + 20$; г) $b^2 - 4{,}5b - 9$; е) $3d^2 - 5d - 2$.

674 Разложите многочлен на множители:

а) $x^2(x - 3) - 4x(x - 3) - 21x + 63$; в) $a^2 - c^2 - 4d^2 + 4b^2 - 4ab - 4cd$;
б) $y^2(y + 7) + 9y(y + 7) + 20y + 140$; г) $9m^2 + 4n^2 - 25p^2 - 36q^2 + 12mn + 60pq$.

675 Докажите, что значение выражения не зависит от значений переменных:

а) $(x - 5)(x + 5) - (x - 3)(x + 3)$; в) $(z + 5)(z^2 - 5z + 25) - (z - 5)(z^2 + 5z + 25)$;
б) $9(2y - 8)(2y + 8) - 4(3y - 7)(3y + 7)$; г) $(3t - 1)(9t^2 + 3t + 1) - (3t + 1)(9t^2 - 3t + 1)$.

676 Разложите на множители:

а) $ab(a + b) + ac(a - c) - bc(b + c)$; в) $70x - 126y + 35xz - 63yz$;

б) $x^2(y + z) + y^2(x - z) - z^2(y + x)$; г) $68m + 119n + 36km + 63kn$.

677 Решите уравнение:

а) $a^3 - 7a - 6 = 0$; в) $c^3 + c^2 - 9c - 9 = 0$;

б) $2b^3 + 8b^2 + 2b + 8 = 0$; г) $d^5 - d^4 + d^3 - d^2 + d - 1 = 0$.

678 Множества A, B и C заданы следующим образом:

A – множество натуральных чисел, больших 4 и меньших 9;

B – множество натуральных чисел, меньших 10, дающих при делении на 3 остаток 2;

C – множество нечетных положительных чисел, меньших или равных 11.

1) Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A, B и C и отметьте на ней элементы данных множеств.

2) Найдите:

а) $A \cap C$; б) $A \cup B$; в) $(A \cup C) \cap B$; г) $C \cap A \cap B$.

679 Составьте список элементов множеств, заданных характеристическим свойством:

а) $A = \{a\colon a \in Z;\ -7 \leqslant a \leqslant -2\frac{3}{7}\}$; б) $B = \{b\colon b \in N;\ -4 < b \leqslant 3{,}8\}$.

680 а) При каких значениях x произведение двучленов $x + 4$ и $x - 4$ меньше суммы их квадратов на 52?

б) При каких значениях y удвоенное произведение двучленов $y + 7$ и $7 - y$ меньше суммы их квадратов на $14y$?

681 Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A и B. Найдите их пересечение и объединение:

$A = \{a\colon a \equiv 5 \pmod 6;\ -3 \leqslant a < 12\}$; $B = \{b\colon b \equiv 7 \pmod 8;\ -1 \leqslant a < 8\}$.

682 Докажите:

а) Если натуральное число делится на 11, то оно не может при делении на 33 давать остаток 17.

б) Если натуральное число при делении на 12 дает остаток 8, то оно не делится на 27.

683 Запишите многочлен в стандартном виде и определите его степень:

а) $(4xy^2 - 3x^2y - 5xy) - (-4xy + 9xy^2) + 7yx^2$;

б) $-(3p - 4q) + (-4q - (5p + 12)) - (3p - (13 + 6q)) - (-11p + 7q)$.

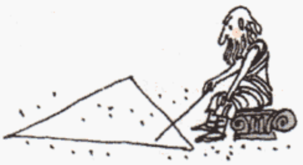
684 а) В пончиковой компании Антона и Ксюши склад готовой продукции и цех, в котором производятся пончики, соединены движущейся дорожкой. По этой дорожке Антон доехал на велосипеде из цеха на склад за 5 минут, а в обратном направлении – за 10 минут. Чему равно расстояние от склада готовой продукции до цеха, если скорость движущейся дорожки равна 1 м/с, а скорость Антона на велосипеде была постоянной?

б) Антону и Ксюше, владельцам пончиковой компании, необходимо доставить пончики из Москвы в Кострому. Они решили для этого арендовать теплоход. Известно, что средняя скорость теплохода 17 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч. Какое расстояние между Москвой и Костромой, если на дорогу туда и обратно теплоход затратил 34 часа?

685 Докажите, что A делится на B:

$$A = \frac{57{,}24 \cdot 3{,}55 + 430{,}728}{2{,}7 \cdot 1{,}88 - 1{,}336} + \frac{127{,}18 \cdot 4{,}35 + 14{,}067}{18 + 214{,}92 : 358{,}2};$$

$$B = \left[\frac{30 \cdot (3{,}6 - 2{,}8)}{0{,}25 \cdot (0{,}94 + 1{,}06)} + \frac{(0{,}2 - 0{,}15) : 0{,}0001}{4{,}7 - 3{,}9}\right] : 26{,}92.$$



С **686*** Как разлить молоко из двенадцатилитрового бидона на две равные части, имея только два пустых бидона – восьмилитровый и пятилитровый?

687* На занятиях в спортивной секции число отсутствующих спортсменов составляет $\frac{1}{6}$ часть присутствующих. Если с занятия уйдет один спортсмен, то число отсутствующих станет равно $\frac{1}{5}$ числа присутствующих. Сколько спортсменов в этой спортивной секции?

5. Решение задач с помощью разложения многочленов на множители

«Отрицать за математическими формулами объективную реальность – это значит не видеть за деревьями леса».

Людвиг Больцман (1844–1906),
австрийский физик-теоретик

В предыдущих пунктах мы изучали разные способы разложения многочленов на множители. Делали мы это в том числе и для того, чтобы научиться решать те задачи, которые были недоступны нам ранее.

В данном пункте мы убедимся в том, что умение раскладывать многочлены на множители открывает новые возможности для решения самых разных задач.

Задача 1. Ширина прямоугольника на 5 см меньше стороны квадрата, а его длина – на 3 см больше стороны этого же квадрата. Найдите длину данного прямоугольника, если его площадь равна 9 см^2.

Решение:

<u>Построение математической модели</u>.

Пусть сторона квадрата равна x см, где $x > 0$.

Тогда ширина прямоугольника равна $(x - 5)$ см, а его длина – $(x + 3)$ см, где $x - 5 > 0$, $x + 3 > 0$.

Нам известно, что площадь прямоугольника равна произведению его длины и ширины. С другой стороны, по условию задачи она равна 9 см^2.

Составим математическую модель задачи:

$$\begin{cases}(x - 5)(x + 3) = 9\\ x > 0,\ x - 5 > 0,\ x + 3 > 0\end{cases} \longrightarrow x + 3 - ?$$

Стратегия решения уравнения.

Для ответа на вопрос задачи нам надо решить уравнение $(x - 5)(x + 3) = 9$. Общий способ решения таких уравнений нам пока не известен. Но нам встречались уравнения вида $(ax + b)(cx + d) = 0$, где $a, b, c, d \in Q$, а x – неизвестная величина. Мы знаем, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, если мы сможем представить исходное уравнение в указанном виде, то для полного решения задачи нам достаточно будет воспользоваться данным правилом, то есть:

$$(ax + b)(cx + d) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \text{ или } cx + d = 0.$$

А находить корни таких уравнений мы уже умеем. Тем самым решение уравнения неизвестного вида будет нами сведено к решению уже известных уравнений.

Таким образом, для решения задачи нам надо выполнить следующую последовательность действий.

Шаг 1. Представим уравнение $(x - 5)(x + 3) = 9$ в виде $(x - 5)(x + 3) - 9 = 0$ и запишем левую часть как многочлен стандартного вида.

Шаг 2. Разложим полученный многочлен на множители.

Шаг 3. Каждый из множителей приравняем к нулю и найдем корни получившихся уравнений.

Шаг 4. Выберем из всех корней те, которые удовлетворяют неравенствам $x > 0$, $x - 5 > 0$, $x + 3 > 0$.

Шаг 5. Для выбранных корней вычислим $x + 3$ и запишем получившийся ответ.

Реализация стратегии.

Шаг 1

$(x - 5)(x + 3) = 9 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 3) - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 5x - 15 - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0.$

Шаг 2

Для того чтобы разложить многочлен $x^2 - 2x - 24$ на множители, выделим полный квадрат. Для этого добавим и вычтем 1, а затем воспользуемся формулой разности квадратов.

$x^2 - 2x - 24 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 24 = x^2 - 2x + 1 - 25 = (x - 1)^2 - 25 = (x - 1)^2 - 5^2 =$

$= (x - 1 - 5)(x - 1 + 5) = (x - 6)(x + 4).$

Шаг 3

Чтобы решить уравнение $(x - 6)(x + 4) = 0$, приравняем к нулю каждый из множителей:

$(x - 6)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x - 6 = 0$ или $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ или $x = -4$.

Корни $x = 6$ и $x = -4$ данного уравнения являются также корнями исходного уравнения, поскольку они получены в результате равносильных преобразований исходного уравнения.

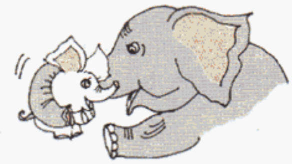
Шаг 4

Корень $x = 6$ удовлетворяет всем трем данным неравенствам, так как $6 > 0$, $6 - 5 > 0$ и $6 + 3 > 0$ – истинно.

Корень $x = -4$ не удовлетворяет неравенству $x > 0$, так как $-4 > 0$ – ложно.

Шаг 5

Вычислим искомое значение длины прямоугольника:



$x + 3 = 6 + 3 = 9$ (см).

Ответ: длина прямоугольника равна 9 см.

Задача 2. Загадали три рациональных числа. Произведение первого и третьего из них равно (-6). Известно, что второе загаданное число на 6 больше первого, а третье – на 11 больше произведения первого и второго чисел. Найдите эти числа.

Решение:

<u>Построение математической модели</u>.

Пусть первое рациональное число равно x. Тогда второе рациональное число равно $x + 6$, а третье равно $x(x + 6) + 11$. Известно, что $x\,[x(x + 6) + 11] = -6$.

Составим математическую модель задачи:

$$\begin{cases} x\,[x(x+6)+11] = -6 \\ x,\ x+6,\ x(x+6)+11 \in Q \end{cases} \longrightarrow x,\ x+6,\ x(x+6)+11 - ?$$

<u>Стратегия решения уравнения</u>.

Для того чтобы решить данное уравнение, запишем его в виде

$$x\,[x(x + 6) + 11] + 6 = 0$$

и разложим многочлен в левой его части на множители. Затем приравняем каждый из множителей к нулю и найдем корни получившихся уравнений. Тем самым мы найдем корни исходного уравнения, так как произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Итак, для решения задачи выполним следующие действия в такой последовательности:

Шаг 1. Представим уравнение $x\,[x(x + 6) + 11] = -6$ в виде $x\,[x(x + 6) + 11] + 6 = 0$ и запишем его левую часть как многочлен стандартного вида.

Шаг 2. Разложим полученный многочлен на множители.

Шаг 3. Каждый из множителей приравняем к нулю и найдем корни получившихся уравнений.

Шаг 4. Проверим, что корни уравнений являются рациональными числами.

Шаг 5. Вычислим $x + 6$, $x(x + 6) + 11$ и запишем получившийся ответ.

<u>Реализация стратегии</u>.

Шаг 1

$x\,[x(x + 6) + 11] = -6 \Leftrightarrow x\,[x(x + 6) + 11] + 6 = 0 \Leftrightarrow x[x^2 + 6x + 11] + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

Шаг 2

Подробно разложение многочлена $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ на множители мы рассмотрели в пункте 4.4.4 (см. Пример 4). Поэтому здесь мы лишь кратко запишем проводимые преобразования:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + 6x^2 + 12x + 6 - x = x(x^2 - 1) + 6(x + 1)^2 =$$

$$= (x + 1)[x(x - 1) + 6(x + 1)] = (x + 1)[x^2 + 5x + 6] = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

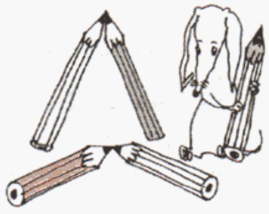
Шаг 3

Уравнение $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0$ равносильно исходному. Чтобы его решить, приравняем к нулю каждый из множителей:

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ или } x + 2 = 0 \text{ или } x + 3 = 0$$

$$x = -1, \qquad x = -2, \qquad x = -3.$$



Таким образом, мы получили, что корнями исходного уравнения являются числа (-1), (-2) и (-3).

Шаг 4

Все полученные корни являются рациональными числами.

Шаг 5

Если $x = -1$, то $x + 6 = -1 + 6 = 5$, а $x(x + 6) + 11 = -1 \cdot 5 + 11 = 6$.

Если $x = -2$, то $x + 6 = -2 + 6 = 4$, а $x(x + 6) + 11 = -2 \cdot 4 + 11 = 3$.

Если $x = -3$, то $x + 6 = -3 + 6 = 3$, а $x(x + 6) + 11 = -3 \cdot 3 + 11 = 2$.

Ответ: могли загадать следующие тройки рациональных чисел: $(-1; 5; 6)$, $(-2; 4; 3)$, $(-3; 3; 2)$.

Таким образом, мы в очередной раз убеждаемся, что умение раскладывать многочлены на множители позволяет существенно расширить наши возможности при решении самых разнообразных задач.

К **688** а) Загадали два натуральных числа. Известно, что одно из них на 2 больше другого, а их произведение равно 15. Найдите эти числа.

б) Сумма двух натуральных чисел равна 10, а их произведение равно 24. Найдите эти числа.

в) Одно из натуральных чисел в два раза больше другого, а их произведение равно 32. Найдите эти числа.

689 Решите уравнения:

а) $3a(a - 7) = 0$; в) $(2c + 1)(3c - 2) = 0$; д) $5x^2(x - 3)(2x + 4) = 0$;

б) $4b(b + 9) = 0$; г) $(8d + 6)(4d - 5) = 0$; е) $3y^3(7y + 14)(2y - 5) = 0$.

690 В контрольной работе по математике нужно было решить уравнение $x^3 + x = 2x^2$. Коля решал это уравнение следующим образом:

«Заметив, что многочлен в правой части уравнения имеет общий множитель x, он вынес его за скобки. Затем он разделил правую и левую части на одно и то же число x и получил уравнение $x^2 + 1 = 2x$. После этого он добавил к правой и левой части уравнения одно и то же число $(-2x)$ и, воспользовавшись формулой суммы квадратов, нашел корни уравнения. В итоге он записал свое решение так:

$$x^3 + x = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1».$$

Саша же решал это уравнение иначе:

«Он сначала добавил к правой и левой части уравнения одно и то же число ($-2x^2$), а затем разложил получившийся многочлен на множители и нашел корни уравнения. В итоге он записал свое решение так:

$x^3 + x = 2x^2 \Leftrightarrow x^3 + x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x - 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) = 0$ или $x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ или $x = 0$».

Почему мальчики получили разные ответы? В каком месте и кем из них была допущена ошибка? Какое правило было нарушено и как правильно решить данное уравнение?

691 1) Постройте математическую модель и решите задачу:

«Ширина прямоугольника на 5 см меньше стороны квадрата, а его длина на 3 см больше стороны этого же квадрата. Найдите длину данного прямоугольника, если его площадь равна 9 см^2».

2) Сравните свое решение этой задачи с решением, приведенным на стр. 127–129 учебника. Уточните шаги ее решения.

3) Какой прием решения уравнений был использован при решении этой задачи?

692 Решите уравнение:

а) $7x(x + 1) = 21 - 7x$; в) $4z(z + 2) = 32z + 13$; д) $r^2(r - 7) = -3r(3r - 5)$;

б) $y(y - 1) = y + 15$; г) $t^2(14 - t) = 6t(2t - 4)$; е) $p^2(3p - 7) = 2p(2 - 9p)$.

693 а) Велосипедисты на первом этапе соревнований ехали в течение 9 часов со средней скоростью x км/ч, а на втором этапе они ехали на x часов больше со средней скоростью на 9 км/ч большей. С какой средней скоростью ехали велосипедисты на первом этапе, если на втором этапе они проехали 900 км?

б) Длина ребра второго куба на 3 см больше длины ребра первого. Найдите длину ребра первого куба, если объем второго куба равен 343 см^3.

в) Вчера в магазин привезли a книг по цене a р. за штуку, а сегодня привезли на 3 книги меньше, по цене за штуку на 5 р. большей. Сколько книг привезли вчера в магазин, если сегодня книг привезли на сумму 39 984 р.?

694 а) На прямоугольном участке земли, длина которого на 10 м больше его ширины, построили дом, занимающий площадь 100 м^2. Найдите длину этого участка, если известно, что площадь участка, не занятая домом, равна 164 м^2.

б) Длина прямоугольного участка земли на 8 м больше его ширины. Если бы его длину уменьшили на 5 м, а ширину увеличили на 5 м, то площадь получившегося участка стала бы в 2 раза меньше, чем площадь исходного, увеличенная на 78 м^2. Чему равна длина этого участка земли?

в) Найдите периметр прямоугольника, длина которого на 6 см больше ширины, а площадь равна 72 см^2.

695 Найдите загаданные рациональные числа, если известно, что:

а) их сумма равна 3,5, а их произведение равно 3;

б) их разность равна 2,2, а их произведение равно 8,4;

в) одно число больше другого на 1,6, а их произведение равно 13,8;

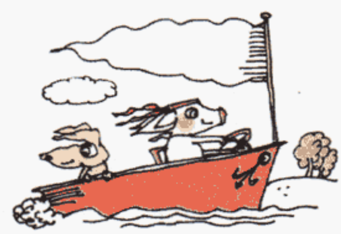
г) одно число меньше другого на 4, а их произведение равно –1,75.

696 а) Первый рабочий, работая самостоятельно, может выполнить заказ на 3 часа быстрее, чем второй. За сколько часов выполнит этот заказ один второй рабочий, если вместе они его выполнили за 2 часа?

б) Мастер и его ученик могут выполнить, работая вместе, некоторую работу за 3 часа. Сколько времени необходимо ученику, чтобы выполнить эту работу самостоятельно, если известно, что мастер, работая один, сможет выполнить ее на 8 часов быстрее?

в) Два насоса, работая одновременно, могут наполнить пустой бассейн за 6 часов. При этом один первый насос наполнит этот бассейн на 9 часов быстрее, чем один второй. Сколько часов понадобится второму насосу, чтобы наполнить этот бассейн?

697 а) Моторная лодка проплыла по течению реки 18 км, а затем против течения – 30 км. При этом на весь путь она затратила 8 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.



б) Теплоход проехал 9 км по озеру и 20 км по течению реки за 1 час. Чему равна собственная скорость теплохода, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

в) Два автобуса вышли одновременно из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 48 км. Скорость первого автобуса была на 4 км/ч больше, и поэтому он прибыл в пункт B на 10 минут раньше. Найдите скорость второго автобуса.

698 а) В сплав меди и цинка, содержащий 60 кг меди, добавили 160 кг цинка. В результате процентное содержание меди в сплаве уменьшилось на 10. Чему была равна первоначальная масса сплава?

б) В сплав меди и олова, содержащий 5 кг олова, добавили 15 кг меди. В результате процентное содержание меди в сплаве увеличилось на 30. Сколько килограммов меди было в первоначальном сплаве?

699 а) Автомобилист выехал из города на дачу по дороге, длина которой 24 км, а возвратился домой по другой дороге, длиной 30 км. Увеличив на обратном пути скорость на 2 км/ч, он тем не менее затратил на обратный путь на 6 мин больше, чем на путь на дачу. С какой скоростью автомобилист ехал на дачу, если известно, что его скорость была больше 20 км/ч?

б) Сначала траншею рыла первая бригада рабочих. Через 4 часа к ней присоединилась вторая бригада, и, проработав вместе еще 8 часов, они вырыли траншею полностью. За сколько часов вырыла бы эту траншею вторая бригада, работая самостоятельно, если первой бригаде потребовалось бы на это на 8 часов больше?

700 Найдите загаданные рациональные числа, если известно, что:

а) произведение первого и третьего из них равно (–8), второе число на 5 меньше первого, а третье – на 2 больше произведения первого и второго из загаданных чисел;

б) произведение первого и третьего из них равно 2, второе число на 2 больше первого, а третье – на 1 меньше произведения первого и второго из загаданных чисел.

П **701** Среди приведенных высказываний найдите общие высказывания, высказывания о существовании и высказывания, не являющиеся ни теми, ни другими. Определите истинность высказываний. Для ложных высказываний постройте их отрицания.

а) Число 6 является делителем числа 128.

б) Число 9 является делителем всех натуральных чисел.

в) Существуют натуральные числа, делителем которых является число 5.

г) Все корни уравнения $(x + 1)(x - 2) = 0$ – целые числа.

д) Уравнение $(3y + 5)(2y - 3) = 0$ имеет целый корень.

е) Число 0,5 является корнем уравнения $(2z - 1)(z + 3) = 0$.

ж) Все простые числа нечетные.

з) Некоторые простые числа нечетные.

и) Простое число 5 является нечетным.

702 Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $-2m^3n + 2m^2n - (-3n - 3m^3n) - (m^2n + 2n)$ при $m = 2$, $n = -2$;

б) $3a^2 - ab - b^2 + (-3a^2 + 2ab - b^2) + 1 + a^2 - 2ab + 2b^2$ при $a = 3$, $b = 2$;

в) $\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y\right) - x - 2 + 2y + \left(\frac{4}{5}x - \frac{4}{5}y\right) - (x + y)$ при $x = 5$, $y = 11$;

г) $4p^2 + 2pq + 7 - q^2 - (-p^2 - pq + q^2) - 3p^2 - (3pq + 2p^2) + q^2$ при $p = -1$, $q = 2$.

703 Сравните значения числовых выражений:

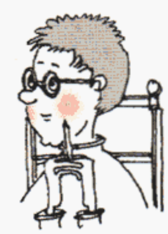
а) $5{,}5^3 + 6{,}7^3$ и $12{,}2^3$;

б) $12{,}4^3 - 11{,}6^3$ и $12{,}4^2 + 12{,}4 \cdot 11{,}6 + 11{,}6^2$;

в) $7{,}9^3 - 6{,}3^3$ и $6{,}3^2 + 6{,}3 \cdot 7{,}9 + 7{,}9^2$;

г) $14{,}8^3 - 15{,}6^3$ и $0{,}8^3$;

д) $21{,}7^3 + 13{,}4^3$ и $21{,}7^2 - 21{,}7 \cdot 13{,}4 + 13{,}4^2$.



704 На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $x > 5$, $y \leqslant 4$; в) $x \leqslant 6$, $y < 2$; д) $1 \leqslant x + 2 \leqslant 4$; $-2 \leqslant y - 3 \leqslant 4$;

б) $x \geqslant 3$, $y > -1$; г) $x \geqslant -5$, $y < 6$; е) $-6 \leqslant x - 5 \leqslant -1$; $5 \leqslant y + 4 \leqslant 9$.

705 Изобразите на числовой прямой Ox множество решений неравенства:

а) $x + 3 > 0$; в) $3 \leqslant x + 7 < 6$; д) $|x - 2| > 1$; ж) $1 \leqslant |x - 6| \leqslant 2$;

б) $x - 5 < 0$; г) $2 < x - 4 \leqslant 5$; е) $|x + 3| < 4$; з) $6 < |x + 3| < 8$.

706 Какие остатки дают натуральные степени числа a при делении на b?

а) $a = 3$, $b = 7$; б) $a = 4$, $b = 11$; в) $a = 2$, $b = 17$.

707 Зная, что $a, b \in N$, вычислите A, если:

а) $A = 3a - b$, $3^a = 243$, $4^b = 256$; в) $A = 2a + 3b$, $5^a = 125$, $9^b = 729$;

б) $A = 5a : b$, $6^a = 216$, $2^b = 32$; г) $A = 3ab$, $7^a = 343$, $8^b = 64$.

Д **708** Решите уравнение:

а) $7x(x-3)=0$; в) $(3z+2)(z-4)=0$; д) $4a^2(a-2)(3a+12)=0$;

б) $5y(y+2)=0$; г) $(4t+8)(2t-9)=0$; е) $9b^3(6b+5)(4b-7)=0$.

709 а) На прямоугольном участке земли, длина которого на 6 м больше его ширины, построили дом, занимающий площадь 120 м². Найдите длину этого участка, если известно, что площадь участка, не занятая домом, равна 232 м².

б) Найдите периметр прямоугольника, длина которого на 8 см больше ширины, а площадь равна 128 см².

710 При каких значениях переменной равны значения выражений?

а) $3x(x+1)=9-3x$; в) $a^2(12-a)=7a(2a-5)$;

б) $2y(y-5)=6y+18$; г) $2b^2(b-5)=-2b(18-4b)$.

711 Найдите загаданные рациональные числа, если известно, что:

а) их сумма равна 2,5, а их произведение равно 1,5;

б) их разность равна 1,5, а их произведение равно 10.

712 а) Первая бригада пекарей пончиковой компании Антона и Ксюши, работая самостоятельно, может выполнить полученный заказ на 9 часов быстрее, чем вторая. Работая вместе, они выполнили этот заказ за 20 часов. За сколько часов выполнила бы этот заказ вторая бригада, работая самостоятельно?

б) Для приготовления пончиков заготовили смесь из изюма и пончикового теста, содержащую 4 кг изюма. Затем в нее добавили 10 кг теста, и в результате этого процентное содержание изюма в смеси уменьшилось на 2. Чему была равна первоначальная масса смеси?

713 а) Яхта проплыла 8 км по течению реки и 16 км против течения реки за 1 час 20 мин. Чему равна собственная скорость яхты, если скорость течения реки равна 4 км/ч?

б) Автобус выехал из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 40 км. Возвращаясь обратно из B в A, он ехал со скоростью на 10 км/ч меньшей. Поэтому на обратный путь он затратил на 20 мин больше, чем на путь от A до B. С какой скоростью ехал автобус из B в A?

в) Автобус выехал из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 40 км от него. Через 10 мин после этого вслед за ним выехал автомобиль. Скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости автобуса. Чему равна скорость автомобиля, если в пункт B автобус и автомобиль прибыли одновременно?

714 Найдите загаданные рациональные числа, если известно, что произведение первого и третьего из них равно 20. Второе загаданное число на 5 больше первого, а третье – на 4 меньше произведения первого и второго чисел.

715 Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $9xyz-(-12xyz^2)-(9xyz^2+6xyz-7zyx^2+10x^2yz)$ при $x=2$; $y=3$; $z=-1$;

б) $(4ab-5bc^2)-(-ab-4bc^2)-bc^2-5ab$ при $a=-1{,}4$; $b=-2{,}5$; $c=-0{,}3$.

716 Сравните значения числовых выражений:

а) $7{,}2^3 + 4{,}3^3$ и $11{,}5^3$;

б) $19{,}3^3 - 18{,}4^3$ и $19{,}3^2 + 19{,}3 \cdot 18{,}4 + 18{,}4^2$;

в) $21{,}5^3 - 15{,}6^3$ и $21{,}5^2 + 21{,}5 \cdot 15{,}6 + 15{,}6^2$;

г) $13{,}6^3 - 14{,}9^3$ и $1{,}3^3$;

д) $16{,}9^3 + 19{,}7^3$ и $16{,}9^2 - 16{,}9 \cdot 19{,}7 + 19{,}7^2$.

717 Изобразите на числовой прямой Ox множество решений неравенства:

а) $x - 2 > 0$; б) $-2 \leqslant x + 4 < 7$; в) $|x - 3| > 5$; г) $2 \leqslant |x - 5| \leqslant 5$.

718 На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $x > 2,\ y \leqslant -3$; б) $x \leqslant -7,\ y < 4$; в) $-2 \leqslant x + 3 \leqslant 8$; г) $-3 \leqslant y - 4 \leqslant 3$.

719 Какие остатки дают натуральные степени числа a при делении на b?

а) $a = 3,\ b = 8$; б) $a = 2,\ b = 9$; в) $a = 4,\ b = 5$.

720 Зная, что $a, b \in N$, вычислите A, если:

а) $A = 5a + 2b,\ 2^a = 256,\ 3^b = 729$; б) $A = 2a - 3b,\ 6^a = 36,\ 7^b = 49$.

721 Докажите, что квадрат разности A и B делится на 9:

$A = 48 - 2(5(7 - 2) - 3) - 7 - 3(8 - (4 + 9)) - 3 - (8 - 11)$;

$B = -(3(7 - 4) - 5 - 9) - 2(0{,}5(4 - 2(3 - 7) - (3 + 7)) - 9) - 9 - 3(5 - 6)$.

C **722** Для нумерации страниц книги потребовалось 1392 цифры. Сколько страниц в этой книге, если первая страница имеет номер 1?

723* Отец завещал своим пятерым сыновьям три равноценных дома и велел им разделить наследство поровну. Братья договорились, что каждый из трех старших братьев возьмет себе по дому и заплатит за это младшим братьям некоторую сумму денег, которую они разделят между собой.
В результате братьям удалось выполнить завещание отца, и все они получили поровну.
Сколько стоили три завещанных отцом дома, если каждый из старших братьев заплатил по 800 золотых монет?

724* Турист отправился в путь, предполагая проходить каждый день третью часть всего пути, запланировав через 3 дня прибыть в пункт назначения. В первый день он действительно прошел то расстояние, которое запланировал, но во второй день он прошел лишь третью часть оставшегося пути. В третий день он опять прошел третью часть уже нового остатка пути. В результате ему осталось пройти еще 24 км. Сколько километров прошел турист в первый день?

Задачи для самоконтроля к Главе 4

725 Запишите буквенные выражения, используя понятие степени:

а) $(-x)\cdot(-x)\cdot(-x)\cdot(-x)$; в) $(mn)\cdot(mn)\cdot(mn)\cdot(mn)\cdot(mn)$;

б) $-3y\cdot 3y\cdot 4z\cdot 4z\cdot 4z$; г) $(c-d)\cdot(c-d)\cdot(c-d)$.

726 Определите, каким числом – положительным или отрицательным – является выражение:

а) $(-11)^{101}$; б) $\left(-\frac{7}{9}\right)^{516}$; в) $(-3,7)^{113}\cdot(-0,21)^{516}$; г) $\left(-\frac{5}{11}\right)^{99} : (-39,7)^{101}$.

727 Вычислите:

а) $((-3)^2+(-1)^5\cdot 8):(-2)^3$; в) $-2\cdot(-4)^2 : 3\frac{1}{5} + \left(-5^2 : \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^2$;

б) $-\frac{1}{0,1^3} - \frac{1}{0,1^2}\cdot(0,5-2^1)$; г) $-4^2\cdot(-1)^7 - \left(\frac{5}{3}\right)^2\cdot\left(-3\frac{3}{5} - 3^2\right) + (-2)^5$.

728 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{2^{16}\cdot 14^{23}\cdot 5^{35}\cdot(2^5)^3\cdot(7^{36}:7^{13})}{10^{24}\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^{18}\cdot 35^{28}\cdot 2^{29}}$; б) $\dfrac{(9^{15}:3^{28})\cdot 2^{43}\cdot 17^{34}\cdot(17^3)^{10}\cdot\left(\frac{6^{48}}{6^{15}}\right)}{34^{35}\cdot(17^{63}:17^{34})\cdot 2^{39}\cdot 3^{34}} - 293^0$.

729 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1:

а) $3^5\cdot 3^9\cdot 3$; д) $(-k)^6\cdot(-k)^{12}:(-k)^3\cdot(-k)^4:(-k)^7$;

б) $(-bc)^3\cdot(-bc)\cdot(-bc)^{12}\cdot(-bc)^4\cdot(-bc)$; е) $(-abc)^{20}:(-abc)^{10}\cdot(-abc):(-abc)^3$;

в) $x^{15}:x^8$; ж) $((-y)^3)^{11}$;

г) $(3p-2q)^{24}:(3p-2q)^{18}:(3p-2q)^2$; з) $(-(-n)^2)^9$.

730 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $x+(3x-2y)-(5x-4y-2(x+(4y-8x))-3x)$;

б) $(-9ab^3):b\cdot(-4bc):(-2ac)\cdot(a^3b):(3ab^2)$;

в) $\dfrac{4pq\cdot\frac{3}{4}qr - 3p\cdot pqr - 2p^2qr + 2prq^2 - (7+3p-4r) + 3p + 7 - 4r}{25pq(p-q)}$.

731 Определите степень, старший и свободный члены многочлена и найдите его значение при указанных значениях переменных:

а) $-3x^3+2x^2y-5y+9x^3y-2x^2y+16$ при $x=1$, $y=-1$;

б) $5a^7-4ab-b^5+(-3a^7+4ab-2b^5)-7-2a^7-2ab+4b^5$ при $a=2$, $b=-1$.

732 Найдите сумму и разность многочленов P и Q:

а) $P=14x^2+9+(1-7x^2)$, $Q=3x+4x^2-(9x-3x^2)$; б) $P=4a^2+9b^2-(7a^2-3b^2)$, $Q=-a^2+7b^2+(4a^2-b^2)$.

733 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(5x - 7y + 4z) \cdot (-y) + y \cdot (5x - 4y + 4z)$;

б) $2a \cdot (5a^3 + 4a^2 - 2a) - 2a^2(5a^2 + 4a - 7)$;

в) $(2y^2 + xy - y^2)(x^2 - 3xy)$;

г) $(3m^2 + 2mn + 3n^2)(2m - 3n)$;

д) $(4p^2 + 3p + 4)(4p^2 - 3p - 2)$;

е) $(q^2 + 3q + 2)(q^2 - 3q + 1)$.

734 Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $\dfrac{a^{21} \cdot a^{35} \cdot a^{42} \cdot (a^2)^6 \cdot (3a)^{12}}{3^{10} \cdot a^{24} \cdot (a^{57} : a^{29}) \cdot a^{33} \cdot a^{36}} + a^0$ при $a = 3$;

б) $\dfrac{5^{49} \cdot (b^{79} : b^{34}) \cdot c^{23} \cdot c^{36} \cdot (bc)^{29}}{b^4 \cdot c^{43} \cdot (c^{29} : c^{17}) \cdot (c^2)^{11} \cdot c^{10} \cdot (5b)^{48} \cdot b^{21}} - 4(bc)^0$ при $b = 6$, $c = 2$.

в) $3xy \cdot (4x^2 - 6xy - 2y^2) - 2xy \cdot (5x^2 - 7xy - 2y^2)$ при $x = 1$, $y = -2$;

г) $p^2q^2 \cdot (3p^3 - 2p^2 - 2pq - 3) - 3p^2q \cdot (2p^3q - 5p^2q - 4pq^2 - 7q)$ при $p = -1$, $q = 1$;

д) $(5 + 3b)(5b - 7) - (4 - 3b)(4b - 3)$ при $b = -1$;

е) $(9a - 4c)(3a - 7c) - (4a + 3c)(2a + 9c)$ при $a = 0$, $c = 1$.

735 Решите уравнение:

а) $\dfrac{5(x-3)}{9} + \dfrac{4(x-3)}{18} = 14$;

б) $3(x + 7) + 2(3x - 7) = 4(3x - 2) + 3$;

в) $3a(2 - 4a + a^2) - 3a(7 - 2a + a^2) + a(6a - 7) = -33$;

г) $6b(3b - 2) - 7b(5 - 2b) - 4b(2b - 3) = 10b(b + 4) + 14b(b - 1) + 61$;

д) $(6z - 2)(2z + 3) - 3z(2z - 7) = 29 + 6z^2$;

е) $(3p - 5)(5p - 3) - 7(2 - 4p) + 11 - 15p^2 = 6$.

736 Докажите прямым и косвенным методом:

а) Равенство $2x(x + 1)(x + 2) = 57\ 916$ неверно при любом натуральном x.

б) Равенство $18y(y + 1) = 97\ 506$ неверно при любом натуральном y.

737 Решите задачу:

а) Две яхты одновременно стартовали от одной речной пристани с одинаковой собственной скоростью в противоположных направлениях. Через 3 часа яхты развернулись и поплыли навстречу друг другу. Через сколько времени после старта они встретятся?

б) Из пункта A вниз по течению поплыла лодка, через некоторое время она развернулась и через 2 часа после старта приплыла обратно в пункт A. Сколько километров проплыла эта лодка, если ее собственная скорость равна 5 км/ч, а скорость течения равна 2 км/ч?

Задачи для самоконтроля к Главе 4

738 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Число футболистов, теннисистов и волейболистов, занимающихся в спортивном обществе «Юниор», относится как 5 : 2 : 7. Сколько футболистов в этом спортивном обществе, если футболистов, волейболистов и теннисистов в нем 154 человека?

б) В питомнике живут зебры, тигры и слоны. При этом число тигров, зебр и слонов в питомнике относится как 4,2 : 6,4 : 1,4. Сколько зебр в этом питомнике, если в нем всего 60 животных?

в) Лекарственные растения при сушке теряют $\frac{11}{13}$ своего веса. Сколько надо собрать свежих растений, чтобы получить 8 кг сушеных?

г) На праздновании Нового года в школе выступления Деда Мороза и Снегурочки заняли $\frac{2}{11}$ всего праздника. Праздничная дискотека заняла $\frac{7}{22}$ праздника, а на посиделки за праздничным столом пришлась $\frac{1}{3}$ часть праздника. Оставшееся время было посвящено поздравлению учителей. Сколько времени проходило празднование Нового года в школе, если учителей поздравляли 1 час?

739 Сравните значения величин:

а) 36 м 15 дм 64 см и 375 дм 976 мм;

б) 6 км 512 м 11 дм и 5 км 1576 м 5 дм;

в) 5 сут. 3 ч 78 мин и 124 ч 13 мин 7 с;

г) 39 т 519 кг и 425 ц 35 кг;

д) 16 ц 850 кг 700 г и 2 т 4 ц 700 г;

е) 65 а 98 м^2 и 0,5 га 15 а 78 м^2.

740 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Сумма двух натуральных чисел равна 26. Первое число при делении на 9 дает остаток 5, а второе число при делении на 9 дает остаток 3. Найдите эти числа.

б) Первый угол треугольника на 30° меньше второго и в четыре раза меньше третьего. Найдите больший угол этого треугольника.

в) Длина ломаной $ABCD$ равна 17,8 см. Известно, что AB равно половине расстояния между началом ломаной $ABCD$ и ее концом, BC на 6,7 см меньше AB, а CD в 2 раза меньше BC. Чему равно звено BC этой ломаной?

г) Сумма цифр загаданного четырехзначного числа равна 25. Вторая цифра этого числа в 2 раза больше первой, третья – в 4 раза больше первой, а четвертая – на 3 больше третьей. Какое число загадали?

741 Сравните значения выражений:

а) 7^{22} и 8^{22};

б) $(-7)^{19}$ и $(-8)^{19}$;

в) 11^{27} и 9^{26};

г) $(-11)^{27}$ и $(-9)^{26}$;

д) $\left(\frac{3}{8}\right)^{14}$ и $\left(\frac{3}{8}\right)^{15}$;

е) $\left(-\frac{3}{8}\right)^{21}$ и $\left(-\frac{3}{8}\right)^{22}$;

ж) $2{,}3^6$ и $2{,}3^7$;

з) $(-2{,}3)^4$ и $(-2{,}3)^5$.

742 Докажите тождество:

а) $3(a + b)^2 - 3(a - b)^2 = 12ab$;

б) $2(xy - 1)^2 + 2(x + y)^2 = 2(x^2 + 1)(y^2 + 1)$.

743 Возведите двучлены в квадрат:

а) $(3a + 4b)^2$; б) $(-5c - 7d)^2$; в) $(-6x + 8)^2$; г) $(2m^3 + 9n)^2$.

744 Представьте трехчлен как квадрат двучлена:

а) $9x^2 - 48xy + 64y^2$; б) $25a^2 + 70ab + 49b^2$; в) $-16cd + 4c^2 + 16d^2$.

745 Какие одночлены можно подставить вместо A, B и C, чтобы получившееся равенство стало тождеством?

а) $(4x + A)^2 = B + C + 25y^2$; б) $(3z - A)^2 = B - 48zt + C$.

746 Подберите A таким образом, чтобы трехчлен можно было записать как квадрат двучлена.

а) $x^2 - 4xy + A$; б) $81z^2 - A + 16t^2$; в) $A + 9a^2 + 24ab$; г) $-A + 64c^2 + 36d^2$.

747 Используя формулу разности квадратов, запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(x + y)(y - x)$; б) $(c - 6a)(-6a - c)$; в) $(-m - 9)(-m + 9)$; г) $(b^2 - 4kn^3)(b^2 + 4kn^3)$.

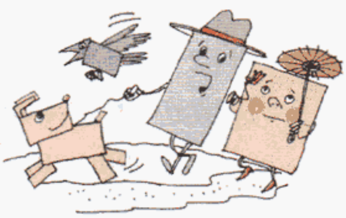
748 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(a + 4)(-a - 4)$; д) $(z + 3)(z - 3)(z^2 + 9)$;

б) $(3x - 1)(1 - 3x)$ е) $(2c - d)(2c + d)(4c^2 - d^2)$;

в) $6b(b + 5)(5 - b)$; ж) $8t(-t + 1)(-t - 1)(t^2 - 1)$;

г) $y^2(-y - 7)(7 + y)$; з) $x^2(x^2 + 4)(x - 2)(2 + x)$.



749 Возведите двучлены в куб:

а) $(2x + 1)^3$; б) $(3a - 2b)^3$; в) $(-m + 4)^3$; г) $(-3n - 2y)^3$.

750 Представьте многочлен как куб двучлена:

а) $125a^3 + 75a^2 + 15a + 1$; б) $36c^2d - 8c^3 - 54cd^2 + 27d^3$.

751 Используя формулы сокращенного умножения, запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(a + 5)(a^2 - 5a + 25)$; д) $(a + 4)(-a - 4)^2$; и) $4(-y^3 - 3)(y^6 - 3y^3 + 9)$;

б) $(3b - 7)(9b^2 + 21b + 49)$; е) $(2b - 5)^2(5 - 2b)$; к) $x^2(x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16)$;

в) $(-b - 5)(25 - 5b + b^2)$; ж) $(-3c - d)(d + 3c)^2$; л) $(t + 1)(t - 1)(t^4 + t^2 + 1)$;

г) $(-y + 4)(4y + 16 + y^2)$; з) $(-p^3 + 2q)^2(p^3 - 2q)$; м) $(z + 3)(z - 3)(z^4 + 81 + 9z^2)$.

752 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(-n - 1)(n - 1)^2$; в) $(-p - 3q)^2(p - 3q)^2$; д) $(-r + s)^2(-r - s)^2(r^2 + s^2)^2$;

б) $(2x - y)^2(y + 2x)$; г) $(-a + b)^2(a + b)^2$; е) $(m - n)^2(m + n)^2(m^2 + n^2)^2$.

Задачи для самоконтроля к Главе 4

753 Вычислите:

а) 69^2; б) 71^2; в) $8{,}9^2$; г) $9\frac{1}{12} \cdot 8\frac{11}{12}$; д) $112^2 - 88^2$.

754 Найдите значения выражений рациональным способом:

а) $69^2 + 69 \cdot 62 + 31^2$; в) $\dfrac{216^2 - 36^2}{251^2 - 1}$; д) $\dfrac{42^3 - 28^3}{14} + 42 \cdot 28$;

б) $503^2 - 97^2 + 94 \cdot 600$; г) $\dfrac{78^2 - 26^2}{83^2 - 21^2 + 38 \cdot 104}$; е) $\dfrac{51^3 + 49^3}{100} - (51^2 + 49^2)$;

ж) $\left(5\frac{4}{17}\right)^3 + 3 \cdot \left(5\frac{4}{17}\right)^2 \cdot \left(2\frac{13}{17}\right) + 3 \cdot \left(5\frac{4}{17}\right) \cdot \left(2\frac{13}{17}\right)^2 + \left(2\frac{13}{17}\right)^3$;

з) $\left(9\frac{9}{51}\right)^3 - 3 \cdot \left(9\frac{9}{51}\right)^2 \cdot \left(2\frac{9}{51}\right) + 3 \cdot \left(9\frac{9}{51}\right) \cdot \left(2\frac{9}{51}\right)^2 + \left(2\frac{9}{51}\right)^3$.

755 Решите уравнение:

а) $(x + 5)^2 - (x + 3)(x - 3) = 4$; д) $64c^2(c - 1) - (4c - 1)^3 = 25 - 16c^2$;

б) $64 - (k - 7)^2 = 0$; е) $3z - 5(z + 1)(z - 1) + 5(z + 2)(z - 2) = 6$;

в) $4(2c + 3)^2 - 36 = 0$; ж) $4(y + 3)^2 + (3y - 2)^2 - 13(y + 2)(y - 2) = -4$;

г) $4y(y - 1) - (2y + 5)(2y - 5) = 1$; з) $a^3 - (a - 4)^3 = 88 + 12a^2$.

756 Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

а) $-(2a + 5)(2a + 7) + (2a + 6)^2$, если $a = -56{,}217$;

б) $(b^2 - 4)^2 + (b - 3)(9 + b^2)(-b - 3)$, если $b = -9{,}5$;

в) $(c^2 + 5)^2 - (c - 2)(4 + c^2)(c + 2)$, если $c = -6{,}5$;

г) $27a^3 - 54a^2 + 36a - 8$, если $a = 2$;

д) $b(b + 3)(b - 3) - (b - 4)(b^2 + 4b + 16)$, если $b = \frac{4}{9}$;

е) $4(c - 2)^2 + (c + 3)(c^2 - 3c + 9) - (c + 2)^3$, если $c = -3$.

757 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{49a^2 - 36b^2}{7a + 6b}$; г) $\dfrac{9p^2 - 64q^2}{9p^2 + 48pq + 64q^2}$; ж) $\dfrac{2x + y}{8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3}$;

б) $\dfrac{9x^2 + 36xy - 36y^2}{3x + 6y}$; д) $\dfrac{36p^2 - 9q^2}{216p^3 + 27q^3}$; з) $\dfrac{27a^3 - 27a^2 + 9a - 1}{9a^2 - 6a + 1}$;

в) $\dfrac{14zt - 4t^2}{-28zt + 49z^2 + 4t^2}$; е) $\dfrac{8a^3 - 64b^3}{4a^2 + 8ab + 16b^2}$; и) $\dfrac{c^3 + 12c^2d + 48cd^2 + 64d^3}{c^2 - 16d^2}$.

758 Разложите многочлен на множители:

а) $7x + 7y + 6xz + 6yz$; ж) $x^2(x - 6) + 6x(x - 6) + 9x - 54$;

б) $pq + qr + rs + ps$; з) $y^2(y + 7) + 4y(y + 7) + 4y + 28$;

в) $z^2 - zx - 5z + 5x$; и) $64a^3b^6 + 48a^2b^4c^2 + 12ab^2c^4 + c^6$;

г) $3x^4z - 6y + 3yz - 6x^4$; к) $d^3 + 12p^2c^6d + 6pc^3d^2 + 8p^3c^9$;

д) $4x^2y + y^3 + 4xy^2 + x^3$; л) $m^2 - p^2 + 4n^2 - 9q^2 - 4mn - 6pq$;

е) $5pq^2 - q^3 - 5p^2q + p^3$; м) $9x^2 + y^2 - z^2 - 25t^2 + 6xy + 10zt$.

759 Разложите трехчлен на множители:

а) $a^2 - 3a - 70$; в) $x^2 + 10xy + 24y^2$; д) $p^6 + 12p^3 + 27$;

б) $b^2 - b - 72$; г) $z^2 - 16zt + 63t^2$; е) $q^4 - 12q^2 + 32$.

760 Представьте выражение в виде произведения многочленов:

а) $(a + 6)^2 - 4$; д) $27 + y^3$; и) $36(x + 3)^2 - x^2$;

б) $(b - 7)^2 - 25$; е) $-k^6 - 125r^3$; к) $y^2(y - 14)^2 - 9y^4$;

в) $16 - (3c - 5)^2$; ж) $(y + 2)^3 - 27$; л) $(2b + 3)^3 + 125$;

г) $64 - (8d + 5)^2$; з) $8 - (z - 4)^3$; м) $0{,}343 - (c + 0{,}5)^3$.

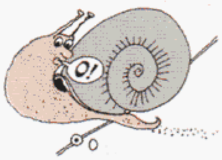
761 Решите уравнения:

а) $c^2 - 6c - 27 = 0$; б) $z^2 + 3z - 28 = 0$; в) $d^2 + d - 42 = 0$.

762 Найдите значение выражений:

а) $5q + p^2 - pq - 5p$, если $p = 1{,}5$, $q = -0{,}5$;

б) $4m^2 + 3n - 4mn - 3m$, если $m = 2{,}5$, $n = 3{,}5$.



763 Сократите дроби:

а) $\dfrac{ab + 6a - 2b - 12}{b^2 + 12b + 36}$; б) $\dfrac{16a + 4b}{8ac + 2bc - 4ad - bd}$.

764 а) На прямоугольном участке земли, длина которого на 16 м больше его ширины, построили дом, занимающий площадь 140 м². Найдите длину этого участка, если известно, что площадь участка, не занятая домом, равна 120 м².

б) Длина прямоугольного участка земли на 6 м больше его ширины. Если бы его длину уменьшили на 7 м, а ширину увеличили на 7 м, то площадь получившегося участка стала бы в 2 раза меньше, чем площадь исходного, увеличенная на 2 м². Чему равна длина этого участка земли?

в) Найдите периметр прямоугольника, длина которого на 12 см больше ширины, а площадь равна 133 см².

765 Сравните числа:

а) $\dfrac{47}{53}$ и $\dfrac{282}{324}$; б) $\dfrac{2010}{2011}$ и $\dfrac{2011}{2012}$; в) $\dfrac{255}{419}$ и $\dfrac{352}{516}$; г) $\dfrac{68}{79}$ и $\dfrac{682}{792}$.

766 а) В автосервисе все мастера работают с одинаковой производительностью. Шесть стажеров и два мастера выполняют за 9 часов тот же объем работы, что девять стажеров и семь мастеров за 3 часа. Во сколько раз производительность мастера больше производительности стажера, если производительность всех стажеров также одинаковая?

б) Бассейн наполняется из двух кранов. Один из них с морской, а второй с родниковой водой. Из крана с морской водой бассейн наполняется за 5 часов, а из крана с родниковой водой – за 4 часа. Сначала открыли кран с морской водой. Через сколько времени надо открыть кран с родниковой водой, чтобы к моменту наполнения бассейна морской воды налилось в 2 раза больше, чем родниковой?

в) Стоимость автомобиля после 5 лет эксплуатации равна 150 тыс. р., что составляет $\dfrac{5}{12}$ его первоначальной стоимости. Чему была равна первоначальная стоимость этого автомобиля?

г) Из города A в город B выехал велосипедист. Через 1 час из города A вслед за велосипедистом отправился мотоциклист, который обогнал велосипедиста и прибыл в город B на 3 часа раньше него. При этом на весь путь от A до B мотоциклисту потребовалось 2 часа. Чему была равна скорость мотоциклиста, если она была на 40 км/ч больше скорости велосипедиста?

д) Из пункта A в пункт B выехал автобус, а через 8 часов вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого была на 90 км/ч больше скорости автобуса. Чему была равна скорость автомобиля, если он прибыл в пункт B одновременно с автобусом, а вся дорога от A до B заняла у него 2 часа 40 мин?

767 На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $x > 4,\ y \leqslant -6$; б) $x \leqslant -2,\ y > 4$; в) $-1 \leqslant x + 4 \leqslant 5$; г) $-3 \leqslant y - 2 \leqslant 7$.

768 Найдите множество целых решений неравенства:

а) $x + 7 > 5$; в) $-3 \leqslant z \leqslant -1$; д) $|b| > 5$;

б) $y - 9 \leqslant 6$; г) $-6 \leqslant a < 3$; е) $|c - 4| \leqslant 6$.

769 Может ли:

а) число, кратное 7, при делении на 49 давать остаток 27?

б) число, кратное 11, при делении на 33 давать остаток 4?

770 Найдите все натуральные значения x, удовлетворяющие равенствам:

а) $2^x = 128$; б) $3^{2x} = 81$; в) $4^{x+1} = 256$; г) $5^{x-2} = 125$.

771 Замените x степенью так, чтобы выполнялось равенство:

а) $3^{12} \cdot 3^{31} = x$; б) $5^{34} \cdot x = 5^{45}$; в) $(2^2)^8 : x = 4^2$;

г) $x : 7^{34} = 7^9$; д) $x \cdot (4^2)^5 = 2^{25}$; е) $x : (11^2)^{12} = 11^3$.

772 Докажите, что для любых целых a:

а) если $a + 1$ делится на 3, то $2 + 5a$ делится на 3;

б) если $a + 2$ делится на 7, то $5 + 6a$ делится на 7.

773 Какие одночлены можно поставить вместо A, B, C и D, чтобы каждое из равенств стало тождеством?

а) $6x^4y^5 + A = 18x^4y^5$; б) $7a^3b^5 \cdot C = 21b^{12}a^{20}\ (a, b \neq 0)$;

в) $14p^9q^{11} - B = 5p^9q^{11}$; г) $48m^{13}n^{24} : D = 8m^7n^{12}\ (m, n \neq 0)$.

774 Каким многочленом можно заменить K, чтобы указанное выражение стало многочленом степени n?

а) $6c^3 - 12c - 9c^2 - 4c^3 + 12c^2 + 9c^3 + K$, если $n = 2$;

б) $8ab^3 - 4b^2a - 9b^2a^2 + 7ab + 4a^2b^2 - K$, если $n = 3$.

775 Докажите, что:

а) $5^{15} + 5^{13}$ делится на 13; б) $16^3 - 4^5$ делится на 3.

776 Какой цифрой оканчивается число?

а) 1212^{2121}; б) $311^{113} + 113^{311}$; в) $565^{656} + 656^{565}$.

777 Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$, если известно, что:

а) $x + \frac{1}{x} = 3{,}5$; б) $x - \frac{1}{x} = 14{,}5$.

778 Какие многочлены можно поставить вместо A и B, чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $(7a^5 + A)^2 = B + 81b^2$; б) $(3c + 8)^2 + (4c - 7)^2 - (A - B)^2 = 12c + 109$.

779 Докажите, что данный многочлен при любых значениях входящих в него букв принимает только положительные значения:

а) $x^2 - 12x + 40$; б) $25y^2 + 49z^2 - 20y - 42z + 15$.

780 Найдите наименьшее значение выражения:

а) $(3a - 1)(3a + 1) + 2b(2b - 6a)$; в) $2c^2 - 4cd + 4d^2 - 6c + 10$;

б) $(4a - 5)(4a + 5)$; г) $9 + (6b - 8)(6b + 8) - (-3c - 4)(3c - 4)$.

781 Найдите наибольшее значение выражения:

а) $4(5x - 7) - 25(x - 1)(x + 1)$; в) $-9y^2 - 12yz - 5z^2 - 6z - 10$;

б) $(1 - 4y)(1 + 4y)$; г) $(1 - 5z)(1 + 5z) + (7 + 2y)(-2y + 7) - 2$.

782 Найдите значение выражения:

а) $2(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) - 3^{16}$; б) $7^8 - 6(7 + 1)(7^2 + 1)(7^4 + 1)$.

783 Сравните (устно) значения числовых выражений:

а) $56^2 - 41^2$ и $55^2 - 40^2$; в) 32^4 и $26 \cdot 30 \cdot 34 \cdot 38$;

б) $137 \cdot 139$ и 138^2; г) 43^4 и $36 \cdot 39 \cdot 47 \cdot 50$.

784 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $(b - c)^4$; б) $(a + d)^5$; в) $(x + y)^6$; г) $(p - q)^7$; д) $(z + t)^8$.

785 Изобразите на координатной прямой Ox множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x \geqslant -5$; в) $x + 5 > 1$; д) $-1 \leqslant x + 6 < 7$; ж) $|x + 1| > 8$;

б) $x < 3$; г) $x - 4 \leqslant -4$; е) $-6 \leqslant x - 2 \leqslant 1$; з) $|x - 6| \leqslant 2$.

786 Найдите загаданные рациональные числа, если известно, что:

а) произведение первого и третьего из них равно 63, второе загаданное число на 7 больше первого, а третье – на 9 меньше произведения первого и второго чисел;

б) произведение первого и третьего из них равно 32, второе загаданное число на 2 больше первого, а третье – на 16 меньше произведения первого и второго чисел.

4. а) 125; б) 16; в) 0,0001; г) $-\frac{8}{27}$; д) $6\frac{1}{4}$; е) −3,6. **6.** а) 32; д) 81; и) −0,000064; л) 0,0025; о) −10 000 000; с) −0,001. **12.** а) 1; б) −1; в) 76; г) 0. **15.** а) −1; 0; 111 110; б) 3; −15; 114. **19.** е) {1; 2; 3}. **20.** а) 4 и 23; 11 и 16; 18 и 9; 25 и 2; б) 126°. **27.** а) 16; б) 2; в) 58; г) −9; д) −56; е) 14. **29.** а) 22; 0; −5; б) −114; 0,12345; 543 210. **30.** а) 14 лет. **32.** а) $A = 15$; $B = 7$. **35.** 16 лет, 10 лет, 7 лет. **38.** г) $-8x^3y^5$; д) $5a^3b^8$; е) $c^6d^2k^4$; ж) 32; з) 2^{m+1}; и) 2^{2m}; к) 27; л) 3^{k+1}; м) 3^{3k}. **41.** а) 12; б) 36. **42.** б) $(-2)^1$; д) y^0; и) d^7; к) $(mn)^6$; м) $(3x-4)^0$. **43.** а) $-b^{k+2}$; б) $-c^2$; в) x^{m+1}; г) a; д) x^k; е) y^{2n+1}; ж) $\frac{4x^2}{yz}$; з) $\frac{3b}{2a^3}$; и) $5k^2m^3n$; к) $-\frac{q}{3}$; л) 6; м) $\frac{2b}{a}$. **44.** а) 64; б) 100; в) 1. **45.** в) c^{35}. **47.** в) $(pq)^8$. **49.** а) 12; б) 3; в) 4; г) 30. **51.** а) $\frac{c^2}{5ab}$; б) $\frac{3x}{y}$; в) $-\frac{1}{k^2}$; г) $\frac{1}{m^2}$. **53.** а) 9; б) −1; в) 1; г) −2. **56.** г) $(p^7q^{19})^{17}$. **58.** а) 1; б) 4; в) −8; г) 32. **61.** г) $\left(-\frac{p^{19}}{q^{21}}\right)^{57}$. **62.** а) 32; б) 1 000 000; в) −0,008; г) 81. **63.** а) $-\frac{3}{a}$; б) $4b$; в) $\frac{y}{3x}$; г) $-5n$; д) −1; е) −7. **64.** а) 2; б) 1. **65.** а) 15; б) −1. **66.** а) 3; б) 1; в) 2; г) 7. **67.** а) 13; б) 36; в) 16; г) 1. **71.** а) 30 мин; б) $145\frac{2}{3}$ км; в) 40 ступ. **72.** а) $-2x$; б) $3a-b$; в) $-q^3$; г) $\frac{x^2}{z}$. **73.** а) НОД = 8; НОК = 768; б) НОД = 6; НОК = 756; в) НОД = 32; НОК = $2^9 \cdot 5^5$; г) НОД = 27; НОК = 1944. **74.** а) НОД = 17; НОК = $17 \cdot 28 \cdot 53$; б) НОД = 23; НОК = $9 \cdot 23 \cdot 43$; в) НОД = 41; НОК = $19 \cdot 35 \cdot 41$; г) НОД = 89; НОК = $6 \cdot 13 \cdot 89$. **75.** а) 2,25; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 5. **78.** а) $-\frac{15b}{a^2}$; б) $\frac{5x^2}{2z}$; в) $-\frac{10}{m^2nk}$; г) b; д) $\frac{2y}{c}$; е) $\frac{d^2}{k}$; ж) $-\frac{2}{x^2}$; з) m; и) a^2. **84.** в) $(x^{11}y^{17})^{43}$; г) $\left(\frac{c^{13}}{d^{17}}\right)^{29}$. **85.** а) 1; б) 0,8; в) $-24 \cdot 10^8$; г) 1024. **86.** а) 1; б) −1; в) $-2a^2$. **87.** а) 16; б) 3; в) 8; г) 35. **88.** а) 7; б) 1,2. **89.** 57,6 км. **92.** 5 шк. **101.** д) $12c^4d$; е) $-a^2b^4$; ж) $-xy^3$; з) $-3k^7m^4$. **102.** а) $-4xy^2$; $-xy^2$; б) $12pq^2$; pq^2; в) $15bc^2$; $1{,}5bc^2$; г) $5x^2z^3$; $-\frac{x^2z^3}{3}$. **103.** а) $9m^2n$; −9; б) $-2a^3b^2$; −144; в) $-3pq^2r$; −6; г) $4a^2c^2$; 900. **104.** а) $6x^2y^3$; б) $17p^7q^9$; в) $\frac{5a^5b^7}{11}$; г) $9m^9n^5$. **105.** а) $A = x^4z^2$; $B = 2y^3$; б) $A = p^2r$; $B = 3q^2s^3t$; в) $A = 6b^2d$; $B = ac$; г) $A = k^2$; $B = mnt$. **107.** а) 18 детей; б) 22 кв.; в) 1 кг. **108.** а) 3; б) 8; в) 5; г) 0; д) 3; е) 1; ж) 3; з) 2; и) 5. **111.** в) $-2x^2y$; г) $-4pq^2$. **112.** а) $3xy^2$; $-2xy^2$; б) $-2b^2c$; $3b^2c$. **113.** а) $-2x^3y$; 32; б) $-m^3l^3$; 8. **114.** а) $19a^5b^7$; б) $34m^3n^{11}$; в) $\frac{4x^2y^5}{19}$; г) $5p^{10}q^{11}$. **115.** а) $A = 2p^2r^4$; $B = q^3s$; б) $A = 3yz$; $B = xt$. **116.** м. – 145 чел., п. – 60 чел., вор. – 40 чел., каз. – 25 чел., соч. – 50 чел. **119.** 80 чел. **120.** 8100 монет; 9 друзей. **130.** а) 385; 3025; б) 2870; 44 100; в) 9455; 216 225; г) 42 925; 1 625 625. **138.** а) 57; б) 3; в) −13; г) −2. **139.** а) 15 кг; б) 42 ч. **140.** 54 мешка. **145.** а) 5050; б) 20 100; в) 125 250. **149.** а) 2; б) 5. **150.** 9 часов. **153.** 40%. **162.** а) $x - 2y + 3z$; б) $4a$. **165.** а) $a - 3$; б) $-3x + 15y - 28$; в) $-3p^2 - 2pq - 3q^2$. **170.** а) $\frac{1}{(a+b)^2}$; б) $\frac{c+d}{c-d}$; в) $\frac{(m-n)^2}{2n}$; г) $\frac{5}{7(2p-q)^2}$. **171.** а) 186 кг; б) ≈16,9 км/ч; в) 50 км/ч; г) врачей больше в 2 р. **172.** а) 12 км 472 м 6 см; б) 59 м 6 дм; в) 28 т 2 ц 27 кг; г) 7 ц 21 кг 170 г; д) 1 га 78 а 22 м²; е) 4 а 3 м² 38 дм² 18 см². **176.** $a + c$. **179.** а) 79 км/ч; б) 5 : 4. **180.** а) 3 км; б) 20 га; в) 25 кг. **182.** 8 раз. **187.** а) $-2x^2 - 6x$; б) $-a^4$; в) p; г) a. **190.** а) −1; б) 0,5; в) 2; г) −7,5. **191.** а) 35; б) 176; в) −285; г) 480. **192.** а) 10; б) −1; в) 3; г) −3; д) 13; е) 4. **193.** а) 6 дней; б) 50 тыс. р. **194.** а) $6x^3 - 6y^3$; б) $2x^4 - 3y^4$; в) $-xy^4 - 6xy + 4x$; г) $36xy^2$. **195.** а) $-3c$; б) $a^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 - 6ab^3 - b^4$. **197.** а) в фонде B на 77 р. 28 коп.; б) 312,5 тыс. р.; в) 46,41%; г) 1) 10 300 р.; 2) 10 650 р.; 3) 11 050 р.; 4) 11 500 р. **200.** а) 1; б) 3; в) 9; г) 6. **201.** а) $x^2 - y^2$; б) $-3p^2$. **202.** а) $6m^5 - 10m^3$; б) $-b^4 + 2b^3$. **204.** а) −3; б) 0. **205.** а) −4; б) −0,5; в) 13; г) 34. **206.** а) $2y^3 - 2x^3$; б) $-6xy$. **207.** а) $-2t$; б) $5m^3n^5 - 10mn^4 - 5mn^3 + 7m^2n - 4n^2$. **208.** получат ≈ 0,2 млн.р. **209.** 58 л. **212.** а) 1; б) 7. **218.** и) $x^3 + x^2 - 6x$; к) $3a^4 + 2a^2b^2 - b^4$; л) $25p^4 - p^2q^2$; м) $4a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4$. **219.** а) $m^3 - n^3$; б) $m^3 + n^3$; в) $a^4 - b^4$; г) $a^5 - b^5$; д) $3p^4 + p^3 - 3p - 1$; е) $5q^4 - 2q^3 + 22q + 3$; ж) $a^4 - a^2b^2 - 2ab^3 + 2b^4$; з) $x^4 + 12xy^3 - 5y^4$. **222.** а) 4; б) 10; в) −4; г) 3. **223.** а) 18; б) −33; в) 105; г) −16. **224.** а) 3; б) 1,7. **226.** а) {−3; 0}; б) Q; в) {0; 1,5}; г) Q. **231.** а) 720 км; б) в 4 раза. **236.** а) −5,25; б) −2. **237.** а) −20; б) 16.

238. а) 1; б) 1; в) $\{-3,5; 0\}$; г) Q. **239.** а) $5x^5y - 5xy^5 - 2x^5 + 2xy^4$; б) $z^6 - 13z^4 - 12z^3 + 32z^2 + 48z + 16$. **242.** 15 мин. **244.** 38 ш. **250.** н) $9b^2 + 2bc + \frac{c^2}{9}$; о) $\frac{x^2}{4} - 5xy + 25y^2$; п) $4a^2 - 2 + \frac{1}{4a^2}$; р) $9c^2 + 2 + \frac{1}{9c^2}$. **252.** н) $36a^2b^2 + 4ab^3 + \frac{b^4}{9}$; о) $\frac{x^4y^2}{16} + x^3y^3 + 4x^2y^4$; п) $0{,}01p^2q^6 + 2pq^7 + 100q^8$; р) $0{,}04m^2n^8 + 0{,}6m^2n^6 + 2{,}25m^2n^4$. **253.** а) 7921; б) 8281; в) 89 401; г) 251 001; д) 79,21; е) 123,21; ж) 1024; з) 9604; и) 10 609; к) 38 809. **254.** д) 1 010 025. **258.** г) $4x^2 + 7xy + 9y^2$; д) $4ab - 16a^2 - 49b^2$; е) $-25s^4 - 4t^4$; ж) $-3a^2 - 10a - 3$; з) $-4x^2 - 12$; и) $-3c^2 + 22c - 27$. **260.** д) $-3y^2 + 13y - 9$; е) $2z^2 + 15z + 12$; ж) $-3t^2 + 2t - 4$; з) $22k^3 + 19k^2 + 16k$; и) $64a^2 - 99a + 37$; к) $-19x^2 + 92x - 222$; л) $2p^2 + 2pq + 2pr - 2qr$; м) $18m^3 - 32m^2n - 88mn^2 - 45n^3$. **262.** а) 5; б) 2; в) 6; г) −6. **263.** а) 4; б) −121. **264.** б) $\frac{7}{c - d}$; в) $2x + 9y$; г) $\frac{3q}{5p - 3q}$. **269.** а) 130,2; б) 634,6. **270.** а) 108,25; б) 158,25. **275.** а) 3; б) 0,5; в) $-\frac{1}{6}$; г) 1. **278.** а) −1; б) 1. **279.** а) 5; б) −3. **280.** в) $25n^6 + 25n^4$; степень 6; г) $s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3$; степень 3. **281.** 19. **282.** 2. **286.** и) $(-3m^2q^4r^3)^3$; к) $(-m^4n^5k^6)^3$. **287.** а) $7xy^4$; б) $4c$; в) $\frac{1}{r^2}$. **288.** а) в 3 раза; б) 16 мин 48 сек; в) 1ч 30 мин. **290.** а) 9; б) 4; в) 2; г) 3. **292.** в) $16x^2 - 40x + 25$; г) $\frac{y^2}{16} - yz + 4z^2$. **293.** в) $16m^8 + 56m^4n^2 + 49n^4$; г) $0{,}09p^6q^2 - 1{,}32p^4q^4 + 4{,}84p^2q^6$. **294.** а) 4761; б) 160 801; в) 222,01; г) 2809; д) 88 209. **296.** е) $(9x^3 - 2x)^2$. **298.** а) $-9b^2 + 48b - 64$; б) $-4x^2 - 2xy - 81y^2$; в) $-40z^2 - 4z - 53$. **300.** а) $4a^2 - 8ab + 4b^2$; б) $2z^2 + 15z + 12$; в) $-23x^2 + 156x - 478$. **301.** а) 2; б) 3; в) 4; г) −13. **302.** а) 25; б) 144. **305.** а) 1; б) 2,5. **306.** а) 40,25; б) 74,25. **308.** а) $47a^2 + 180ab - 113b^2$; степень 2; б) $16p^3q - 16pq^3$; степень 4. **309.** д) $(-2k^3m^2n^2)^5$. **310.** а) $2q^3$; б) $\frac{27x}{7}$. **311.** а) в 6 раз; б) $12\frac{4}{7}$ мин. **312.** а) 3; б) 6. **315.** 2. **316.** е) $\left(\frac{x^6y^7}{8z^3}\right)^2$. **321.** ж) $16m^4 - 36n^2$; з) $9y^6 - 49p^4$; и) $-0{,}25s^8 + 0{,}04t^6$; к) $1{,}21m^2n^2 - 4{,}41k^4$; л) $0{,}81a^2b^4 - 1{,}69a^4b^2$; м) $0{,}64d^{10} - 0{,}49c^6d^4$. **322.** а) 899; б) 39 999; в) 4896; г) 15,99; д) 24,9999; е) 224,96; ж) $24\frac{48}{49}$; з) $99\frac{399}{400}$; и) 7200; к) 78 000. **325.** д) $8c^5 - 200c^3$; е) $5d^6 - 180d^4$; ж) $z^4 - 16$; з) $t^4 - 81$; и) $1 - 10\,000t^8$; к) $2s^8 - 2$; л) $p^6 - p^2$; м) $3q^{11} - 768q^3$. **326.** н) $(ab - b^2)(ab + b^2)$; о) $(9xz^2 - 6z)(9xz^2 + 6z)$; п) $(abc - 16d)(abc + 16d)$; р) $(r^2 - 25)(r^2 + 25)$. **327.** а) $\{-7; 7\}$; б) $\{-3; 3\}$; г) $\{-5; 5\}$; е) $\{-4; 4\}$; ж) $\{-0{,}5; 0{,}5\}$; з) $\{-1{,}5; 1{,}5\}$; и) $\{-0{,}1; 0{,}1\}$. **328.** а) $(a + 6)(a + 4)$; б) $(x - 10)(x - 2)$; в) $(m + 4)(10 - m)$; г) $4b(4b - 6)$; д) $7y(7y + 18)$; е) $(1{,}1 - n)(1{,}9 + n)$; ж) $(4c + 35)(6c + 35)$; з) $(11z - 3z^2)(11z + z^2)$; и) $(7p^2 - p + 11)(7p^2 + p - 11)$. **330.** б) $8m^3 - 16m^2 - 32m + 64$; г) $c^2d - c^3 - d^3 + cd^2$; д) $x^4 - 18x^2 + 81$; е) $y^4 - 8y^2 + 16$; з) $s^4 - 2s^2r^2 + r^4$; и) $a^8 - 32a^4 + 256$; м) $m^8 - 2m^4n^4 + n^8$. **331.** в) $-c^2 - 4b^2$; г) $k^2 + 12s^4$; д) 16; е) $5q^2 - 3$; ж) $-m^3 - 2m$; з) $2n^4 - n^2$. **332.** а) 110,5; б) −516,5; в) 174; г) −23,85. **333.** в) $2x - 3y$; г) $\frac{5q}{p + 4q}$; д) $\frac{2a - 5b}{2a + 5b}$; е) $\frac{3m - 4n}{3m + 4n}$. **336.** а) 3; б) 6; в) 7; г) 2; д) $\{-7; -5\}$; е) $\{-1; 15\}$; ж) $\{-3; 0\}$; з) $\{2{,}5; 5{,}5\}$. **337.** а) 9; б) −8; в) 111 000; г) 150 000; д) $\frac{4}{15}$; е) 0,75; ж) $\frac{2}{3}$; з) 0,21. **338.** а) 60; б) 150. **339.** а) 5 и 6; б) 6 и 8 или −8 и −6; в) 9см и 11 см; г) 7 см. **340.** в) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$. **342.** а) −1; б) 256; в) −1; г) $\frac{1}{9}$. **344.** а) НОД = 92; НОК = 27 600; б) НОД = 17; НОК = $2^7 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$; в) НОД = 648; НОК = $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$; г) НОД = 49; НОК = $2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13$. **345.** а) 1; б) 23. **346.** а) −4; б) −102. **349.** а) $2a - 5$; б) $4y - 5$; в) $5m - 9$; г) $-4p$. **352.** а) 72 чел.; ,б) 840 тыс. р.; в) 27 000 р. **354.** д) $81y^4 - 4p^6$; е) $0{,}09t^6 - 0{,}49s^{10}$. **355.** а) 399; б) 2496; в) 120,99; г) 6000; д) $80\frac{224}{225}$. **357.** в) $z^4 - 49z^2$; г) $5a^5 - 45a^3$; д) $16 - 81t^8$; е) $64r^8 - 4$. **358.** ж) $(2pq - 3q^2)(2pq + 3q^2)$; з) $(r^6 - 20)(r^6 + 20)$. **359.** б) $\{-10; 10\}$; в) $\{-4; 4\}$; г) $\{-5; 5\}$; д) $\{-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\}$; е) $\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\}$. **360.** а) $(x - 5)(x - 1)$; б) $(2y - 9)(2y - 1)$; в) $(2z + 33)(4z + 33)$. **361.** а) $a^2 + 9$; б) $b^2 - c^6$; в) 24; г) $2p^3 + 32p$. **362.** а) $\frac{5}{b - a}$; б) $5c - 4d$; в) $\frac{3x - 8y}{3x + 8y}$. **366.** а) 25; б) 62. **367.** а) −100; б) −74,25. **368.** а) 803 т.р.; б) 640 т.р. **369.** а) $-3x - 5y$; б) $14x + 28$. **372.** в 1,5 раза. **373.** 15. **378.** н) $-27y^3 - 18xy^2 - 4x^2y - \frac{8x^3}{27}$; о) $c^3 - 9c^2d + 27cd^2 - 27d^3$; п) $64m^3 + 16m^2n + \frac{4}{3}mn^2 + \frac{n^3}{27}$; р) $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$. **379.** н) $-8y^3z^3 - 60y^4z^2 - 150y^5z - 125y^6$; о) $\frac{a^6b^3}{64} - 1{,}5a^5b^4 + 48a^4b^5 - 512a^3b^6$; п) $m^3n^9 + 12m^2n^{10} + 48mn^{11} + 64n^{12}$; р) $-27c^3d^9 + 135c^3d^8 - 225c^3d^7 + 125c^3d^6$. **381.** а) 6859; б) 29 791;

в) 970 299; г) 1 030 301; д) 117,649; е) 1,331. **382.** а) 343; б) 216. **384.** г) $x^3 + 64y^3$; д) $2p^3 - 7p^2 + 2p - 6$; е) $-7c^3 + 9c^2 + 51c - 117$. **388.** д) $27z - 27$; е) $192x + 256$; ж) $3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c - 3bc^2 + 3a^2c - 3ac^2$; з) $2p^4 - 12p^3q - 12p^2q^2 - 2pq^3 - 3q^4$. **389.** а) -1; б) 5; в) -2; г) $-0,5$. **390.** а) 8000; б) 512. **391.** б) $\frac{5}{(z-t)^2}$; в) $2a + 1$; г) $\frac{1}{3p - 2q^2}$. **394.** а) -153; б) 56. **396.** а) $-2z^3 - 16z^2 + 22z + 4$, степень 3; б) ; $26x^3 + 12x^2y + 156xy^2 - 129y^3$, степень 3; в) $27pr^6 - 18pqr^4 + 54pq^2r^2 + 21pq^3$, степень 7; г) $-3ab^4 + 3a^3b + 6a^2b^2$, степень 5. **402.** а) -10; б) -20; в) -1; г) -11; д) 16; е) $-0,4$; ж) -15; з) $-4,5$. **403.** а) 5; б) -2; в) 30; г) 1. **404.** а) 207; б) 63. **405.** а) 30 км/ч; б) 120 км/ч; в) 20 км. **406.** б) $(t^{15}s^{17})^{23}$; в) $\left(\frac{a^7}{b^{11}}\right)^{71}$; г) $\left(\frac{x^7}{y^{13}}\right)^{43}$. **407.** а) 11; б) 1. **408.** г) $\frac{v^3}{27} - \frac{2cv^2}{3} + 4c^2v - 8c^3$. **409.** в) $-27d^{12} - 54d^8t^2 - 36d^4t^4 - 8t^6$; г) $m^{12}n^3 - 6m^9n^6 + 12m^6n^9 - 8m^3n^{12}$. **410.** а) 117 649; б) 8 120 601; в) 24,389; г) 9,261. **411.** 729. **414.** в) $z^3 + 8s^3$; г) $-180m^2 + 108m - 81$. **416.** в) $24z + 16$; г) $3pq^2 - 3p^2q + 3qr^2 - 3q^2r + 3p^2r - 3pr^2$. **417.** а) -2; б) $-0,5$. **418.** а) 1000; б) -5832. **419.** а) $\frac{3}{(x+y)^2}$; б) $2a^2 - 1$. **421.** а) $-206,5$; б) 34. **424.** а) $102a^3 + 144a^2b + 384ab^2 + 142b^3$, степень 3; б) $x^4 - y^4$, степень 4. **425.** а) -20; б) -10. **426.** а) 6,5; б) -64. **427.** а) 70 км/ч; б) 3 м/с. **428.** а) 7; б) 1. **430.** 6. **431.** 6. **432.** е) $\left(\frac{r^4s^6}{2t^2}\right)^3$. **437.** и) $8n^3 + m^6$; к) $-v^3 - 64w^3$; л) $125t^3 - 27r^3$; м) $8s^3 - 64z^3$. **438.** и) $-s^{15} - 8r^6$; к) $125m^9 + 8n^9$; л) $64s^{15} - 27k^{12}$; м) $-0,001r^{18} - 0,008s^{12}$. **439.** а) 2500; б) 3600; в) -1599; г) 2496. **442.** д) $x^4 + 3x^3 + 27x + 81$; е) $y^8 - 5y^6 - 125y^2 + 625$; ж) $z^6 - 1$; з) $s^6 + 2s^5 - 8s^3 - 16s^2$. **444.** а) 2; б) 5; в) 4; г) 0,6. **445.** ж) $(3m + 20)(21m^2 + 180m + 400)$; з) $n^3(3n - 8)(3n^2 + 64)$; и) $(7r^2 - r + 11)(49r^4 + 7r^3 - 76r^2 - 22r + 121)$; **447.** а) $2y^3$; б) $8 - 9z$; в) $2t^2 + 35t - 52$; г) $27p^2 - 9p^4$; д) $3q^4 - 3q^2$. **448.** а) 7; б) 17; в) 37; г) -30. **450.** д) $\frac{9a^2 + 15ab + 25b^2}{3a - 5b}$; е) $\frac{1}{4c - 3d}$. **453.** а) 43; б) -35. **454.** а) 58,5; б) -56. **455.** г) $x(y^2 - z)(y^4 + y^2z + z^2)$; е) $m^3n^3(mn + 3)(m^2n^2 - 3mn + 9)$; ж) $-2d(3c^2 + d^2)$; з) $2b(3a^2 + b^2)$; и) $2x(x^2 + 75)$. **456.** а) $a^3 + 4a + 5$; б) $b^3 - 4b + 3$; в) $-c^3 + 11c + 14$; г) $-d^3 + 3d + 18$; д) $8p^3 + 2p - 30$; е) $27q^3 - 24q + 85$; ж) $m^3 + n^3 - 2m^2n - 2mn^2$; з) $r^3 - s^3 + 4r^2s - 4rs^2$. **465.** а) ум. на 50%; б) 14,5 и 72,5 или $-14,5$ и $-72,5$; в) 30 чел.; г) I – 32 авт., II – 8 авт. **466.** а) 12 или 2. **467.** 1. **468.** г) $-27t^3 - 8$; д) $125 - 216z^3$. **469.** д) $n^{21} + 216m^6$; е) $-125r^{15} + 27s^9$. **470.** а) 22 500; б) -6399. **472.** в) $z^{12} - 16z^6 + 64$; г) $t^6 - 64$. **474.** а) 2; б) 6. **475.** в) $18c^6(c - 1)(7c^2 + 6c + 12)$. **477.** г) $\frac{7m - 4n}{49m^2 - 28mn + 16n^2}$; д) $10x - 3y$; е) $\frac{z^2 + 6t}{z^4 - 6tz^2 + 36t^2}$. **478.** д) $2y(12x^2 + y^2)$; е) $(4x + 5y)(4x + 5y + 1)(16x^2 + 40xy + 25y^2 - 4x - 5y + 1)$. **480.** а) 80 чел.; б) I – 4 т, II – 6 т. **481.** 4. **483.** 270 грибов. **484.** 22. **485.** д) $\frac{9r + 6s}{2t - 7v}$. **487.** а) 120; б) 200; в) 170; г) 640; д) 145; е) 360. **491.** п) $8mnt(n^2 + 3t)$; р) $-5x^4yz(3x^2 - 2z)$. **492.** и) $2c^3d^2(4cd - 3c + 8d^2)$; к) $-4m^2n^2(5m^2n + 3n^2 - 4m^6)$; л) $5a^5b^3(3a^2b + a - 2b^6)$; м) $8r^5s^5(3s - 2r^4s^2 - 5r^5)$. **494.** а) 9,9; б) -840; в) -135; г) 720; д) -2; е) 0,5; ж) 200; з) $-18,2$. **495.** в) $\frac{7z}{4d^2}$; г) $-\frac{1}{3}$; д) $\frac{x + y}{5}$; е) $\frac{7}{a - b}$. **497.** и) $(1 - t)(s - st - r)$; к) $(4n - 3)(2m - 12kn + 9k)$; л) $(y^2 - 2)(x^2y^2 - 2x^2 + z^2)$; м) $(b^2 + 3)(4a^2b^2 + 12a^2 + 9c^2)$. **498.** а) $\{-3; 0\}$; б) $\{0; \frac{1}{6}\}$; в) $\{0; \frac{2}{3}\}$; г) $\{-0,2; 0\}$; д) $\{0; 1\frac{2}{3}\}$; е) $\{\frac{1}{3}; 2\}$; ж) $\{-1,5; -0,6\}$; з) $\{-0,8; 4\}$; и) $\{1\frac{1}{6}; 8\}$; к) $\{-0,5; \frac{5}{6}\}$; л) $\{-0,8; 0\}$; м) $\{0; 1\}$; н) $\{0; 3\}$; о) $\{0; 6\}$; п) $\{-4,5; 0\}$. **499.** г) $(y^3 - z^3)(x^2 + y^2)$; д) $2m^3(n^2 + r^2)$; е) $2ab(c^2 + d^2)$. **500.** е) $(2 - x^2)(a - b - 1)$; ж) $(x + y)(a + b)$; з) $b(b^3 + b - 1)(q + 1)$; и) $(m + n)(3b + 1)$; к) $(p + q)(k - r)$. **501.** д) $17 \cdot 2^{k-2}$; е) $35 \cdot 6^{3m-1}$. **502.** а) -1; б) 10; в) 0,6; г) -15. **507.** а) 505,615 кг; б) 1338,6 см; в) 35,5 ч; г) 6932,4 р. **508.** д) $2m - 3n$; е) $4p - q$. **511.** а) 37 лет; б) 19,1 р.; в) 71 км/ч. **514.** д) $2zt^3(4 - 7zt^2)$; е) $4q^5(3p - 4q)$. **515** д) $7x^2y^3(2x^3y - 3y + 4x^5)$; е) $6p^5q^3(2pq^2 + p^2 - 8q^6)$. **516.** а) 180; б) -80; в) 0,6; г) 0,7. **517.** в) $\frac{x - y}{9}$; г) $\frac{1}{3z - 4t}$; д) $\frac{3p + 8q}{3p - 8q}$; е) $3m + 2n$. **518.** д) $(c - d)(c - d - 1)$; е) $(5x + y)(5x + y + 1)$; ж) $(b^2 - 3)(a^2b^2 - 3a^2 + b^2)$; з) $2(q^2 + 9)(p^2q^2 + 9p^2 + 6q^2)$. **519.** а) $\{-7; 0\}$; б) $\{0; \frac{1}{9}\}$; в) $\{0; \frac{1}{6}\}$; г) $\{0,25; 5\}$; д) $\{-3; -\frac{5}{7}\}$; е) $\{1,25; 1,5\}$; ж) $\{-\frac{3}{7}; 0\}$; з) $\{0; 1\}$; и) $\{-\frac{6}{11}; 0\}$. **520.** в) $(p^2 - q^2)(p^2 + q^2)$; г) $mn(2m^2 + 3n^2)$. **521.** а) $-1,05$; б) -4. **522.** г) $(3 - y^2)(x - y - 1)$; д) $(7a + 1)(c + d)$; е) $(3m - n)(z + r)$. **523.** в) $48 \cdot 7^{n-1}$;

г) $63 \cdot 8^{3m-1}$. **528.** а) 17,13 р.; б) ≈ 13,3 м/с. **532.** 20. **533.** а) 540; б) −1900; в) 75; г) −8. **538.** и) $(x+y)(x+y-1)$; к) $(3a-4b)(1-3a+4b)$; л) $(p-q)(p-q-9)$; м) $(m-n)(m-n-k)$. **539.** с) $(a^2+1)(a+b)$; т) $(x-1)(x+y)$; у) $(b-1)^2(b+1)$; ф) $(3y-1)(4y+a)$; х) $(3x+1)(2x^2-1)$; ц) $(7z-2)(x^4+y)$; ч) $3(m+4)(m^2-nk)$; ш) $(5z^2-4y)(az-2)$. **540.** а) 26; б) 5; в) 20; г) −30. **544.** д) $t(t-1)(p+q+w)$; е) $(a+b+2)(ab+1)$; ж) $(z^2-y)(x-t+z)$; з) $(by+ab+x)(ax+b)$; к) $(x^2+y^2)(a+b+c)$. **545.** л) $(p-3)(p^2-5p-15)$; м) $(q^2+2)(q^2-3)$; н) $(r-2)(r+2)(r^2-3)$; о) $(s^2+4)(s^2+3)$; п) $(2t^2-3)(t^2+1)$. **546.** а) $\{1; 5\}$; б) $\{-3; 4\}$; в) $\{-3; 5\}$; г) $\{-7; 2\}$; д) $\{-1; 7\}$; е) $\{-4; 1\}$; ж) $\{6; 8\}$; з) $\{2; 3\}$; и) $\{1; 2\}$; к) $\{-5; 4\}$; л) $\{-3; 7\}$; м) $\{-5; 6\}$. **548.** ж) $\frac{5}{2c-d}$; з) $\frac{a+b}{a-b}$; и) $\frac{7+x}{5xy-6}$. **549.** а) 2; б) $\frac{c}{8}$. **550.** д) $2(b-2)(2b-3)$; е) $(3c-7)(3c+5)$; ж) $(a+b+c)^2$; з) $(p+q+r)(pq+pr+rq)$. **551.** а) −3,0625; б) −0,135. **553.** в) $(t+a)(t+b)(t+c)$; г) $(s-r)(s+q)(s-p)$. **554.** а) $\{7\}$; б) $\{0; 5\}$; в) $\{-3\}$; г) $\{6\}$. **555.** д) $(y-1)(y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+1)$; е) $(a-1)(a^8+a^7+a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)$. **559.** ж) $3^{34} \cdot 7^{17} \cdot c^{17}$; з) $3^9 \cdot a^{63} \cdot b^{81} \cdot c^{99}$. **560.** а) 43; б) 65. **562.** а) 20%; б) 52 тыс. чел.; в) 20%. **564.** 7. **565.** ж) $(2m+n)(2m+n-1)$; з) $(5x-3y)(1-5x+3y)$; и) $(7p+2q)(1+2q+7p)$. **566.** и) $(r^2+1)(r-s)$; к) $3(2z-3)(x^4+y)$; л) $(7m+13)(m^2-nk)$; м) $3(2z^2-y)(za-2)$. **567.** а) −14,4; б) 0,4. **569.** г) $(a+3b)(a-2b)$; д) $(c+4d)(c+3d)$; е) $(a+5y)(a-7y)$; ж) $(m-2)(m+7)$; з) $(a+2)(a-3)$; и) $(n+8)(n-6)$. **570.** а) $\{1; 3\}$; б) $\{-5; 3\}$; в) $\{4; 7\}$; г) $\{-2; 6\}$; д) $\{-4; 3\}$; е) $\{-5; -3\}$. **571.** а) $\frac{x}{a-9}$; б) $\frac{b+4}{a-4}$; в) $\frac{6p+q}{7(1-p)}$; г) $\frac{7}{3c-d}$. **572.** а) $(x+8)(3x-2)$; б) $(x-9)(4x+3)$; в) $(8x+5)(x-3)$; г) $(6x+7)(x-4)$. **574.** а) $\{9\}$; б) $\{0; 4\}$. **576.** а) 24; б) 63. **577.** а) 10%; б) 300 чел. **579.** 6. **581.** на 150%. **582.** $\frac{1}{2}$ часть. **585.** а) −1; б) 4; в) 1; г) −1. **587.** к) $-11c-13d$; л) $-6-pq^2$; м) $1-3c^2d^3$. **588.** д) $(9c-7)(9c+7)$; к) $(x^2y-z^3)(x^2y+z^3)$; п) $(a^2b-c^2+d^2)(a^2b+c^2-d^2)$; ф) $(4w^5+3v-8x^4+9d)(4w^5+3v+8x^4-9d)$. **589.** н) $(m^4-3k^3)^2$; о) $(2p^5+5z^6)^2$; п) $(3n^3+8r^2)^2$; р) $(6x^4-7y^2)^2$; с) $(2p^3-q^4)^2$; т) $(8a^5-7n^6)^2$. **590.** г) $(n+3)(n^2-3n+9)$; з) $(3m+5n)(9m^2-15mn+25n^2)$; м) $(x^2y^2-s^4z^3)(x^4y^4+x^2y^2\,s^4z^3+s^8z^6)$; р) $(5m+4n-6y)(25m^2+40mn+16n^2+30my+24ny+36y^2)$. **591.** д) $(3ab^2+2c^2)^3$; е) $(d+3pc^3)^3$; ж) $(2xy-5z)^3$; з) $(x^3y^4-z^2)^3$. **592.** а) −4; б) −5,25; в) 64; г) 2,25; д) 64; е) 0,008. **595.** б) $\{-10; 10\}$; в) $\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\}$; д) $\{-1\frac{2}{3}; 4\frac{1}{3}\}$; е) $\{-4; -1,5\}$; ж) $\{\frac{2}{3}; 6\}$; з) $\{-8,4; -4\frac{2}{3}\}$. и) $\{-1,25; -0,5\}$; к) $\{-9; \frac{1}{13}\}$; л) $\{-5; -\frac{3}{13}\}$; м) $\{-12; -\frac{2}{3}\}$. **596.** г) $(3t+z)(3t-z-1)$; е) $(p-q)(p+q-8)$; з) $(2d^2+5)(2d^2-r^2-5)$; к) $-(s+4z)(z^2+sz+s^2)$; л) $(p+q+2)(p^2-pq+q^2)$; м) $(m+n)(m^3-m^2n+mn^2-mn+n^2)$. **599.** б) $(1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)$; д) $(c-d)(c+d)(c^2-cd+d^2)(c^2+cd+d^2)$; ж) $(m^4-n^4-2m^2n^2)(m^4-n^4+2m^2n^2)$; з) $(2q-p)(2q+p)^2$. **601.** б) $(y-6)(y-10)$; г) $(2a-5)(2a-1)$; е) $(7c-4)(7c-2)$. **602.** а) $\{-2; 0\}$; б) $\{-5; 3\}$; в) $\{-13; 3\}$; г) $\{-8; -1\}$. **604.** в) $\frac{7c+3d}{c+3d}$; г) $\frac{7y-x}{11x+7y}$; д) $\frac{z-8}{z-6}$; е) $\frac{2r+3}{2r-1}$. **606.** а) 56; б) 16. **607.** а) 354; 885 и 1239; б) 200, 300, 800, 1120. **610.** а) 60 дней; б) в обоих случаях за одинаковое время; в) 6000 шт. **611.** а) 7; б) 3; в) 1; г) 7. **612.** а) 3; б) 6; в) 9; г) 4; д) 0; е) 1; ж) 3; з) 1; и) 3. **613.** в) $5a-3b$; г) $-4c^3d^4-1$. **614.** д) $(5m+n)(7m-n)$; е) $(x^3y^2-x^3+y^2)(x^3y^2+x^3-y^2)$; ж) $(5z^4-3z^2-7z+12)(5z^4+3z^2+7z+12)$; з) $v^2(-8v^3+3v^2+12)(8v^3+3v^2-2)$. **615.** д) $(5p^3+4q^2)^2$; е) $(9m^4-2n^3)^2$. **616.** д) $(x^2y^3+tz^4)(x^4y^6-tx^2y^3z^4+t^2z^8)$; е) $(a^3b^5-c^3d^2)(a^6b^{10}+a^3b^5c^3d^2+c^6d^4)$; ж) $(18-r^4)(r^8-15r^4+93)$; з) $(7s-3t)(49s^2+84st+63t^2)$. **617.** в) $(x^2y-4z)^3$; г) $(m^5n^4-k^2)^3$. **618.** а) −8,4; б) 2,25; в) 1. **620.** а) $\{-\frac{5}{6}; \frac{5}{6}\}$; б) $\{-2\frac{2}{3}; 2\frac{2}{3}\}$; в) $\{1,4; 7\}$; г) $\{-2,75; -\frac{11}{12}\}$; д) $\{-3,25; 0,5\}$; е) $\{\frac{1}{6}; 2\frac{1}{6}\}$. **621.** д) $(m-n+3)(m^2+mn+n^2)$; е) $(p-q)(p+q)(p^2-pq+q^2)$. **622.** в) $(z-2)(z+2)(z^2+2z+4)(z^2-2z+4)$; г) $(2a^4+b^4+a^2b^2)(2a^4+b^4+a^2b^2)$. **624.** в) $(2z+5)(2z+1)$; г) $3(11-3t)(t-1)$. **625.** а) $\{0; 3\}$; б) $\{-5; 1\}$. **626.** а) 10; б) 3. **627.** а) 295, 354, 649; б) 276, 368, 828, 966. **629.** а) 11 дней; б) 13 т. **630.** а) 5; б) 4; в) 2; г) 8. **631.** а) 0; б) 1; в) 3; г) 1; д) 4; е) 1. **633.** 7 дет.

634. в 1,5 р. **637.** л) $2c(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)$; м) $3m(n-2)(n+2)(n^2+2n+4)(n^2-2n+4)$; н) $7q(p-q)(p+q)(p^2-pq+q^2)(p^2+pq+q^2)$; о) $t(1-5r^2s^2)(1+5r^2s^2+25r^4s^4)$; п) $y^3(x^4y^3-z^5t)(x^4y^3+z^5t)$. **638.** н) $(a-b)(a+b-1)$; о) $(c+d)(1+c-d)$; п) $(x+y)(x-y)^2$; р) $(m+n)^2(m-n)$; с) $(p-q)(r-p+q)$; т) $(s-k-t)(s+5t+k)$. **639.** а) $\{-4; -2\}$; б) $\{2; 5\}$; в) $\{-2; 5\}$; г) $\{-3; -2\}$; д) $\{1; 2\}$; е) $\{-5; 3\}$; ж) $\{-4; -3\}$; з) $\{-6; -3\}$; и) $\{-1; 1\}$; к) $\{-1; 1\}$; л) $\{-2; 2\}$; м) $\{-2; 1\}$; н) $\{-3; 3\}$; о) $\{-0{,}2; 0; 2\}$; п) $\{-\frac{2}{3}; 0; 3\}$. **640.** н) $7xy(2x^2+6y^2+7xy)$; о) $5z^2(4z^5-6z^2+5)$; п) $(a-b)(a-c)(c-b)$; р) $2p(p+q)^2$; с) $(c-6)^2$; т) $4(3y-2x)^2$. **641.** а) $\{-2; 0; 2\}$; б) $\{0\}$; в) $\{-7; 0\}$; г) $\{0; 3\}$; д) $\{-3; 0; 3\}$; е) $\{-2; 0; 2\}$; ж) $\{0; 1\}$; з) $\{-3; 3\}$; и) $\{-1; 0; 1\}$; к) $\{-3; 3; 5\}$; л) $\{-3; -2; 2\}$; м) $\{-5; 0{,}5; 5\}$. **642.** а) 14; б) 21; в) 16; г) −176; д) −12; е) 32. **643.** в) $\frac{a+b}{a+b-9}$; г) $\frac{x+2y-z}{x+z-2y}$; д) $\frac{c-1+d}{c-d+1}$; е) $\frac{r+t}{r+t-s}$. **644.** а) 2; б) 0; в) $\frac{17}{45}$; г) 30; д) 146,25; е) 2,205. **645.** а) 230; б) 360; в) 860; г) 180; д) $\frac{10}{37}$; е) $-\frac{1}{51}$; ж) $-\frac{77}{312}$; з) −0,2. **648.** д) $(x-0{,}5)(x+2)$; е) $(y-4)(y+1{,}5)$; ж) $(z-1{,}5)(3z+1)$; з) $(n-4)(2n+2{,}5)$. **649.** д) $(m-n-p-q)(m-n+p+q)$; е) $(2x+y-z+3t)(2x+y+z-3t)$; ж) $(5a-4b-2c-d)(5a-4b+2c+d)$; з) $(pq+rs-pr+qs)(pq+rs+pr-qs)$. **651.** в) $(p-r)(q-p)(r-q)$; г) $(x-z)(y-x)(z-y)(x+z+y)$; ж) $3(5m+n)(7-9k)$; з) $3(11c+13)(4a-3b)$. **653.** а) $\{0; 1; 4\}$; б) $\{-3; -1; 0\}$; в) $\{-3; 3\}$; г) $\{1\frac{2}{3}\}$; д) $\{-7; 1; 7\}$; е) $\{0; 1\}$; ж) $\{-3; 0{,}5; 3\}$; з) $\{-1\}$. **655.** а) 1320; б) −1650; в) 1,848; г) −17,875. **657.** а) $\{-1; 1\}$; б) $11\frac{1}{9}$. **664.** а) $-a^2b$, степ. 3; в) $2a+10b$, степ. 1; г) $10q-p-3$, степ.1; е) $-2x-4y+2z$, степ.1. **665.** а) 96 км; б) 13,75 км; в) 12 ч. **666.** д) $7(m-2)(m+2)(m^2+2m+4)(m^2-2m+4)$; е) $3(n^2+k^2)(n^4-n^2k^2+k^4)$. **667.** ж) $(a-b)(1-a-b)$; з) $c(c+d)(2c-d)$; и) $(x-y)^2(x+y)$. **668.** а) $\{-5; 3\}$; б) $\{-3; 2\}$; в) $\{-7; 1\frac{2}{3}\}$; г) $\{-1; 2\}$; д) $\{-1; 1\}$; е) $\{-1; 0{,}5\}$. **669.** г) $(s-1)(s+1)(r+s)$; з) $9pq(2p^2+9pq+10q^2)$. **670.** а) $\{0\}$; б) $\{0; 8\}$; в) $\{-1; 0; 1\}$; г) $\{-6; -3; 3\}$. **671.** а) 40; б) 81; в) 15; г) 38. **672.** б) $\frac{x-y}{x-y-3}$; г) $\frac{m+2k}{2n+m+2k}$. **673.** б) $(y-5)(y-4)$; г) $(b-6)(b+1{,}5)$; е) $(d-2)(3d+1)$. **677.** а) $\{-2; -1; 3\}$; б) $\{-4\}$; в) $\{-3; -1; 3\}$; г) $\{1\}$. **680.** а) $\{-2; 2\}$; б) $\{0; 3{,}5\}$. **684.** а) 1200 м; б) 280 км. **687.** 42 ч. **692.** а) $\{-3; 1\}$; б) $\{-3; 5\}$; в) $\{-0{,}5; 6{,}5\}$; г) $\{-4; 0; 6\}$; д) $\{-5; 0; 3\}$; е) $\{-4; 0; \frac{1}{3}\}$. **693.** а) 21 км/ч; б) 4 см; в) 199 кн. **694.** а) 22 м; б) 12 м; в) 36 см. **695.** а) 1,5 и 2; б) 2 и 4,2 или −4,2 и − 2; в) 3 и 4,6 или −4,6 и − 3; г) −3,5 и 0,5 или −0,5 и 3,5. **696.** а) 6 ч; б) 12 ч; в) 18 ч. **697.** а) 7 км/ч; б) 27 км/ч; в) 32 км/ч. **699.** а) 240 кг; б) 5 кг. **699.** а) 48 км/ч; б) 16 ч. **700.** а) (2; −3; −4) или (−1; −6; 8) или (4; −1; −2); б) (1; 3; 2) или (−1; 1; −2) или (−2; 0; −1). **702.** а) −26; б) 4; в) −7; г) 3. **707.** а) 11; б) 3; в) 15; г) 18. **709.** а) 22 м; б) 48 см. **710.** а) $\{-3; 1\}$; б) $\{-1; 9\}$; в) $\{-7; 0; 5\}$; г) $\{0; 3; 6\}$. **711.** а) 1,5 и 1; б) −4 и −2,5 или 4 и 2,5. **712.** а) 45 ч; б) 40 кг. **713.** а) 20 км/ч; б) 30 км/ч; в) 80 км/ч. **714.** (2; 7; 10) или (−2; 3; −10) или (−5; 0; −4). **715.** а) 36; б) 0,45. **720.** а) 52; б) −2. **722.** 500 стр. **723.** 6000 монет. **724.** 27 км. **727.** а) $-\frac{1}{8}$; б) −850; в) 6; г) 19. **728.** а) 10; б) 11. **730.** а) $10y-12x$; в) $-\frac{r}{5}$. **734.** а) 28; б) 56; в) −4; г) 24; д) 25; е) 1. **735.** а) 21; б) 4; в) 1,5; г) −1; д) 1; е) 1. **737.** а) 6 ч; б) 8,4 км. **738.** а) 55 футб.; б) 32 зеб.; в) 52 кг; г) 6 ч. **740.** а) 5 и 21; 14 и 12; 23 и 3; б) 100°. **753.** а) 4761; б) 5041; в) 79,21; г) $80\frac{143}{144}$; д) 4800. **754.** а) 10 000; б) 300 000; в) 0,72; г) 0,52; д) 4900; е) −2499; ж) 512; з) 343. **755.** а) $\{-3\}$; б) $\{-1; 15\}$; в) $\{-3; 0\}$; г) $\{6\}$; д) $\{-2\}$; е) $\{7\}$; ж) $\{-8\}$; з) $\{-0{,}5\}$. **756.** а) 1; б) −625; в) 463,5; г) 64; д) 60; е) 101. **761.** а) $\{-3; 9\}$; б) $\{-7; 4\}$; в) $\{-7; 6\}$. **762.** а) −7; б) −7. **764.** а) 26 м; б) 8 м; в) 52 см. **766.** а) в 9 р.; б) через 2 ч; в) 360 тыс.р.; г) 60 км/ч; д) 120 км/ч. **770.** а) 7; б) 2; в) 3; г) 5. **776.** а) 2; б) 8; в) 1. **777.** а) 10,25; б) 212,25. **780.** а) −1; б) −25; в) 1; г) −71. **781.** а) 1; б) 1; в) −1; г) 48. **782.** а) −1; б) 1.

Предметный указатель

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДО 100

1^2	1	21^2	441	41^2	1681	61^2	3721	81^2	6561
2^2	4	22^2	484	42^2	1764	62^2	3844	82^2	6724
3^2	9	23^2	529	43^2	1849	63^2	3969	83^2	6889
4^2	16	24^2	576	44^2	1936	64^2	4096	84^2	7056
5^2	25	25^2	625	45^2	2025	65^2	4225	85^2	7225
6^2	36	26^2	676	46^2	2116	66^2	4356	86^2	7396
7^2	49	27^2	729	47^2	2209	67^2	4489	87^2	7569
8^2	64	28^2	784	48^2	2304	68^2	4624	88^2	7744
9^2	81	29^2	841	49^2	2401	69^2	4761	89^2	7921
10^2	100	30^2	900	50^2	2500	70^2	4900	90^2	8100
11^2	121	31^2	961	51^2	2601	71^2	5041	91^2	8281
12^2	144	32^2	1024	52^2	2704	72^2	5184	92^2	8464
13^2	169	33^2	1089	53^2	2809	73^2	5329	93^2	8649
14^2	196	34^2	1156	54^2	2916	74^2	5476	94^2	8836
15^2	225	35^2	1225	55^2	3025	75^2	5625	95^2	9025
16^2	256	36^2	1296	56^2	3136	76^2	5776	96^2	9216
17^2	289	37^2	1369	57^2	3249	77^2	5929	97^2	9409
18^2	324	38^2	1444	58^2	3364	78^2	6084	98^2	9604
19^2	361	39^2	1521	59^2	3481	79^2	6241	99^2	9801
20^2	400	40^2	1600	60^2	3600	80^2	6400	100^2	10000

ТАБЛИЦА КУБОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДО 60

1^3	1	21^3	9261	41^3	68 921
2^3	8	22^3	10 648	42^3	74 088
3^3	27	23^3	12 167	43^3	79 507
4^3	64	24^3	13 824	44^3	85 184
5^3	125	25^3	15 625	45^3	91 125
6^3	216	26^3	17 576	46^3	97 336
7^3	343	27^3	19 683	47^3	103 823
8^3	512	28^3	21 952	48^3	110 592
9^3	729	29^3	24 389	49^3	117 649
10^3	1000	30^3	27 000	50^3	125 000
11^3	1331	31^3	29 791	51^3	132 651
12^3	1728	32^3	32 768	52^3	140 608
13^3	2197	33^3	35 937	53^3	148 877
14^3	2744	34^3	39 304	54^3	157 464
15^3	3375	35^3	42 875	55^3	166 375
16^3	4096	36^3	46 656	56^3	175 616
17^3	4913	37^3	50 653	57^3	185 193
18^3	5832	38^3	54 872	58^3	195 112
19^3	6859	39^3	59 319	59^3	205 379
20^3	8000	40^3	64 000	60^3	216 000

Оглавление

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $\quad (a : b)^n = a^n : b^n$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – формула квадрата суммы

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – формула квадрата разности

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – формула разности квадратов

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – формула куба суммы

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – формула куба разности

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – формула суммы кубов

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ – формула разности кубов

Петерсон Людмила Георгиевна
Абраров Дмитрий Леонардович
Чуткова Елена Валериевна

МАТЕМАТИКА
Алгебра. Функции. Анализ данных
Учебник для 7 класса
Часть 2

Ответственный за выпуск ***Ю. И. Веслинский***
Художники ***С. Ю. Гаврилова, П. А. Северцов***
Художественный редактор ***Т. С. Шаляпина***
Технический редактор ***Е. В. Бегунова***
Компьютерная верстка ***Р. Ю. Шаповалов***
Корректор ***О. Б. Андрюхина***

Подписано в печать 11.04.2011. Формат 84x108/16. Объем 9,5 печ. л. 15,96 усл. печ. л.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Школьная.
Тираж 25 000 экз. Заказ № 28563 (K-Sm).

Издательство «Ювента»
(структурное подразделение ООО «С-инфо»)

125284 Москва, а/я 42 **Тел.:** (495) 796-92-93 **Факс:** (495) 796-92-99
E-mail: booksale@si.ru **Адрес в Интернете:** www.books.si.ru

Приобрести книги можно в магазине по адресу:
Москва, ул. 1905 года, д. 10 А. **Телефон:** (499) 253-93-23
Часы работы: с 10 до 19 часов. **Выходные:** воскресенье, понедельник

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат»,
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.