А.Г. МОРДКОВИЧ

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА АНАЛИЗА

10 – 11
классы

УЧЕБНИК
для общеобразовательных учреждений

2-е издание

*Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации*

МНЕМОЗИНА

Москва 2001

УДК 373.167.1:512+517.1
ББК 22.141я721+22.161я721
М79

Мордкович А.Г.
М79 Алгебра и начала анализа. 10–11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений. — 2-е изд. — М.: Мнемозина, 2001. — 335 с.: ил.

ISBN 5-346-00044-5

Учебник дает цельное и полное представление о школьном курсе алгебры и начал анализа, отвечает требованиям обязательного минимума содержания образования. Отличительная особенность учебника — более доступное для школьников изложение материала по сравнению с «традиционными» учебными пособиями. Построение всего курса алгебры осуществляется на основе приоритетной функциональной линии.

УДК 373.167.1:512+517.1
ББК 22.141я721+22.161я721

ISBN 5-346-00044-5

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Издательство «Мнемозина» в 2000 г. опубликовало комплект из четырех книг для 10–11 классов общеобразовательной школы:

А.Г. Мордкович. Алгебра и начала анализа. Учебник.

А.Г. Мордкович и др. Алгебра и начала анализа. Задачник.

А.Г. Мордкович. Алгебра и начала анализа. Методическое пособие для учителя.

А.Г. Мордкович, Е.Е. Тульчинская. Алгебра и начала анализа. Контрольные работы.

У вас в руках учебник – первая книга комплекта. Ею можно пользоваться независимо от того, на какие учебные пособия по алгебре вы делали ставку со своими учениками в 7–9-м классах, она в определенном смысле самодостаточна. Но все же наиболее комфортно, работая с этой книгой, будут чувствовать себя те учителя, которые используют в основной школе наши учебные пособия по алгебре. Речь идет о следующих комплектах учебных пособий:

А.Г. Мордкович. Алгебра-7 (8, 9). Учебник. М., Мнемозина, 1997 (1998–2000).

А.Г. Мордкович, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. Алгебра-7 (8, 9). Задачник. М., Мнемозина, 1997 (1998–2000).

А.Г. Мордкович. Алгебра-7 (8, 9). Методическое пособие для учителя. М., Мнемозина, 1997 (1998–2000).

Ю.П. Дудницын. Алгебра-7 (8, 9). Контрольные работы (под ред. А.Г. Мордковича). М., Мнемозина, 1997 (1998–2000).

Учителя, работавшие по названным книгам, привыкли к особенностям стиля изложения, приоритету функционально-графической линии в курсе алгебры, реализации в нашем курсе алгебры развивающей концепции математического моделирования и математического языка. Для них предлагаемое учебное пособие – естественное продолжение курса алгебры 7–9-го классов.

Несколько слов о стиле изложения. Изложение теоретического материала ведется очень подробно, обстоятельно и, смеем надеяться, достаточно живым литературным языком (а не сугубо предметным, выхолощенным, что, к сожалению, в последнее время стало традицией школьных учебников по математике). Весь материал, который изложен в том или ином параграфе, вы в классе на уроках рассмотреть не успеете, но это и не нужно, поскольку данная книга – книга для неспешного домашнего чтения. Кстати, в условиях острой нехватки часов для проведения занятий в классе возрастает значение самостоятельной работы учеников с книгой, именно поэтому учебник и должен быть подробным и обстоятельным. Ваши ученики, как правило, могут не носить эту книгу с собой на уроки, они должны читать ее дома. Опираясь на учебник, учитель прекрасно разберется в том, что надо рассказать учащимся на уроке, что заставить их запомнить, а что предложить им просто прочесть дома (и, возможно, обсудить в классе в жанре беседы на следующем уроке).

Каждая глава заканчивается разделом «Основные результаты». Это своеобразный смотр достижений, «сухой остаток», подведение итогов, что для успешности процесса обучения очень важно. В книге много примеров с подробными решениями. На окончание решения примера указывает слово «ответ», либо символ ◁■. На окончание доказательства утверждения указывает символ ●.

Из основных содержательно-методических линий школьного курса алгебры в качестве приоритетной выбрана функционально-графическая линия. Это выражается прежде всего в том, что какой бы класс функций, уравнений, выражений ни изучался, построение материала практически всегда осуществляется по жесткой схеме:

функция — уравнения — преобразования.

По этой схеме в нашем учебнике для 8-го класса изучалась тема «Квадратные корни. Функция $y = \sqrt{x}$»; по ней в этом учебнике строится весь раздел «Тригонометрия», изучение степенных, показательных и логарифмических функций, уравнений, выражений.

Материал, изложенный в этом учебнике, дает цельное и полное представление о школьном курсе алгебры и начал анализа, обеспечивает, как это предусмотрено нормативными документами, выполнение требований обязательного минимума содержания образования. Однако, каждый автор имеет право выйти за пределы указанных требований, на что при желании и возможности имеет право и учитель. В чем мы вышли в данном учебнике за пределы минимума содержания курса алгебры и начал анализа? Если говорить о главном, то это — использование таких понятий, как предел последовательности, предел функции и неопределенный интеграл. Эти понятия, на наш взгляд, были для школы persona non grata только потому, что никак не удавалось изложить их в школьных учебниках мягко и доступно. Надеемся, что нам это удалось.

Автор

Глава

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В курсе алгебры 7—9-го классов вы изучали алгебраические функции, т.е. функции, заданные аналитическими выражениями, в записи которых использовались алгебраические операции над числами и переменной (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратного корня). Но математические модели реальных ситуаций часто бывают связаны с функциями других классов, не алгебраическими. В школьном курсе математики это показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Мы приступаем сейчас к изучению тригонометрических функций.

Для введения тригонометрических функций нам понадобится новая математическая модель — *числовая окружность*, детальному изучению которой посвящен § 2, достаточно большой параграф. Отнеситесь к нему очень внимательно, поскольку, как показывает опыт, учащийся, хорошо овладевший понятием «числовая окружность», свободно и непринужденно работающий с ней, достаточно уверенно обращается и с тригонометрическими функциями. Для облегчения восприятия материала о числовой окружности рассмотрим ряд вспомогательных геометрических примеров.

Пример 1. Дана окружность радиусом 1см. Чему равна длина окружности, ее половины, ее четверти?

Решение. Длина L окружности радиусом R вычисляется по формуле $L = 2\pi R$, где $\pi \approx 3{,}14$. Если $R = 1$ см, то

$$L = 2\pi \text{ см} \approx 6{,}28 \text{ см}.$$

Длина половины окружности равна π см, а длина четверти окружности (AB, BC, CD или DA) равна $\frac{\pi}{2}$ см.

Ответ: ≈ 6,28 см; ≈ 3,14 см; ≈ 1,57 см.

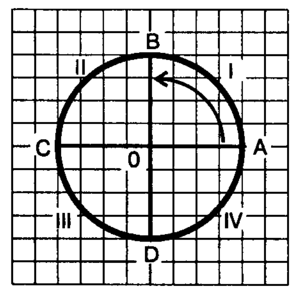


Рис. 1

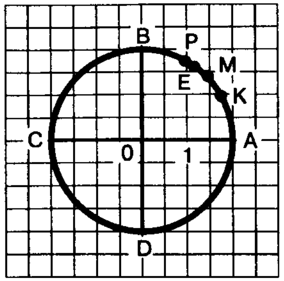


Рис. 2

В дальнейшем будем говорить об окружности, радиус которой равен масштабному отрезку, без указания конкретных единиц измерения. Радиус такой окружности считается равным 1, а саму окружность называют *единичной*. Мы все время будем пользоваться единичной окружностью, в которой проведены горизонтальный и вертикальный диаметры CA и DB. Условимся называть дугу AB (см. рис. 1) *первой четвертью*, дугу BC — *второй четвертью*, дугу CD — *третьей четвертью*, дугу DA — *четвертой четвертью*. При этом, как правило, речь идет об *открытых дугах*, т.е. о дугах без их концов: например, первая четверть — это дуга AB без точек A и B.

Пример 2. В единичной окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра: горизонтальный CA и вертикальный DB. Дуга AB разделена точкой M на две равные части, а точками K и P — на три равные части (рис. 2). Чему равны длины дуг AM, MB, AK, KP, PB, AP и KM?

Решение. Так как длина дуги AB равна $\frac{\pi}{2}$ (будем писать кратко: $AB=\frac{\pi}{2}$), то, разделив ее на две равные части точкой M, получим две дуги длиной $\frac{\pi}{4}$ каждая. Значит, $AM=MB=\frac{\pi}{4}$.

Если дуга AB разбита на три равные части точками K и P, то длина каждой полученной части равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$, т.е. $\frac{\pi}{6}$. Значит, $AK=KP=PB=\frac{\pi}{6}$.

Дуга AP состоит из двух дуг AK и KP длиной $\frac{\pi}{6}$. Значит, $AP=2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

Осталось вычислить длину дуги KM. Эта дуга получается из дуги AM отбрасыванием дуги AK. Значит, длина дуги KM равна разности длин дуг AM и AK. Таким образом, $KM=AM-AK=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$. ◀

Замечание. Обратите внимание на некоторую вольность, которую мы позволяем себе в использовании математического языка. Ясно, что дуга KM и длина дуги KM — разные вещи (первое понятие — геометрическая фигура, а второе понятие — число). А обозначается и то, и другое одинаково: KM. Более того, если точки K и M соединить отрезком, то и полученный отрезок, и его длина обозначаются так же: KM. Обычно из контекста бывает ясно, какой смысл вкладывается в обозначение (дуга, длина дуги, отрезок или длина отрезка).

А теперь еще раз взгляните на рис. 1. Сколько вы видите дуг единичной окружности, соединяющих точки A и B? Две: поменьше, если идти от точки A к точке B по первой четверти, и побольше, если идти от точки B к точке A по второй, третьей и четвертой четвертям. Как же отличать эти дуги друг от друга в символах математического языка? Условимся в двухбуквенном обозначении дуги на первом месте писать букву, соответствующую началу дуги, а на втором — букву, соответствующую концу дуги, причем движение по окружности от начала дуги к ее концу будем осуществлять в направлении *против часовой стрелки*. Тогда меньшая из двух дуг, соединяющих точки A и B, о которых мы говорили выше, — это дуга AB, а бóльшая — это дуга BA.

Пример 3. Вторая четверть единичной окружности разделена пополам точкой M (рис. 3), а четвертая четверть разделена на три равные части точками K и P. Чему равны длины дуг AM, AK, AP, PB, MK, KM?

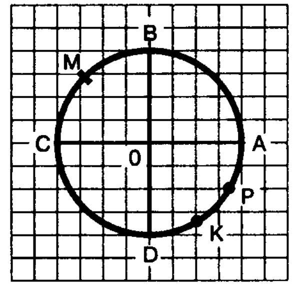


Рис. 3

Решение. Прежде чем переходить к требуемым вычислениям, заметим, что

$AB=BC=CD=DA=\frac{\pi}{2}$, $BM=MC=\frac{\pi}{4}$,

$DK=KP=PA=\frac{\pi}{6}$. Значит,

$$AM=AB+BM=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4};$$
$$AK=AB+BC+CD+DK=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{3};$$
$$AP=AD+DP=\frac{3\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{11\pi}{6};$$
$$PB=PA+AB=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3};$$
$$MK=MC+CD+DK=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{12};$$
$$KM=KP+PA+AB+BM=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{13\pi}{12}.$$ ◀

Заметили ли вы, что во всех разобранных примерах длины дуг выражались некоторыми долями числа π? Это неудивительно: ведь длина единичной окружности равна 2π, и если мы окружность или ее четверть делим на равные части, то получаются дуги, длины которых выражаются долями числа π. А как вы думаете, можно ли найти на единичной окружности такую точку E, что длина дуги AE будет равна 1? Давайте прикинем:

$$\pi \approx 3{,}14; \quad \frac{\pi}{3} \approx \frac{3{,}14}{3} \approx 1{,}047; \quad \frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}14}{4} \approx 0{,}785.$$

Таким образом, $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$.

Обратимся снова к рис. 2. Если $AE = 1$, то точка E находится между точками M и P, ближе к точке P. Разумеется, точно (а не приблизительно) указать положение точки E на окружности мы не сумеем, но это, впрочем, не так уж важно.

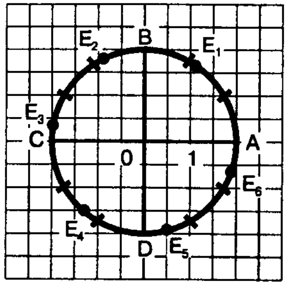


Рис. 4

Рассуждая аналогичным образом, делаем вывод, что на единичной окружности можно найти и точку E_1, для которой $AE_1 = 1$, и точку E_2, для которой $AE_2 = 2$, и точку E_3, для которой $AE_3 = 3$, и точку E_4, для которой $AE_4 = 4$, и точку E_5, для которой $AE_5 = 5$, и точку E_6, для которой $AE_6 = 6$. На рис. 4 отмечены (приблизительно) соответствующие точки, причем для ориентировки каждая из четвертей единичной окружности разделена черточками на три равные части.

§ 2. ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ

С числовой окружностью вы до сих пор не встречались, зато хорошо знакомы с числовой прямой. Что такое числовая прямая? Это прямая, на которой заданы начальная точка O, масштаб (единичный отрезок) и положительное направление. Любому действительному числу мы можем сопоставить точку на прямой и наоборот.

Как по числу x найти на прямой соответствующую точку M? Числу 0 соответствует начальная точка O. Если $x > 0$, то, двигаясь по прямой из точки O в положительном направлении, нужно пройти путь длиной x. Конец этого пути и будет искомой точкой $M(x)$. Если $x < 0$, то, двигаясь по прямой из точки 0 в отрицательном направлении, нужно пройти путь длиной $|x|$. Конец этого пути и будет искомой точкой $M(x)$. Число x — координата точки M.

А как решается обратная задача, как найти координату x заданной точки M на числовой прямой? Надо найти длину отрезка OM и взять ее со знаком «+» или «−» в зависимости от того, с какой стороны от точки O расположена на прямой точка M.

Но в реальной жизни двигаться приходится не только по прямой. Довольно часто рассматривается движение по окружности. Вот конкретный пример. Будем считать беговую дорожку стадиона

окружностью (на самом деле это, конечно, не окружность, но вспомните, как обычно говорят спортивные комментаторы: «бегун пробежал круг», «до финиша осталось пробежать полкруга» и т.д.), и пусть ее длина равна 400 м. Отмечаем старт — точку A (рис. 5). Бегун из точки A движется по окружности против часовой стрелки. Где он будет через 200 м? через 400 м? через 800 м? через 1500 м? А где провести финишную черту, если он бежит марафонскую дистанцию 42 км 195 м?

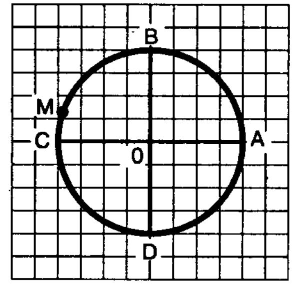


Рис. 5

Через 200 м он будет находиться в точке C, диаметрально противоположной точке A (200 м — это длина половины беговой дорожки, т.е. длина половины окружности). Пробежав 400 м («один круг»), он вернется в точку A. Пробежав 800 м («два круга»), он вновь окажется в точке A. А что такое 1500 м? Это «три круга» (1200 м) плюс еще 300 м, т.е. $\frac{3}{4}$ беговой дорожки — финиш этой дистанции будет в точке D.

Нам осталось разобраться с «марафоном». Пробежав 105 кругов, спортсмен преодолеет путь $105 \cdot 400 = 42\,000$ м, т.е. 42 км. До финиша остается 195 м, это на 5 м меньше половины длины окружности. Значит, финиш марафонской дистанции будет в точке M, расположенной около точки C.

Замечание. Вы, разумеется, понимаете условность последнего примера. Марафонскую дистанцию по кругу стадиона никто не бегает, максимальная дистанция для стайеров на стадионе составляет 10 000 м, т.е. 25 кругов.

По беговой дорожке стадиона можно пробежать или пройти путь любой длины. Значит, любому положительному числу соответствует какая-то точка — «финиш дистанции». Более того, и любому отрицательному числу можно поставить в соответствие точку беговой дорожки стадиона — просто спортсмен должен бежать в противоположном направлении (т.е. стартовать из A не в направлении против, а в направлении по часовой стрелке). Тогда беговую дорожку стадиона можно рассматривать как *числовую окружность*.

В принципе любую окружность можно рассматривать как числовую, но удобнее всего использовать для этой цели единичную окружность – окружность радиусом 1. Это будет наша «беговая дорожка», ее длина равна 2π, что составляет примерно 6,28.

Определение. Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка A — правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:

1) Если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длины t. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

2) Если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длины $|t|$. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

3) Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A; $A = A(0)$.

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть **числовой окружностью**.

Пример 1. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу: $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{7\pi}{2}$, 9π, $-\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Так как первые шесть из заданных семи чисел положительны, то для отыскания соответствующих им точек окружности нужно пройти по окружности путь заданной длины, двигаясь из точки А в положительном направлении. Учтем при этом, что длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{\pi}{2}$.

Имеем (рис. 1): $AB = \frac{\pi}{2}$, значит, числу $\frac{\pi}{2}$ соответствует точка B; $B = B\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Далее, $AC = \pi$, значит, числу π соответствует точка C, т.е. $C = C(\pi)$; $AD = \frac{3\pi}{2}$, значит, числу $\frac{3\pi}{2}$ соответствует точка D, т.е. $D = D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Числу 2π соответствует точка A, так как, пройдя по окружности путь длиной 2π, т.е. ровно одну окружность, мы попадем в начальную точку A; итак, $A = A(2\pi)$.

Что такое $\frac{7\pi}{2}$? Это $2\pi + \frac{3\pi}{2}$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно пройти целую окружность (путь длиной 2π) и дополнительно путь длиной $\frac{3\pi}{2}$, который закончится в точке D. Итак, $D = D\left(\frac{7\pi}{2}\right)$.

Что такое 9π? Это $4 \cdot 2\pi + \pi$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно четыре раза описать целую окружность (путь длиной $4 \cdot 2\pi$) и дополнительно еще путь длиной π, который закончится в точке C. Итак, $C = C(9\pi)$.

Осталось найти на числовой окружности точку, соответствующую заданному отрицательному числу $-\frac{3\pi}{2}$. Для этого нужно, отправившись из точки A, пройти по окружности в отрицательном направлении (напомним, по часовой стрелке) путь длиной $\frac{3\pi}{2}$. Этот путь завершится в точке B, т.е. $B\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Замечание. При работе с числовой прямой обычно уславливаются, ради краткости, не говорить «точка прямой, соответствующая числу x», а говорить «точка x». Точно такой же договоренности будем придерживаться и при работе с числовой окружностью: «точка t» — это значит, что речь идет о точке окружности, которая соответствует числу t.

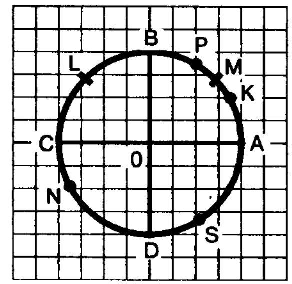


Рис. 6

Пример 2. Найти на числовой окружности точки $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Разделив первую четверть AB на три равные части точками K и P (рис. 6), получим $K = K\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $P = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Разделив дугу AB пополам точкой M, получим $M = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Обратите внимание: этот пример фактически уже решен в § 1 (см. пример 2).

Пример 3. Найти на числовой окружности точки $\frac{-5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Решение. Построения будем делать, используя рис. 6. Отложив дугу AM длиной $\frac{\pi}{4}$ от точки A пять раз в отрицательном направлении, получим точку L — середину дуги BC. Итак, $L = L\left(\frac{-5\pi}{4}\right)$.

Отложив дугу AK длиной $\frac{\pi}{6}$ от точки A семь раз в положительном направлении, попадем в точку N, которая принадлежит третьей четверти — дуге CD, причем $CN = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги CD). Итак, $N = N\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

Отложив дугу AK (ее длина равна $\frac{\pi}{6}$) от точки A десять раз в положительном направлении, попадем в точку S, которая принадлежит четвертой четверти — дуге DA, причем $DS = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги DA). Итак, $S = S\left(\frac{10\pi}{6}\right) = S\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

Особенно часто приходится искать на числовой окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ и кратным им, т.е. $\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{9\pi}{2}$ и т.д. Поэтому нам очень пригодятся два макета числовой окружности.

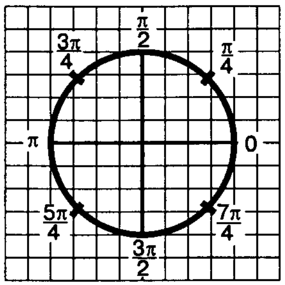


Рис. 7

ПЕРВЫЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на две равные части и около каждой из имеющихся восьми точек записаны их «имена» (рис. 7).

ВТОРОЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на три равные части и около каждой из имеющихся двенадцати точек записаны их «имена» (рис. 8).

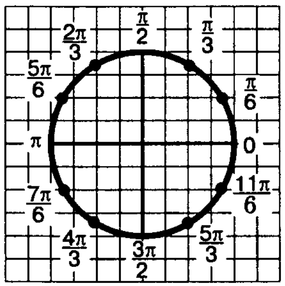


Рис. 8

Учтите, что и на том, и на другом макете мы могли бы заданным точкам присвоить другие «имена». Так, числу $-\frac{\pi}{4}$ соответствует середина четвертой четверти. Этой точке на первом макете присвоено имя $\frac{7\pi}{4}$, но, как видите, мы могли присвоить ей и имя $-\frac{\pi}{4}$. Вообще, если двигаться по первому макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже восьми точек соответственно $0, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\pi, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{4}$. Аналогично, если двигаться по второму макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже двенадцати точек соответственно $0, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \ldots, -\frac{11\pi}{6}$.

Пример 4. Найти на числовой окружности точки, соответствующие числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, –7.

Решение. Точки, соответствующие числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, — это точки $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ на рис. 4 (см. конец предыдущего параграфа). А вот о точке –7 поговорим подробнее.

Нам нужно, отправляясь из точки A и двигаясь в отрицательном направлении (по часовой стрелке), пройти по окружности путь длиной 7. Если пройти одну окружность, то получим (приближенно) 6,28, значит, нужно еще пройти (в том же направлении) путь длиной 0,72. Что же это за дуга? Она немного меньше половины четверти окружности, т.е. ее длина меньше числа $\frac{\pi}{4}$, потому что $\pi \approx 3{,}14$, $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$; ясно, что $0{,}72 < 0{,}785$. Точка $M = M(-7)$ отмечена на рис. 9 (мы немного не дошли до середины четвертой четверти).

Итак, на числовой окружности, как и на числовой прямой, каждому действительному числу соответствует одна точка (только, разумеется, на прямой ее найти легче, чем на окружности). Для прямой верно и обратное: каждая точка соответствует единственному числу. Для числовой окружности такое утверждение неверно; выше мы неоднократно убеждались в этом.

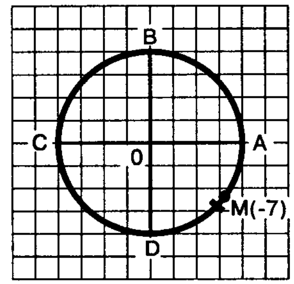


Рис. 9

Для числовой окружности справедливо следующее утверждение.

Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то она соответствует и любому числу вида $t + 2\pi k$, где k — любое целое число ($k \in Z$).

В самом деле, 2π — длина числовой (единичной) окружности, а целое число $|k|$ можно рассматривать как количество полных обходов окружности в ту или другую сторону. Например, если $k = 3$, то это значит, что мы делаем три обхода окружности в положительном направлении; если $k = -7$, то это значит, что мы делаем семь $(|k| = |-7| = 7)$ обходов окружности в отрицательном направлении. Но если мы находимся в точке $M(t)$, то, выполнив еще k полных обходов окружности, мы снова окажемся в точке M. Итак,

$$\boxed{M(t) = M(t + 2\pi k).}$$

На двух макетах (рис. 7, 8) указаны лишь главные имена точек — числа, принадлежащие отрезку $[0, 2\pi]$, т.е. числа, возникающие при первом обходе окружности в положительном направлении. На самом деле, у точки $\frac{\pi}{4}$ бесконечно много имен: $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in Z$; у точки $\frac{5\pi}{6}$ тоже бесконечно много имен: $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$ и т.д.

Число k иногда называют *параметром*. Впрочем, параметр можно обозначить и другой буквой, например, n и m.

Замечание. Условимся в дальнейшем не писать каждый раз: $k \in Z$ или $n \in Z$ (но, естественно, мы все время будем это подразумевать).

Пример 5. Найти на числовой окружности точку: а) $\frac{21\pi}{4}$; б) $-\frac{37\pi}{6}$.

Решение. а) Имеем:

$$\frac{21\pi}{4} = \frac{21}{4}\pi = \left(4 + \frac{5}{4}\right) \cdot \pi = 4\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot 2.$$

Значит, числу $\frac{21\pi}{4}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{4}$ — середина третьей четверти (см. первый макет — рис. 7).

б) Имеем:

$$-\frac{37\pi}{6} = -\frac{37}{6}\pi = -\left(6 + \frac{1}{6}\right) \cdot \pi = -6\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot (-3).$$

Значит, числу $-\frac{37\pi}{6}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $-\frac{\pi}{6}$, — это точка с именем $\frac{11\pi}{6}$ на втором макете (рис. 8). ◀

Пример 6. Какой четверти числовой окружности принадлежит точка 20?

Решение. Представим число 20 в виде $t + 2\pi k$ и подберем значение k так, чтобы число t попало в отрезок $[0, 2\pi]$ (или $[-2\pi, 0]$). Тогда мы сможем определить, какой четверти принадлежит точка t, а с ней и точка 20 (поскольку на числовой окружности t и $t + 2\pi k = 20$ — одна и та же точка).

Сделаем прикидку: $2\pi \approx 6{,}28$, значит, $2\pi k \approx 6{,}28k$; надо подобрать целое число k так, чтобы число $6{,}28k$ оказалось как можно ближе к числу 20. Очевидно, что $k = 3$. Имеем $6{,}28 \cdot 3 = 18{,}84$. Значит, $20 = 1{,}16 + 6{,}28 \cdot 3 \approx 1{,}16 + 2\pi \cdot 3$. Точка 1,16 находится в первой четверти, значит, и точка 20 принадлежит первой четверти. ◀

Вы знаете, что промежутки на числовой прямой можно записывать аналитически с помощью двойных неравенств. Так, аналитической записью отрезка $[3, 5]$ (рис. 10) служит двойное неравенство $3 \leqslant x \leqslant 5$; аналитической записью интервала $(-4, 0)$ (рис. 10) служит двойное неравенство $-4 < x < 0$. На окружности роль отрезков или интервалов играют дуги. Их тоже можно записывать аналитически с помощью двойных неравенств, но при этом, естественно, следует учитывать, что, в отличие от числовой прямой, где каждая точка имеет одно «числовое имя», на числовой окружности у точки бесконечно много имен. В следующем примере мы покажем, как составляется аналитическая запись дуги числовой окружности.

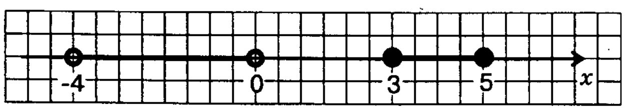


Рис. 10

Пример 7. Найти все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие дугам:

а) AB; б) BA; в) BD; г) DB; д) KM; е) MK (здесь K и M соответственно середина первой и третьей четвертей числовой окружности).

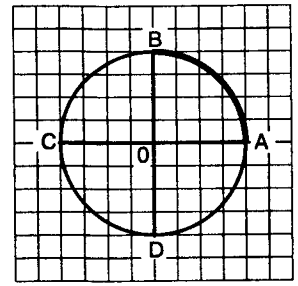


Рис. 11

Решение. а) Дуга AB — это дуга с началом в точке A и концом в точке B при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 11). Главные «имена» точек A и B соответственно $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$. Значит, для точек t дуги AB имеем:

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Как мы видели ранее, точка A соответствует не только числу 0, но и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т.е. $2\pi k$; точка B соответствует не только числу $\frac{\pi}{2}$, но и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Значит, если мы хотим охарактеризовать все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки дуги AB, то придется использовать такую запись:

$$2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \qquad (2)$$

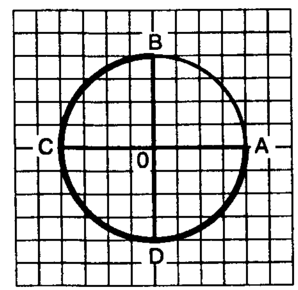


Рис. 12

Для удобства будем пользоваться следующей (не общепринятой) терминологией: неравенство (1) — *ядро аналитической записи дуги AB*, неравенство (2) — *аналитическая запись дуги AB*.

б) Дуга BA — это дуга с началом в точке B и концом в точке A при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 12). Главные «имена» точек B и A в этом случае — соответственно $\frac{\pi}{2}$ и 2π. Значит, ядром аналитической записи дуги BA является неравенство

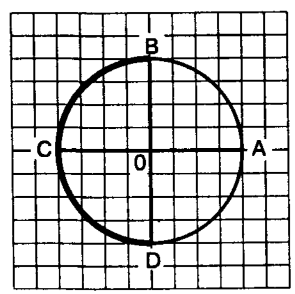


Рис. 13

$$\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

а сама аналитическая запись дуги BA имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant 2\pi + 2\pi k.$$

в) Дуга BD — это дуга с началом в точке B и концом в точке D при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 13). Главные «имена» точек B и D — соответственно $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$. Значит, ядром аналитической записи дуги BD является неравенство

$$\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2},$$

а сама аналитическая запись дуги BD имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$$

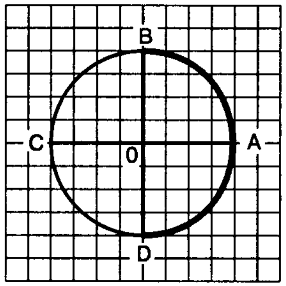


Рис. 14

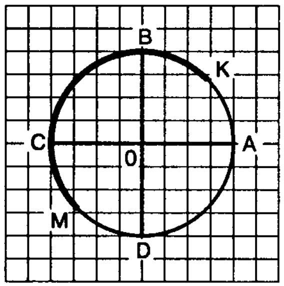


Рис. 15

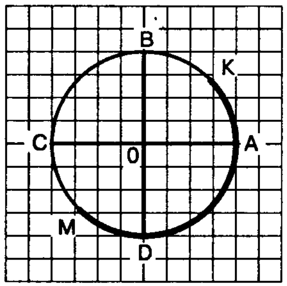


Рис. 16

г) Дуга DB — это дуга с началом в точке D и концом в точке B при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 14). Главные «имена» точек D и B в этом случае — соответственно $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ (а не $\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, как в предыдущем случае; при записи ядра нужно следить за тем, чтобы число в левой части неравенства было меньше числа в правой части неравенства). Значит, ядром аналитической записи дуги DB является неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

а сама аналитическая запись дуги DB имеет вид:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

д) Дуга KM — это дуга с началом в точке K и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 15).

Главные «имена» точек K и M — соответственно $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги KM является неравенство

$$\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги KM имеет вид:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

е) Дуга MK — это дуга с началом в точке M и концом в точке K при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 16). Главные «имена» точек M и K в этом случае — соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MK является неравенство

$$-\frac{3\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги MK имеет вид:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

§ 3. ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Расположим числовую окружность в декартовой прямоугольной системе координат $x0y$ так, как показано на рис. 17: центр окружности совмещен с началом координат, а ее радиус принимается за масштабный отрезок. Начальная точка A числовой окружности совмещена с точкой $(1; 0)$ на оси x. При этом $B = B(0; 1)$, $C = C(-1; 0)$, $D = D(0; -1)$. Каждая точка числовой окружности имеет в системе $x0y$ свои координаты, причем (см. рис. 17) для точек:

первой четверти $x > 0$, $y > 0$;
второй четверти $x < 0$, $y > 0$;
третьей четверти $x < 0$, $y < 0$;
четвертой четверти $x > 0$, $y < 0$.

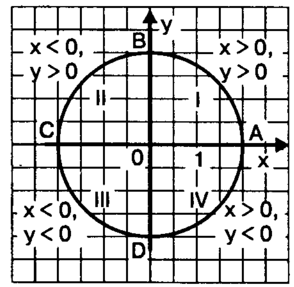


Рис. 17

Для любой точки $M(x; y)$ числовой окружности выполняются неравенства:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1; \quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Нетрудно составить уравнение числовой окружности. Для этого заметим, во-первых, что центром окружности служит начало координат, а уравнение окружности радиусом R с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$; во-вторых, $R = 1$, значит, уравнение числовой окружности имеет вид:

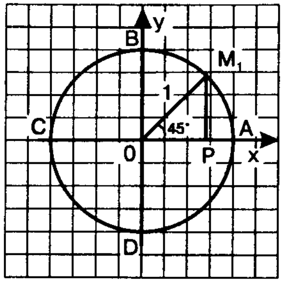


Рис. 18

$$x^2+y^2=1.$$

Нам важно научиться отыскивать координаты точек числовой окружности, и прежде всего тех, которые представлены на двух макетах (см. рис. 7, 8). Начнем с точек первого макета: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

Точка $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ — середина первой четверти. Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1m на прямую OA и рассмотрим треугольник OM_1P (рис. 18). Так как дуга AM_1 составляет половину дуги AB, то $\angle AOM_1 = 45°$. Значит, OM_1P — равнобедренный прямоугольный треугольник, где $OP=M_1P$, т.е. у точки M_1 абсцисса и ордината равны: $x=y$. Кроме того, координаты точки $M_1(x;\, y)$ удовлетворяют уравнению числовой окружности $x^2+y^2=1$. Таким образом, для отыскания координат точки M_1 нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x=y, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Подставив x вместо y во второе уравнение системы, получим:

$x^2+x^2=1$, т.е. $2x^2=1$, $x^2=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (мы учли, что абсцисса точки M_1 положительна). А так как $y=x$, то и $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак,

$$M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Проанализируем полученное равенство. Что означает запись $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Она означает, что точка M_1 числовой окружности соответствует числу $\frac{\pi}{4}$. А запись $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ означает, что точка M_1 имеет соответствующие координаты в прямоугольной системе координат $x0y$. И в дальнейшем будем придерживаться подобного способа записи: если написано $M(t)$, то это значит, что точка M числовой окружности соответствует числу t; если написано $M(x;\, y)$, то это значит, что числа x и y являются соответственно абсциссой и ординатой точки M. Таким образом,

$(x;\, y)$ — декартовы координаты точки M, а t — «криволинейная» координата точки M на числовой окружности.

Рассмотрим точку $M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ — середину второй четверти. Рассуждая, как и выше, получим для модуля абсциссы и для модуля ординаты этой точки те же значения $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$, что и для точки M_1. Помня, что во второй четверти $x<0$, а $y>0$, делаем вывод:

$$M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)=M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ — середины третьей четверти — имеем:

$$M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)=M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ — середины четвертой четверти — имеем:

$$M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)=M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Сведем полученные результаты в таблицу.

Точка окружности	0	$\frac{\pi}{4}$ (M_1)	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$ (M_2)	π	$\frac{5\pi}{4}$ (M_3)	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$ (M_4)	2π
Абсцисса x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Ордината y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Теперь найдем координаты точек, изображенных на втором макете (см. рис. 8). Возьмем точку $M_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$, опустим из нее перпендикуляр M_1P на прямую OA и рассмотрим прямоугольный треугольник OM_1P (рис. 19). Гипотенузой этого треугольника является отрезок OM_1, причем $OM_1=1$. Угол M_1OP равен 30°, поскольку дуга AM_1 составляет треть дуги AB, а дуга AB содержит 90°. Из геометрии известно, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против

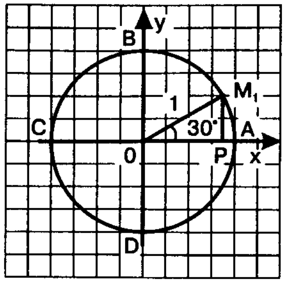


Рис. 19

угла 30°, равен половине гипотенузы. Значит, $M_1P = \frac{1}{2}$ — это ордината точки M_1, т.е.

$$y = \frac{1}{2}.$$

По теореме Пифагора

$$OP^2 = OM_1^{\ 2} - M_1P^2.$$

Значит,

$$x^2 = OP^2 = OM_1^{\ 2} - M_1P^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

т.е.

$$x^2 = \frac{3}{4}, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(мы учли, что точка $\frac{\pi}{6}$ принадлежит первой четверти, а потому обе ее координаты — положительные числа).

Итак,

$$M_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

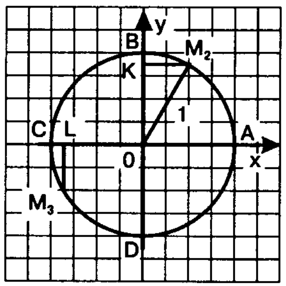


Рис. 20

С точкой $M_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ связан такой же прямоугольный треугольник, как и с точкой M_1, только ориентированный по-другому (рис. 20). Получаем: $M_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Те же самые значения (с точностью до знака) будут координатами остальных точек второго макета, исключая, разумеется, точки $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$, $D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, причем по чертежу нетрудно определить, какая координата равна по модулю числу $\frac{1}{2}$, а какая — числу $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Возьмем для примера точку $M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ (см. рис. 20). Будем рассуждать так. Опустим перпендикуляр M_3L на ось x. Во-первых, $M_3L < LO$, т.е. $|y| < |x|$. Значит, из двух чисел $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в качестве ординаты точки M_3 нужно взять меньшее, т.е. $\frac{1}{2}$, а в качестве абсциссы — большее, т.е. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Во-вторых, $\frac{7\pi}{6}$ — точка третьей четверти, а потому $x < 0$ и $y < 0$.

Окончательно получаем:

$$M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = M_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

А теперь возьмите точку $M_4\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ и попробуйте, проведя аналогичные рассуждения, найти ее координаты. Мы же пока приведем итоговую таблицу, с помощью которой вы сможете проверить правильность своего вывода.

Точка окружности	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Абсцисса x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ордината y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Теперь проверьте себя по таблице: $M_4\left(\frac{5\pi}{3}\right) = M_4\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пример 1. Найти координаты точек числовой окружности: а) $P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right)$; б) $P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right)$; в) $P_3(45\pi)$; г) $P_4(-18\pi)$.

Решение. Во всех четырех случаях воспользуемся утверждением, полученным в § 2: числам t и $t + 2\pi k\ (k \in Z)$ соответствует одна и та же точка числовой окружности.

а) Имеем:

$$\frac{45\pi}{4} = \frac{45}{4} \cdot \pi = \left(10 + \frac{5}{4}\right) \cdot \pi = 10\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot 5.$$

Значит, числу $\frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$ (см. первый макет — рис. 7 и таблицу на с. 19). Для точки $\frac{5\pi}{4}$ имеем $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right) = P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

б) Имеем:

$$-\frac{37\pi}{3} = -\frac{37}{3} \cdot \pi = -\left(12 + \frac{1}{3}\right)\pi = -12\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot (-6).$$

Значит, числу $-\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $-\frac{\pi}{3}$. А числу $-\frac{\pi}{3}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{3}$ (см. второй макет — рис. 8 и таблицу на с. 21). Для точки $\frac{5\pi}{3}$ имеем $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом,

$$P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right)=P_2\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

в) $45\pi=44\pi+\pi=\pi+2\pi\cdot 22$. Значит, числу 45π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π, — это точка $C\,(-1;\ 0)$. Итак,

$$P_3(45\pi)=P_3(-1;\ 0).$$

г) $-18\pi=0+2\pi\cdot(-9)$. Значит, числу -18π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0, — это точка $A(1;\ 0)$. Итак,

$$P_4(-18\pi)=P_4(1;\ 0).$$

◄■

Пример 2. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y=\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y=\frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (рис. 21). Точка M соответствует числу $\frac{\pi}{6}$ (см. второй макет — рис. 8), а значит, и любому числу вида $\frac{\pi}{6}+2\pi k$. Точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{6}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. Получили, как часто говорят в таких случаях, *две серии значений:* $\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$.

Ответ: $t=\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $t=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$.

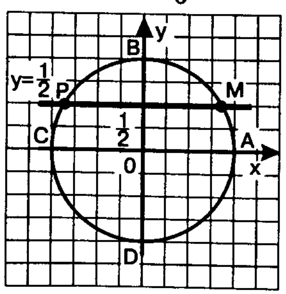


Рис. 21

Пример 3. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (рис. 22). Точка M соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$ (см. первый макет — рис. 7), а значит, и любому числу вида

$\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$.

Ответ: $t=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; $t=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$.

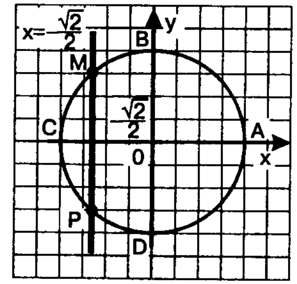


Рис. 22

Замечание. В примере 3 можно было рассуждать немного по-другому: точка P соответствует числу $-\frac{3\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$. Получим две серии значений: $t=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ (для точки M) и $t=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ (для точки P). Чем это решение лучше по сравнению с приведенной записью ответа к примеру 3? Только тем, что серии значений можно охватить одной записью: $t=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$.

Пример 4. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y>\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y=\frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (см. рис. 21). Неравенству $y>\frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP, т.е. дуги без концов M и P. Дуга MP — это дуга с началом в точке M и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные «имена» точек M и P — соответственно $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MP является неравенство

$$\frac{\pi}{6}<t<\frac{5\pi}{6},$$

а сама аналитическая запись дуги MP имеет вид:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<t<\frac{5\pi}{6}+2\pi k.$$

◄■

Пример 5. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y<\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y=\frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (см. рис. 21). Неравенству $y<\frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные «имена» точек

P и M в этом случае — соответственно $-\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$. Значит, ядром аналитической записи дуги PM является неравенство

$$-\frac{7\pi}{6} < t < \frac{\pi}{6},$$

а сама аналитическая запись дуги PM имеет вид:

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

Пример 6. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (см. рис. 22). Неравенству $x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки открытой дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные «имена» точек P и M в этом случае — соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги PM является неравенство $-\frac{3\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$,

а сама аналитическая запись дуги PM имеет вид:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

Пример 7. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (рис. 22). Неравенству $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP. Дуга MP — это дуга с началом в точке M и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные «имена» точек M и P в этом случае — соответственно $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MP является неравенство $\frac{3\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{4}$, а сама аналитическая запись дуги MP имеет вид:

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

§ 4. СИНУС И КОСИНУС

Определение. Если точка M числовой единичной окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют **косинусом числа** t и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют **синусом числа** t и обозначают $\sin t$.

Итак (см. рис. 23),

$$\boxed{\begin{gathered}\text{если } M(t) = M(x, y)\text{, то}\\ x = \cos t,\\ y = \sin t.\end{gathered}}$$

Отсюда следует, что

$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1.$$

Вооружившись определением, вернемся к § 3 и как бы заново перечитаем его.

Мы отметили в § 3, что каждая точка числовой окружности имеет в системе xOy свои координаты, причем для точек:

первой четверти $x > 0$, $y > 0$;
второй четверти $x < 0$, $y > 0$;
третьей четверти $x < 0$, $y < 0$;
четвертой четверти $x > 0$, $y < 0$ (см. рис. 17).

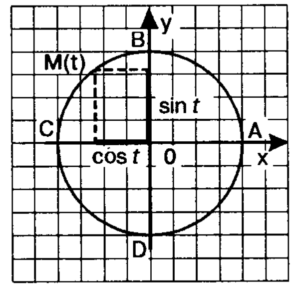


Рис. 23

Это позволяет нам составить таблицу знаков синуса и косинуса по четвертям окружности (табл. 1).

Таблица 1

Четверть окружности	1-я	2-я	3-я	4-я
cos t	+	−	−	+
sin t	+	+	−	−

Уравнение числовой окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$. Тем самым фактически получено важное равенство, связывающее $\sin t$ и $\cos t$,

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1.}$$

Мы говорили в § 3, что нам важно научиться отыскивать координаты точек числовой окружности, и прежде всего тех, которые представлены на первом и втором макетах (рис. 7 и 8). Необходимость этого стала предельно ясной: опираясь на таблицы из § 3, мы без труда составим соответствующие таблицы для значений $\cos t$ и $\sin t$ (табл. 2 и 3):

Таблица 2

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Таблица 3

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Пример 1. Вычислить $\cos t$ и $\sin t$, если:

а) $t=\frac{45\pi}{4}$; б) $t=-\frac{37\pi}{3}$; в) $t=45\pi$; г) $t=-18\pi$.

Решение. а) При решении примера 1а из § 3 мы установили, что числу $t=\frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$. Для точки $t=\frac{5\pi}{4}$ имеем (см. табл. 2) $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$\cos\frac{45\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sin\frac{45\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) При решении примера 1б из § 3 мы установили, что числу $t=-\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Для точки $t=\frac{5\pi}{3}$ имеем (см. табл. 3) $\cos t=\frac{1}{2}$, $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит,

$$\cos\left(-\frac{37\pi}{3}\right)=\frac{1}{2};\quad \sin\left(-\frac{37\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

в) При решении примера 1в из § 3 мы установили, что числу $t=45\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π. Для точки $t=\pi$ имеем (см. табл. 2) $\cos t=-1$, $\sin t=0$. Значит,

$$\cos 45\pi=-1;\quad \sin 45\pi=0.$$

г) В примере 1г из § 3 мы установили, что числу $t=-18\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0. Для точки $t=0$ имеем (см. табл. 2) $\cos t=1$, $\sin t=0$. Значит,

$$\cos(-18\pi)=1;\quad \sin(-18\pi)=0.$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin t=\frac{1}{2}$.

Решение. Учтем, что $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 2 из § 3.

Ответ: $t=\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $t=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Учтем, что $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 3 из § 3.

Ответ: $t=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; $t=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$ (или $t=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$).

Пример 4. Решить неравенство $\sin t>\frac{1}{2}$.

Решение. Учтем, что $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $y>\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 4 из § 3.

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi k<t<\frac{5\pi}{6}+2\pi t$.

Пример 5. Решить неравенство $\cos t>-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Учтем, что $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 6 из § 3.

Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

Пример 6. Решить уравнения:

а) $\sin t = 0$; б) $\sin t = 1$; в) $\sin t = -1$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой 0 и записать, каким числам t они соответствуют. Ординату 0 имеют точки A и C (см. рис. 23), они соответствуют числам 0 (точка A), π (точка C), 2π (точка A), 3π (точка C), $-\pi$ (точка C), -2π (точка A) и т.д. Обобщая, это можно записать так: точки A и C соответствуют числам вида πk.

Итак, решение уравнения $\sin t = 0$ имеет вид:

$$t = \pi k.$$

б) Ординату 1 имеет точка B числовой окружности (см. рис. 23), она соответствует числу $\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Итак, решение уравнения $\sin t = 1$ имеет вид:

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

в) Ординату -1 имеет точка D числовой окружности (см. рис. 23), она соответствует числу $-\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Итак, решение уравнения $\sin t = -1$ имеет вид:

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ: а) $t = \pi k$; б) $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; в) $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 7. Решить уравнения:

а) $\cos t = 0$; б) $\cos t = 1$; в) $\cos t = -1$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой 0 и записать, каким числам t они соответствуют. Абсциссу 0 имеют точки B и D (см. рис. 23), они соответствуют числам $\frac{\pi}{2}$ (точка B), $\frac{3\pi}{2}$ (точка D), $\frac{5\pi}{2}$ (точка B), $\frac{7\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{3\pi}{2}$ (точка B) и т.д. Обобщая, это можно записать так: точки B и D соответствуют числам вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$.

Итак, решение уравнения $\cos t = 0$ имеет вид: $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

б) Абсциссу 1 имеет точка A числовой окружности (см. рис. 23), она соответствует числу 0, а значит, и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т.е. $2\pi k$.

Итак, решение уравнения $\cos t = 1$ имеет вид: $t = 2\pi k$.

в) Абсциссу -1 имеет точка C числовой окружности (см. рис. 23), она соответствует числу π, а значит, и всем числам вида $\pi + 2\pi k$.

Итак, решение уравнения $\cos t = -1$ имеет вид: $t = \pi + 2\pi k$.

Ответ: а) $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$; б) $t = 2\pi k$; в) $t = \pi + 2\pi k$.

Замечание. Напомним еще раз о нашей договоренности: параметр k (или n) принимает любые целочисленные значения ($k \in Z$), мы это постоянно подразумеваем, но ради краткости не записываем.

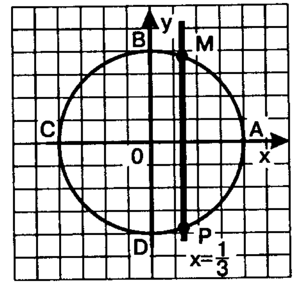


Рис. 24

Пример 8. Решить уравнения:

а) $\cos t = \frac{1}{3}$; б) $\sin t = -0{,}4$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $\frac{1}{3}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Абсциссу $\frac{1}{3}$ имеют точки M и P (рис. 24), а вот каким числам t они соответствуют, мы сказать пока не можем. К этой проблеме вернемся в гл. 2.

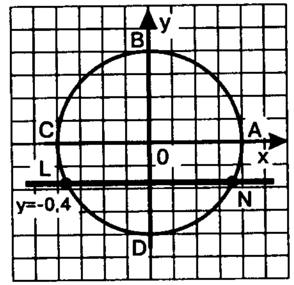


Рис. 25

б) Нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $-0{,}4$ и записать, каким числам t они соответствуют. Ординату $-0{,}4$ имеют точки L и N (рис. 25), а вот каким числам t они соответствуют, мы сказать пока не можем. К этой проблеме также вернемся в гл. 2.

Пример 9. Какое из двух чисел больше, $\sin 1$ или $\sin 2$?

Решение. Вопрос можно переформулировать так: на числовой окружности отмечены точки 1 и 2. У какой из них ордината больше? В такой геометрической интерпретации задача имеет довольно симпатичное решение. Отметим на числовой окружности точки 1 и 2 (рис. 26). Точка 1 удалена от точки $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (по окружности) примерно на 0,57 (вы помните, что $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$); точка 2 удалена от точки $\frac{\pi}{2}$ (по окружности) примерно на 0,43 $\left(2 - \frac{\pi}{2} \approx 2 - 1{,}57 = 0{,}43\right)$. Значит, точка 2 находится ближе к точке $\frac{\pi}{2}$, чем точка 1, а потому ее ордината больше.

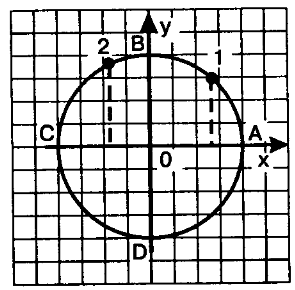


Рис. 26

Ответ: $\sin 1 < \sin 2$.

Завершая в этом параграфе разговор о синусе и косинусе, получим некоторые важные формулы.

1. *Для любого значения t справедливы равенства*

$$\mathbf{\sin(-t) = -\sin t,}\quad \mathbf{\cos(-t) = \cos t.}$$

Например, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

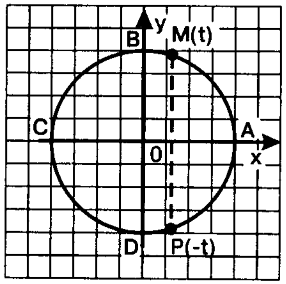


Рис. 27

Доказательство. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $-t$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно горизонтального диаметра окружности (рис. 27), т.е. симметричная точке M относительно оси абсцисс. У таких точек одна и та же абсцисса, а это значит, что $\cos(-t) = \cos t$. У таких точек равные по модулю, но противоположные по знаку ординаты. А это значит, что $\sin(-t) = -\sin t$. ●

2. *Для любого значения t справедливы равенства*

$$\mathbf{\sin(t+2\pi k) = \sin t,}\quad \mathbf{\cos(t+2\pi k) = \cos t.}$$

Это очевидно, поскольку числам t и $t+2\pi k$ соответствует одна и та же точка числовой окружности (чем мы не раз уже пользовались).

3. *Для любого значения t справедливы равенства*

$$\mathbf{\sin(t+\pi) = -\sin t,}\quad \mathbf{\cos(t+\pi) = -\cos t.}$$

Например,

$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

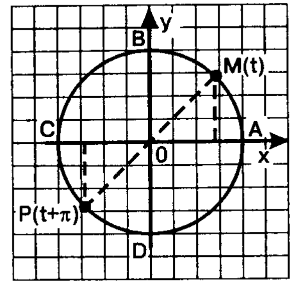


Рис. 28

Доказательство. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $t+\pi$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно центра окружности — начала координат (рис. 28). У таких точек и абсциссы, и ординаты равны по модулю, но противоположны по знаку. Это значит, что

$$\cos(t+\pi) = -\cos t,$$
$$\sin(t+\pi) = -\sin t.$$ ●

Пример 10. Доказать тождества:

а) $\sin(\pi-t) = \sin t$; б) $\cos(\pi-t) = -\cos t$;

в) $\sin(2\pi-t) = -\sin t$; г) $\cos(2\pi-t) = \cos t$.

Решение. а) Запишем $\sin(\pi-t)$ в виде $\sin(-t+\pi)$. Применив к выражению $\sin(-t+\pi)$ свойство 3, получим: $\sin(-t+\pi) = -\sin(-t)$.

По свойству 1 $\sin(-t) = -\sin t$. Значит, $-\sin(-t) = \sin t$, а потому $\sin(-t+\pi) = \sin t$.

Итак, $\sin(\pi-t) = \sin t$, что и требовалось доказать.

б) Запишем $\cos(\pi-t)$ в виде $\cos(-t+\pi)$. Применив к выражению $\cos(-t+\pi)$ свойство 3, получим: $\cos(-t+\pi) = -\cos(-t)$.

По свойству 1 $\cos(-t) = \cos t$. Значит, $\cos(-t+\pi) = -\cos t$, что и требовалось доказать.

в) $\sin(2\pi-t) = \sin(-t+2\pi) = \sin(-t) = -\sin t$.

Итак, $\sin(2\pi-t) = -\sin t$, что и требовалось доказать.

г) $\cos(2\pi-t) = \cos(-t+2\pi) = \cos(-t) = \cos t$.

Итак, $\cos(2\pi-t) = \cos t$, что и требовалось доказать.

4. *Для любого значения t справедливы равенства*

$$\mathbf{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos t,}\quad \mathbf{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin t.}$$

Доказательство. Пусть числу t соответствует точка M числовой окружности, а числу $t+\frac{\pi}{2}$ — точка P (рис. 29). Сразу обратим внимание на важное обстоятельство: если точка M находится в первой четверти, то точка P — во второй; если точка M находится во второй четверти, то точка P — в третьей и т.д. Дуги AM и BP равны, соответственно равны и прямоугольные треугольники OKM и OLP. Значит, $OK = OL$, $MK = PL$. Из этих равенств и учитывая указанное

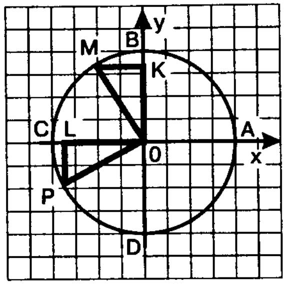


Рис. 29

выше обстоятельство о расположении точек M и P в четвертях числовой окружности, делаем два вывода:

1) ордината точки P и по модулю, и по знаку совпадает с абсциссой точки M. Это значит, что

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t;$$

2) абсцисса точки P по модулю равна ординате точки M, но отличается от нее знаком. Это значит, что

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t. \quad \bullet$$

Пример 11. Доказать тождества:

$$\text{а) } \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t; \quad \text{б) } \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t.$$

Решение. Доказательства тождеств аналогичны доказательствам тождеств из примера 10: используются свойства 1 и 4. Мы приводим оба доказательства без комментариев, но советуем вам «озвучить» рассуждения.

$$\text{а) } \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(-t)=\cos t;$$

$$\text{б) } \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(-t)=\sin t.$$

§ 5. ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС

Определение. Отношение синуса числа t к косинусу этого же числа называют **тангенсом числа** t и обозначают $\operatorname{tg} t$. Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют **котангенсом числа** t и обозначают $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}; \quad \operatorname{ctg} t=\frac{\cos t}{\sin t}.$$

Говоря о $\operatorname{tg} t$, подразумевают, что $\cos t \neq 0$, т.е. что $t \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$ (см. пример 7а из § 4), а говоря о $\operatorname{ctg} t$, подразумевают, что $\sin t \neq 0$, т.е. что $t \neq \pi k$ (см. пример 6а из § 4). Поэтому обычно определения $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ записывают так:

$$\boxed{\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}, \text{ где } t \neq \frac{\pi}{2}+\pi k;}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} t=\frac{\cos t}{\sin t}, \text{ где } t \neq \pi k.}$$

Впредь, говоря о $\operatorname{tg} t$ или $\operatorname{ctg} t$, мы будем подразумевать (а иногда и записывать), что аргумент t принимает только допустимые значения: $t \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$ для $\operatorname{tg} t$ и $t \neq \pi k$ для $\operatorname{ctg} t$.

Опираясь на таблицу знаков синуса и косинуса по четвертям числовой окружности, приведенную в § 4, нетрудно составить аналогичную таблицу для тангенса и котангенса:

Четверть	1-я	2-я	3-я	4-я
$\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$	+	−	+	−

Пример 1. Вычислить: а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; в) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$.

Решение. а) Имеем: $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$$

б) Имеем: $\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$ (см. второй макет — рис. 8). Значит, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\frac{1}{2}=-\sqrt{3}$.

в) Имеем: $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$. Значит, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0:1=0$.

г) Имеем: $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. второй макет — рис. 8). Значит, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\frac{1}{2}=-\sqrt{3}$.

Как видите, зная значения синуса и косинуса числа t, нетрудно вычислить соответствующие значения тангенса и котангенса. Тем не менее есть смысл составить таблицу основных значений тангенса и котангенса:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg} t$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Завершая разговор о тангенсе и котангенсе, получим две важные формулы.

1. *Для любого допустимого значения t справедливы равенства*:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}(-t)&=-\operatorname{tg}t\\ \operatorname{ctg}(-t)&=-\operatorname{ctg}t.\end{aligned}}$$

Доказательство. Воспользуемся свойством 1 для косинуса и синуса (§ 4): $\cos(-t)=\cos t$, а $\sin(-t)=-\sin t$. Имеем:

$$\operatorname{tg}(-t)=\frac{\sin(-t)}{\cos(-t)}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\frac{\sin t}{\cos t}=-\operatorname{tg}t;$$

$$\operatorname{ctg}(-t)=\frac{\cos(-t)}{\sin(-t)}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\frac{\cos t}{\sin t}=-\operatorname{ctg}t. \qquad \bullet$$

2. *Для любого допустимого значения t справедливы равенства*:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}(t+\pi)&=\operatorname{tg}t,\\ \operatorname{ctg}(t+\pi)&=\operatorname{ctg}t.\end{aligned}}$$

Доказательство. Воспользуемся свойством 3 для косинуса и синуса (§ 4): $\cos(t+\pi)=-\cos t$, $\sin(t+\pi)=-\sin t$.

Имеем:

$$\operatorname{tg}(t+\pi)=\frac{\sin(t+\pi)}{\cos(t+\pi)}=\frac{-\sin t}{-\cos t}=\frac{\sin t}{\cos t}=\operatorname{tg}t;$$

$$\operatorname{ctg}(t+\pi)=\frac{\cos(t+\pi)}{\sin(t+\pi)}=\frac{-\cos t}{-\sin t}=\frac{\cos t}{\sin t}=\operatorname{ctg}t. \qquad \bullet$$

Выполняются и такие равенства: $\operatorname{tg}(t+2\pi)=\operatorname{tg}t$, $\operatorname{tg}(t-\pi)=\operatorname{tg}t$, $\operatorname{ctg}(t+2\pi)=\operatorname{ctg}t$ и вообще:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}(t+\pi k)&=\operatorname{tg}t,\\ \operatorname{ctg}(t+\pi k)&=\operatorname{ctg}t.\end{aligned}}$$

Пример 2. Вычислить: а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$.

Решение. а) По свойству 1 $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$. Так как $\frac{7\pi}{3}=2\pi+\frac{\pi}{3}$, то $-\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}=-\operatorname{tg}\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

Мы воспользовались свойством 2, а точнее, его обобщением. Итак,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}.$$

б) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1$. Здесь мы также воспользовались свойством 2.

§ 6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Какое бы действительное число t ни взять, ему можно поставить в соответствие однозначно определенное число $\sin t$. Правда, правило соответствия довольно сложное и заключается в следующем.

Чтобы по числу t найти значение $\sin t$, нужно:

1) расположить числовую окружность на координатной плоскости так, чтобы центр окружности совпал с началом координат, а начальная точка A окружности попала в точку $(1; 0)$;

2) на окружности найти точку, соответствующую числу t;

3) найти ординату этой точки.

Эта ордината и есть $\sin t$.

Фактически речь идет о функции $s=\sin t$, где t — любое действительное число. Мы умеем вычислять некоторые значения этой функции (например, $\sin 0=0$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ и т.д.), знаем некоторые ее свойства.

Точно так же мы можем считать, что уже получили некоторые представления еще о трех функциях: $s=\cos t$, $s=\operatorname{tg}t$, $s=\operatorname{ctg}t$. Все эти функции называют *тригонометрическими функциями числового аргумента t*.

Есть целый ряд соотношений, связывающих значения различных тригонометрических функций, некоторые из этих соотношений вы уже знаете:

$$\boxed{\sin^2 t+\cos^2 t=1;}$$

2*

$$\boxed{\mathbf{tg}\ t=\frac{\sin t}{\cos t}\ \text{при}\ t\neq\frac{\pi}{2}+\pi k;}$$

$$\boxed{\mathbf{ctg}\ t=\frac{\cos t}{\sin t}\ \text{при}\ t\neq\pi k.}$$

Из двух последних формул легко получить соотношение, связывающее tg t и ctg t:

$$\boxed{\mathrm{tg}\ t\cdot\mathrm{ctg}\ t=1\ \text{при}\ t\neq\frac{\pi k}{2}.}$$

Пример 1. Упростить выражение: а) $1+\mathrm{tg}^2\,t$; б) $1+\mathrm{ctg}^2\,t$.

Решение. а) Имеем $1+\mathrm{tg}^2\,t=1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{1}{\cos^2 t}$.

б) $1+\mathrm{ctg}^2\,t=1+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}=\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t}=\frac{1}{\sin^2 t}$. ◼

Мы получили еще две важные формулы:

$$\boxed{1+\mathrm{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}\ \text{при}\ t\neq\frac{\pi}{2}+\pi k;}$$

$$\boxed{1+\mathrm{ctg}^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}\ \text{при}\ t\neq\pi k.}$$

Все полученные формулы используются в тех случаях, когда при заданном значении какой-либо тригонометрической функции требуется вычислить значения остальных тригонометрических функций.

Пример 2. Известно, что $\sin t=\frac{3}{5}$ и $0<t<\frac{\pi}{2}$. Найти соответствующие значения cos t, tg t, ctg t.

Решение. Из соотношения $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ находим: $\cos^2 t=1-\sin^2 t$.

По условию $\sin t=\frac{3}{5}$, значит, $\cos^2 t=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$.

Из уравнения $\cos^2 t=\frac{16}{25}$ находим, что $\cos t=\frac{4}{5}$ или $\cos t=-\frac{4}{5}$.

По условию аргумент t принадлежит первой четверти числовой окружности, а в ней $\cos t>0$. Значит, из двух найденных возможных решений выбираем первое: $\cos t=\frac{4}{5}$.

Зная значения $\sin t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения tg t и ctg t:

$$\mathrm{tg}\ t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{3}{5}:\frac{4}{5}=\frac{3}{4};\quad \mathrm{ctg}\ t=\frac{1}{\mathrm{tg}\ t}=\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\cos t=\frac{4}{5}$; $\mathrm{tg}\ t=\frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\ t=\frac{4}{3}$.

Пример 3. Известно, что $\mathrm{tg} t=-\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2}<t<\pi$. Найти значения sin t, cos t, ctg t.

Решение. Воспользуемся соотношением $1+\mathrm{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$. По условию $\mathrm{tg} t=-\frac{5}{12}$, значит, $\frac{1}{\cos^2 t}=1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2=\frac{169}{144}$.

Отсюда находим, что $\cos^2 t=\frac{144}{169}$.

Из последнего уравнения находим, что $\cos t=\frac{12}{13}$ или $\cos t=-\frac{12}{13}$.

По условию аргумент t принадлежит второй четверти числовой окружности, а в ней $\cos t<0$. Значит, из двух указанных выше возможностей выбираем вторую: $\cos t=-\frac{12}{13}$.

Зная значения $\mathrm{tg} t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения sin t и ctg t: $\mathrm{tg}\ t=\frac{\sin t}{\cos t}$, значит,

$$\sin t=\mathrm{tg}\ t\cdot\cos t=\left(-\frac{5}{12}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{5}{13};\quad \mathrm{ctg}\ t=\frac{1}{\mathrm{tg}\ t}=-\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\cos t=-\frac{12}{13}$; $\sin t=\frac{5}{13}$; $\mathrm{ctg}\ t=-\frac{12}{5}$.

§ 7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛОВОГО АРГУМЕНТА

Термины «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс», которые мы ввели выше, на самом деле уже были вам знакомы, правда, использовали вы их до сих пор в другом смысле: в геометрии и физике вы рассматривали синус, косинус, тангенс и котангенс угла, (а не числа, как это было в предыдущих параграфах).

Из геометрии известно, что синус (косинус) острого угла — это отношение катета прямоугольного треугольника к его гипотенузе, а тангенс (котангенс) угла — это отношение катетов прямоугольного треугольника. Совсем другой подход к понятиям синуса, косинуса, тангенса и котангенса развивали мы в предыдущих параграфах. На самом деле все тесно взаимосвязано, в чем мы сейчас убедимся.

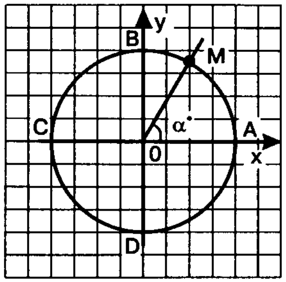


Рис. 30

Возьмем угол с градусной мерой $\alpha°$ и расположим его в модели «числовая окружность в прямоугольной системе координат» так, как показано на рис. 30: вершину угла совместим с центром окружности (с началом системы координат), а одну сторону угла совместим с положительным лучом оси абсцисс. Точку пересечения второй стороны угла с окружностью обозначим буквой M. Ординату точки M естественно считаем синусом угла $\alpha°$, а абсциссу этой точки — косинусом угла $\alpha°$.

Для отыскания синуса или косинуса угла $\alpha°$ совсем необязательно каждый раз проводить подобные построения. Достаточно заметить, что дуга AM составляет такую же часть длины единичной окружности, какую угол $\alpha°$ составляет от угла $360°$. Если длину дуги AM обозначить буквой t, то получим $\frac{\alpha°}{360°}=\frac{t}{2\pi}$, откуда находим:

$$t=\frac{2\pi\alpha°}{360°}=\frac{\pi\alpha}{180}.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha°=\sin t=\sin\frac{\pi\alpha}{180};\quad \cos\alpha°=\cos t=\cos\frac{\pi\alpha}{180}.$$

Например,

$$\sin 30°=\sin\frac{\pi\cdot 30}{180}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$

$$\cos 90°=\cos\frac{\pi\cdot 90}{180}=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Говорят, что $30°$ — это *градусная мера угла*, а $\frac{\pi}{6}$ — *радианная мера* того же угла: $30°=\frac{\pi}{6}$ *рад*. Аналогично $90°=\frac{\pi}{2}$ *рад*. Вообще,

$$\alpha°=\frac{\pi\alpha}{180}\text{ рад}.$$

В частности, $\boxed{1°=\frac{\pi}{180}\text{ рад}.}$

Отсюда, в свою очередь, получаем $\boxed{1\text{ рад}=\frac{180°}{\pi}.}$

Например, $35°=\frac{\pi}{180}\cdot 35=\frac{7\pi}{36}$ *рад*; $\frac{2\pi}{3}$ *рад* $=\frac{180°}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3}=120°$.

Ради краткости условимся обозначение *рад* опускать, т.е. вполне допустимой является, например, следующая запись:

$$\operatorname{tg}45°=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{180}\cdot 45\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

Так что же такое 1 радиан? Вы знаете, что есть различные меры длины: сантиметры, метры, ярды и т.д. Есть и различные меры величины угла. Мы рассматриваем центральные углы единичной окружности. Угол в $1°$ — это центральный угол, опирающийся на дугу, составляющую $\frac{1}{360}$ часть окружности. **Угол в 1 радиан** — это центральный угол, опирающийся на дугу длиной 1, т.е. *на дугу, длина которой равна радиусу окружности*. Из формулы 1 *рад* $=\frac{180°}{\pi}$ получаем, что $\boxed{1\text{ рад}\approx 57{,}3°.}$

Говоря о функции $s=\sin t$ (или о любой другой тригонометрической функции), мы можем считать независимую переменную t числовым аргументом, как это было в предыдущих параграфах, но можем считать ее и мерой угла, т.е. угловым аргументом. Рассматривая ту или иную тригонометрическую функцию, в определенном смысле безразлично считать ее функцией числового или углового аргумента. Мы будем в основном говорить о функциях числового аргумента.

Завершая параграф, убедимся в том, что определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса, которые вы изучали в геометрии, представляют собой частные случаи тех определений, что были предложены в этой главе.

Теорема. ***Если a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC*** (рис. 31), ***то выполняются следующие равенства:***

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \cos A=\frac{b}{c},\ \operatorname{tg}A=\frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}A=\frac{b}{a}.$$

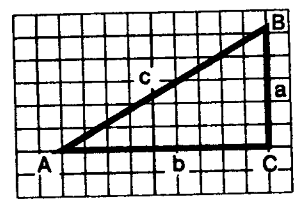


Рис. 31

Доказательство. Совместим прямоугольный треугольник ABC с числовой окружностью так, как показано на рис. 32: вершину A поместим в центр O окружности, катет AC «пустим» по положительному направлению оси абсцисс. Точку пересечения гипотенузы AB с окружностью

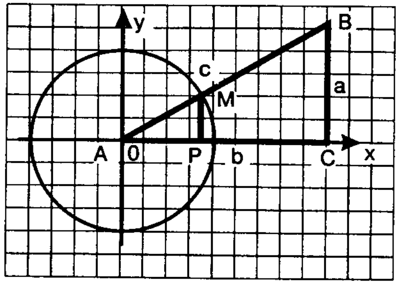


Рис. 32

обозначим буквой M. Опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую AC. Заметим, что AP и MP — абсцисса и ордината точки M, т.е. $AP = \cos A$, $MP = \sin A$. Учтем также, что $AM = 1$ (радиус числовой окружности равен 1) и что $Ae = -$, $AC = b$, $BC = a$.

Так как треугольники AMP и ABC подобны, то

$$\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c} = \frac{\cos A}{b}.$$

Из пропорции $\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c}$ находим: $\sin A = \frac{a}{c}$.

Из пропорции $\frac{\cos A}{b} = \frac{1}{c}$ находим: $\cos A = \frac{b}{c}$.

Далее, $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$; аналогично $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$. ●

Обратимся еще раз к рис. 31 и 32. Как мы только что доказали, $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$. Точно так же можно доказать, что $\sin B = \frac{b}{c}$, $\cos B = \frac{a}{c}$.

Значит, $\sin B = \cos A, \cos B = \sin A$. Но $B = 90° - A$. Таким образом, получаем известные вам из геометрии соотношения:

$$\sin(90° - A) = \cos A, \quad \cos(90° - A) = \sin A.$$

Переведя эти соотношения на «язык радианов», получим:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.$$

Эти формулы были доказаны выше, в примере 11 из § 4.

Справедливы и аналогичные формулы для тангенса и котангенса (попробуйте выполнить соответствующие обоснования самостоятельно):

$$\operatorname{tg}(90° - A) = \operatorname{ctg} A; \ \operatorname{ctg}(90° - A) = \operatorname{tg} A;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t; \ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t.$$

§ 8. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Если под знаком тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2} + t, \frac{\pi}{2} - t, \pi + t, \pi - t, \frac{3\pi}{2} + t, \frac{3\pi}{2} - t$ и вообще любое выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm t$, где n — произвольное целое число, то, оказывается, такое выражение всегда можно привести к более простому виду, когда под знаком тригонометрической функции будет содержаться только аргумент t. Соответствующие формулы обычно называют *формулами приведения*. Некоторые из этих формул мы вывели, например, в § 4, говоря о свойствах синуса и косинуса, а именно:

$$\sin(\pi + t) = -\sin t;$$
$$\cos(\pi + t) = -\cos t;$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t.$$

В том же параграфе в примере 10 получили:

$$\sin(\pi - t) = \sin t;$$
$$\cos(\pi - t) = -\cos t;$$
$$\sin(2\pi - t) = -\sin t;$$
$$\cos(2\pi - t) = \cos t.$$

Как видите, в этих случаях удалось привести заданное тригонометрическое выражение к виду $\sin t$ или $\cos t$ (с точностью до знака).

В § 5 мы вывели две формулы приведения для тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}(\pi + t) = \operatorname{tg} t;$$
$$\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg} t.$$

Итак, мы имеем 10 формул приведения. Попробуем их проанализировать.

Во-первых, замечаем, что наименование преобразуемой функции после приведения к функции аргумента t может сохраниться, а может и измениться: синус — на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс. Приведем примеры:

$$\sin(\pi + t) = -\sin t;$$
$$\cos(\pi + t) = -\cos t;$$
$$\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg} t;$$
$$\cos(2\pi - t) = \cos t.$$

Здесь название тригонометрической функции сохранилось.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t.$$

Здесь название тригонометрической функции изменилось.

Во-вторых, замечаем, что перед полученным выражением иногда появляется знак минус.

Формул приведения очень много. Выводить их каждый раз довольно утомительно. Составить таблицу формул приведения и постоянно ею пользоваться можно, но неудобно, так как она громоздка. На наше счастье, был придуман простой и удобный способ их запоминания. Он заключается в том, что:

1) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\pi+t, \pi-t, 2\pi+t$ *или* $2\pi-t$, *то наименование тригонометрической функции следует сохранить;*

2) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\frac{\pi}{2}+t, \frac{\pi}{2}-t, \frac{3\pi}{2}+t$ *или* $\frac{3\pi}{2}-t$, *то наименование тригонометрической функции следует изменить (на родственное);*

3) перед полученной функцией от аргумента t надо поставить тот знак, который имела бы преобразуемая функция при условии, что $0<t<\frac{\pi}{2}$.

Это правило используется и в тех случаях, когда аргумент задан в градусах, т.е. когда под знаком тригонометрической функции содержится сумма вида $90°+\alpha$, $90°-\alpha$, $180°+\alpha$ и т.д.

Попробуем применить сформулированное правило сначала к уже перечисленным в этом параграфе формулам приведения.

Преобразуем $\sin(\pi+t)$. Наименование функции сохраняется, т.е. получаем $\sin t$. Далее, если считать, что $0<t<\frac{\pi}{2}$, то $\pi+t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\sin(\pi+t)=-\sin t$.

Преобразуем $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$. Наименование функции изменяется, т.е. получаем $\sin t$. Далее, из того, что $0<t<\frac{\pi}{2}$, следует, что $\frac{\pi}{2}+t$ — аргумент из второй четверти, а в ней преобразуемая функция косинус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t$.

А теперь воспользуемся сформулированным правилом для получения пары новых формул приведения.

Преобразуем $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)$. Наименование функции следует изменить; получим $\operatorname{tg} t$. Далее, если считать, что $0<t<\frac{\pi}{2}$, получим, что $\frac{3\pi}{2}-t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция котангенс имеет знак плюс. Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\operatorname{tg} t$.

Преобразуем $\sin(360°-\alpha)$. Наименование функции следует сохранить (не забывайте, что $360° = 2\pi$); получим $\sin\alpha$. Далее, если считать, что $0<\alpha<90°$, получим, что $360°-\alpha$ — аргумент из четвертой четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$.

Разумеется, формулы приведения можно применять и в тех случаях, когда место аргумента t занимает более сложное выражение. Например, мы видели выше, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\operatorname{tg} t$; значит, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-5t\right)=\operatorname{tg} 5t$, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ и т.д.

§ 9. ФУНКЦИЯ $y=\sin x$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

В § 6 мы уже познакомились с функцией $s=\sin t$, где $t\in R$. Отметим свойства этой функции.

Свойства функции $s=\sin t$

Свойство 1. *Область определения — множество R действительных чисел:* $D(f)=(-\infty,+\infty)$.

Свойство 2. $s=\sin t$ — *нечетная функция.*

Напомним (см. наш учебник "Алгебра-9"), что функцию $y=f(x)$, $x\in X$, называют н е ч е т н о й , если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x)=-f(x).$$

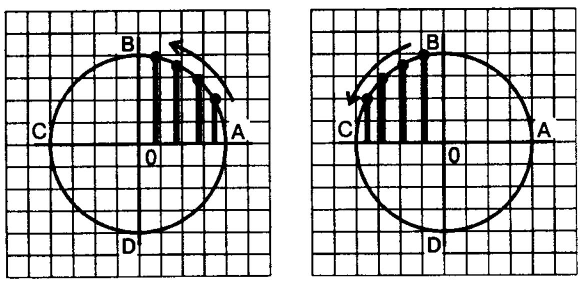
Но в § 4 мы уже доказали, что для любого t выполняется равенство $\sin(-t) = -\sin t$. Значит, $s = \sin t$ — нечетная функция.

График функции $s = \sin t$, как график любой нечетной функции, симметричен относительно начала координат в прямоугольной системе координат tOs.

Свойство 3. *Функция* $s = \sin t$ *возрастает на отрезке* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *и убывает на отрезке* $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Это следует из того, что при движении точки по первой четверти числовой окружности (от 0 до $\frac{\pi}{2}$) ордината постепенно увеличивается (от 0 до 1 — см. рис. 33*а*), а при движении точки по второй четверти числовой окружности (от $\frac{\pi}{2}$ до π) ордината постепенно уменьшается (от 1 до 0 — см. рис. 33*б*).

Рассуждая аналогично, можно сделать общий вывод: *функция* $s = \sin t$ *возрастает на любом отрезке вида* $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ *и убывает на любом отрезке вида* $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где $k \in Z$.



а *б*

Рис. 33

Свойство 4. *Функция* $s = \sin t$ *ограничена и снизу, и сверху.*

Напомним (см. наш учебник "Алгебра-9"), что функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу**, если все значения функции не меньше некоторого числа; иными словами, если существует число m такое, что для любого значения x из области определения функции выполняется неравенство $f(x) \geqslant m$. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной** сверху, если все значения функции не больше некоторого числа; иными словами, если существует число M такое, что для любого значения x из области определения функции выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$.

Если функция ограничена и снизу, и сверху, то ее называют **ограниченной**.

Ограниченность функции $s = \sin t$ следует из того, что, как мы видели выше, для любого t справедливо неравенство $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$.

Свойство 5. $s_{\text{наим.}} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$); $s_{\text{наиб.}} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$).

Под $s_{\text{наим.}}$ и $s_{\text{наиб.}}$ понимаются соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $s = \sin t$.

Воспользовавшись полученными свойствами, построим график интересующей нас функции. Но (внимание!) вместо $s = \sin t$ будем писать $y = \sin x$ — ведь нам привычнее запись $y = f(x)$, а не $s = f(t)$. Значит, и строить график будем в привычной системе координат xOy.

Сначала построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$. При этом договоримся о следующем масштабе на осях координат: на оси ординат 1 см $= 1$, т.е. в ваших тетрадях в клеточку роль единичного отрезка на оси y составит отрезок в две клеточки; на оси x 1 см (две клеточки) равен $\frac{\pi}{3}$. Фактически мы будем считать, что $\pi = 3$, что не совсем соответствует действительности (на самом деле $\pi > 3$), но на это при построении графика особого внимания обращать не будем.

Составим таблицу значений функции $y = \sin x$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Отметим эти точки на координатной плоскости и соединим их плавной кривой, идущей «в гору» на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и «под гору» на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Это — график функции $y = \sin x$ на отрезке

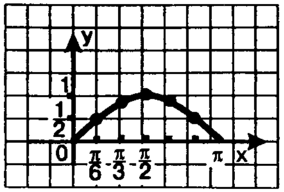


Рис. 34

$[0, \pi]$ (рис. 34). Обратите внимание на плавность графика в точке $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$ и на то, что из начала координат кривая выходит как бы под углом 45°. Почему это так, пока объяснить мы не можем, соответствующий разговор пойдет в главе 4.

Добавив к построенному графику симметричную линию относительно начала координат, получим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ (рис. 35).

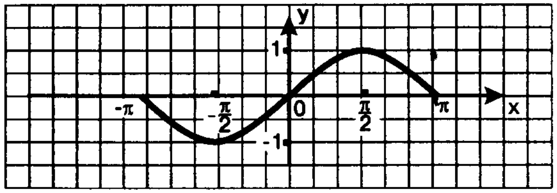


Рис. 35

А теперь построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[\pi, 3\pi]$. Обратите внимание: если $x \in [-\pi, \pi]$, то $(x + 2\pi) \in [\pi, 3\pi]$. Но $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Это означает, что в точке $x + 2\pi$ функция $y = \sin x$ принимает то же значение, что и в точке x. Иными словами, на отрезке $[\pi, 3\pi]$ график функции $y = \sin x$ выглядит точно так же, как и на отрезке $[-\pi, \pi]$ (рис. 36). И на отрезках $[3\pi, 5\pi]$, $[5\pi, 7\pi]$, $[-3\pi, -\pi]$ и т.д. график этой функции выглядит так же, как на отрезке $[-\pi, \pi]$. Окончательный вид графика функции $y = \sin x$ представлен на рис. 37.

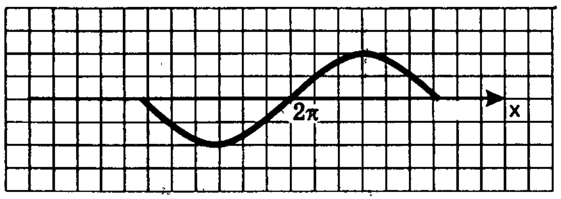


Рис. 36

Линию, служащую графиком функции $y = \sin x$, называют *синусоидой*. Ту часть синусоиды, которая изображена на рис. 35 или 36, называют *волной синусоиды*, а ту часть синусоиды, которая изображена на рис. 34, называют *полуволной* или *аркой синусоиды*.

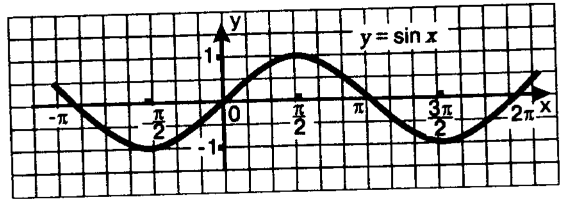


Рис. 37

Опираясь на построенный график, отметим еще несколько свойств функции $y = \sin x$.

Свойство 6. $y = \sin x$ — *непрерывная функция.*

Непрерывность функции на промежутке X означает, что график функции на промежутке X — сплошной, т.е. не имеет проколов и скачков. Это, конечно, весьма поверхностное представление о свойстве непрерывности функции, более точное истолкование непрерывности функции мы рассмотрим в главе 4.

Свойство 7. *Область значений функции — отрезок* $[-1, 1]$; короче $E(f) = [-1, 1]$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = x - \pi$.

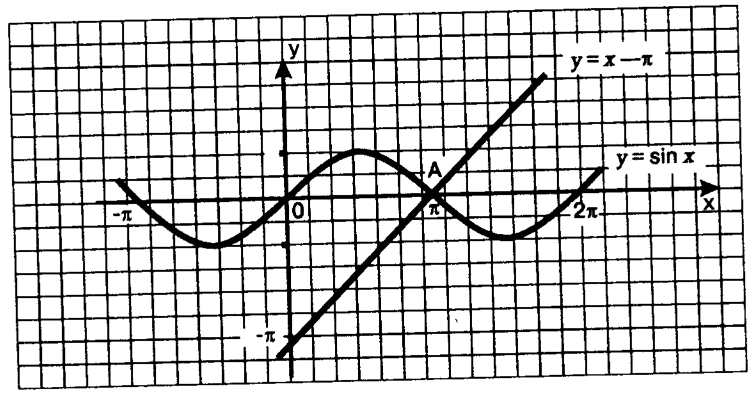


Рис. 38

Решение.

1) Рассмотрим две функции: $y = \sin x$ и $y = x - \pi$.

2) Построим график функции $y = \sin x$ (рис. 38).

3) Построим график линейной функции $y = x - \pi$. Это — прямая линия, проходящая через точки $(0; -\pi)$ и $(\pi; 0)$ (рис. 38).

4) Построенные графики пересекаются в точке $A(\pi; 0)$. Значит, заданное уравнение имеет корень π — это абсцисса точки A.

Ответ: $x = \pi$.

Пример 2. Построить график функции $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2$.

Решение. Построим вспомогательную систему координат (соответствующие оси $x=\frac{\pi}{3}$, $y=2$ проведены на рис. 39 пунктиром) с началом в точке

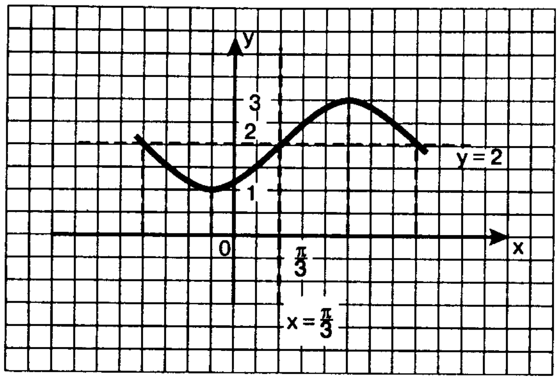


Рис. 39

$\left(\frac{\pi}{3};\ 2\right)$. «Привяжем» функцию $y=\sin x$ к новой системе координат — это и будет требуемый график (рис. 39).

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sin x$ на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6},\ 2\pi\right]$.

Решение. Построив график функции $y=\sin x$ и выбрав часть его на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6},\ 2\pi\right]$, убеждаемся (рис. 40), что $y_{\text{наиб.}}=\frac{1}{2}$ (этого значения функция достигает в точке $x=\frac{5\pi}{6}$), а $y_{\text{наим.}}=-1$ (этого значения функция достигает в точке $x=\frac{3\pi}{2}$).

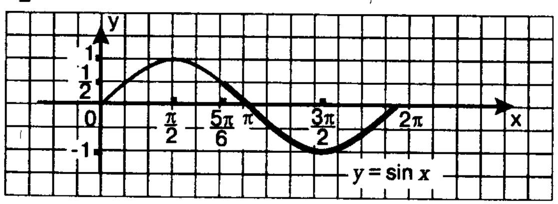


Рис. 40

Ответ: $y_{\text{наиб.}}=\frac{1}{2}$, $y_{\text{наим.}}=-1$.

§ 10. ФУНКЦИЯ $y=\cos x$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Разговор о функции $y=\cos x$ можно было бы построить по той же схеме, которая была использована для функции $y=\sin x$ (§ 9). Но мы выберем путь, быстрее приводящий к цели: воспользуемся формулой приведения $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Что дает нам эта формула? Она позволяет утверждать, что функции $y=\cos x$ и $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ тождественны, значит, их графики совпадают.

Построим график функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Для этого построим вспомогательную систему координат с началом в точке $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ — пунктирная прямая $x=-\frac{\pi}{2}$ проведена на рис. 41.

«Привяжем» функцию $y=\sin x$ к новой системе координат — это и будет график функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, т.е. график функции $y=\cos x$ (рис. 41).

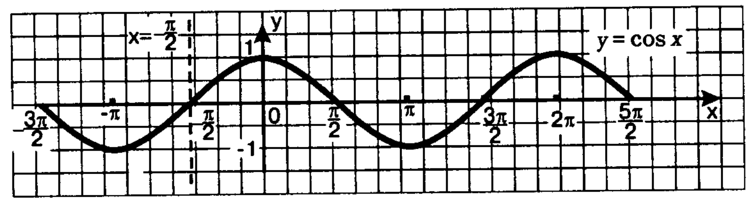


Рис. 41

График функции $y=\cos x$, как и график функции $y=\sin x$, называют синусоидой (что вполне естественно).

Свойства функции $y=\cos x$

Свойство 1. $D(f)=(-\infty,+\infty)$.

Свойство 2. $y=\cos x$ — *четная функция.*

Напомним, что функцию $y=f(x)$, $x\in X$, называют **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

Четность функции $y=\cos x$ следует из выведенной в § 4 формулы $\cos(-t)=\cos t$; четность функции иллюстрирует график на рис. 42 — он симметричен относительно оси y.

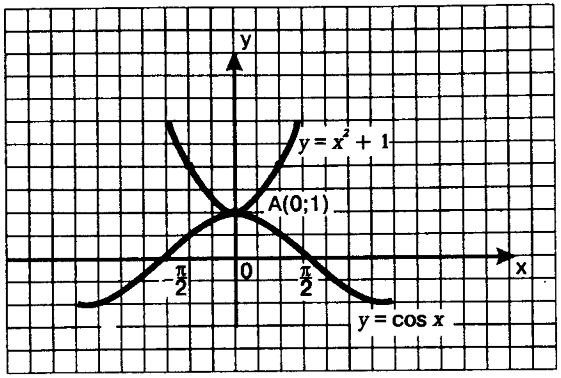


Рис. 42

Свойство 3. *Функция убывает на отрезке* $[0, \pi]$, *возрастает на отрезке* $[\pi, 2\pi]$ и т.д.

Свойство 4. *Функция ограничена и снизу, и сверху.*

Свойство 5. $y_{\text{наим.}} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = \pi + 2\pi k$); $y_{\text{наиб.}} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = 2\pi k$).

Свойство 6. $y = \cos x$ — *непрерывная функция.*

Свойство 7. $E(f) = [-1, 1]$.

Пример 1. Решить уравнение $\cos x = x^2 + 1$.

Решение.

1) Рассмотрим две функции: $y = \cos x$ и $y = x^2 + 1$.

2) Построим график функции $y = \cos x$ (рис. 42).

3) Построим график функции $y = x^2 + 1$. Это — парабола (рис. 42).

4) Построенные графики имеют одну общую точку A (0; 1). Значит, заданное уравнение имеет один корень 0 — это абсцисса точки A.

Ответ: $x = 0$.

Пример 2. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x \leqslant 0; \\ \cos x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Решение. Построение графика осуществим «по кусочкам». Сначала построим график функции $y = \sin x$ и выделим его часть (рис. 43*а*) на луче $(-\infty, 0]$. Затем построим график функции $y = \cos x$ и выделим его часть (рис. 43*б*) на открытом луче $(0, +\infty)$. Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции $y = f(x)$ (рис. 44).

Перечислим свойства функции $y = f(x)$, т.е. прочитаем график:

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;

2) функция ни четна, ни нечетна;

3) функция ограничена и снизу, и сверху;

4) $y_{\text{наим.}} = -1$ (таких точек бесконечно много), $y_{\text{наиб.}} = 1$ (таких точек тоже бесконечно много);

5) функция претерпевает разрыв в точке $x = 0$;

6) $E(f) = [-1, 1]$.

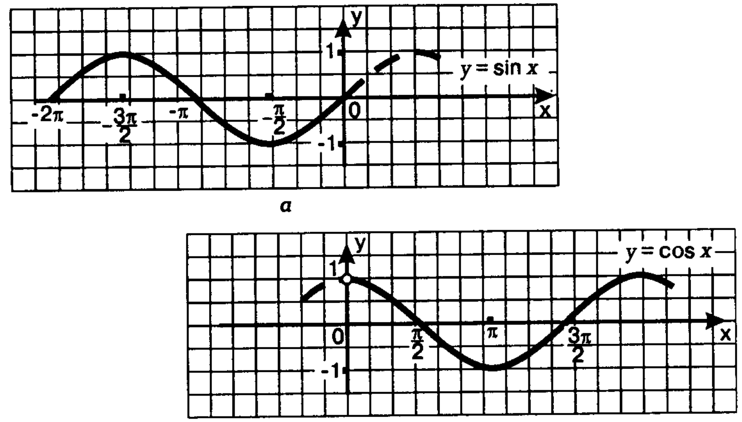


Рис. 43

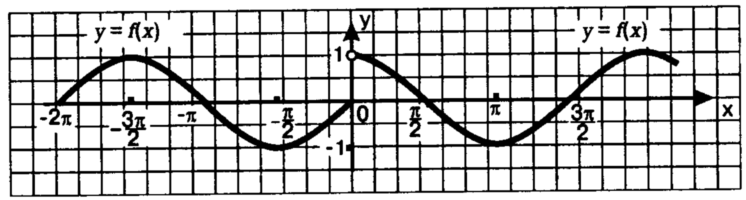


Рис. 44

Вы, наверное, обратили внимание на то, что мы пропустили один пункт чтения графика: ничего не сказали о монотонности функции. Дело в том, что функция бесконечно много раз меняет характер монотонности (то возрастает, то убывает) — это хорошо видно из графика.

§ 11. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ФУНКЦИЙ $y = \sin x$, $y = \cos x$

В предыдущих параграфах мы использовали семь свойств функций: область определения, четность или нечетность, монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значения, непрерывность, область значений функции. Использовали мы эти свойства либо для того, чтобы построить график функции (так было, например, в § 9), либо для того, чтобы прочитать построенный график (так было, например, в § 10). Теперь настал благоприятный момент для введения еще одного (восьмого) свойства функций, которое прекрасно просматривается на построенных выше графиках функций $y=\sin x$ (см. рис. 37), $y=\cos x$ (см. рис. 41).

Определение. Функцию $y=f(x)$, $x\in X$, называют **периодической**, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из множества X выполняется двойное равенство:

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T).$$

Число T, удовлетворяющее указанному условию, называют **периодом функции** $y=f(x)$.

Отсюда следует, что, поскольку для любого x справедливы равенства:

$$\sin(x-2\pi)=\sin x=\sin(x+2\pi),$$
$$\cos(x-2\pi)=\cos x=\cos(x+2\pi),$$

то *функции* $y=\sin x$, $y=\cos x$ *являются периодическими и число* 2π *служит периодом и той, и другой функции.*

Периодичность функции — это и есть обещанное восьмое свойство функций.

А теперь посмотрите на график функции $y=\sin x$ (рис. 37). Чтобы построить синусоиду, достаточно построить одну ее волну (на отрезке $[0, 2\pi]$ или на отрезке $[-\pi, \pi]$), а затем сдвинуть эту волну по оси x на 2π вправо, на 2π влево, на 4π вправо, на 4π влево и т.д. В итоге с помощью одной волны мы построим весь график.

Посмотрим с этой же точки зрения на график функции $y=\cos x$ (рис. 41). Видим, что и здесь для построения графика достаточно сначала построить одну волну (например, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, а затем сдвинуть ее по оси x на 2π вправо, на 2π влево, на 4π вправо, на 4π влево и т.д.

Обобщая, делаем следующий вывод.

Если функция $y=f(x)$ имеет период T, то для построения графика функции нужно сначала построить ветвь (волну, часть) графика на любом промежутке длины T (чаще всего берут промежуток с концами в точках 0 и T или $-\frac{T}{2}$ и $\frac{T}{2}$), *а затем сдвинуть эту ветвь по оси x вправо и влево на T, $2T$, $3T$ и т.д.*

У периодической функции бесконечно много периодов: если T — период, то и $2T$ — период, и $3T$ — период, и $-T$ — период; вообще *периодом является любое число вида kT, где $k=\pm1, \pm2, \pm3 \ldots$* Обычно стараются, если это возможно, выделить наименьший положительный период, его называют *основным периодом*.

Итак, *любое число вида $2\pi k$, где $k=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, является периодом функций $y=\sin x$, $y=\cos x$; 2π — основной период и той, и другой функции.*

Пример. Найти основной период функции:

а) $y=\sin 3x$; б) $y=\cos\frac{x}{2}$.

Решение. а) Пусть T — основной период функции $y=\sin 3x$. Положим $f(x)=\sin 3x$. Тогда $f(x+T)=\sin 3(x+T)=\sin(3x+3T)$.

Чтобы число T было периодом функции, должно выполняться тождество $\sin(3x+3T)=\sin 3x$. Значит, $3T=2\pi n$. Но, поскольку речь идет об отыскании основного периода, получаем $3T=2\pi$, $T=\frac{2\pi}{3}$.

б) Пусть T — основной период функции $y=\cos 0{,}5x$. Положим $f(x)=\cos 0{,}5x$. Тогда $f(x+T)=\cos 0{,}5(x+T)=\cos(0{,}5x+0{,}5T)$.

Чтобы число T было периодом функции, должно выполняться тождество $\cos(0{,}5x+0{,}5T)=\cos 0{,}5x$.

Значит, $0{,}5T=2\pi n$. Но, поскольку речь идет об отыскании основного периода, получаем $0{,}5T=2\pi$, $T=4\pi$.

Ответ: а) $T=\frac{2\pi}{3}$; б) $T=4\pi$.

Обобщением результатов, полученных в примере, является следующее утверждение: *основной период функции $y=\sin kx$ ($y=\cos kx$) равен $\frac{2\pi}{k}$.*

§ 12. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y=mf(x)$, ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y=f(x)$

В курсе алгебры 8—9-го классов вы научились, зная график функции $y=f(x)$, строить графики функций $y=f(x+a)$, $y=f(x)+b$, $y=f(x+a)+b$. Все эти графики получаются из графика функции $y=f(x)$ с помощью преобразования параллельного переноса: на $|a|$ единиц масштаба вправо или влево вдоль оси x и на $|b|$ единиц масштаба вверх или вниз вдоль оси y (мы использовали этот прием в § 9 и 10). Теперь мы познакомимся еще с одним преобразованием, позволяющим, зная график функции $y=f(x)$, довольно быстро строить график функции $y=mf(x)$, где m — любое действительное число (кроме нуля)*.

* Если вы учились по нашему учебнику «Алгебра-9», то уже знакомы с этим преобразованием, но теперь вы увидите, как оно применяется для построения графиков тригонометрических функций.

Задача 1. Зная график функции $y=f(x)$, построить график функции $y=mf(x)$, где m — положительное число.

Ординаты точек графика функции $y=mf(x)$ получаются умножением на m ординат соответствующих точек графика функции $y=f(x)$. Такое преобразование графика называют обычно *растяжением от оси x с коэффициентом m*. Отметим, что при этом преобразовании остаются на месте точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью x, т.е. точки, удовлетворяющие уравнению $f(x)=0$.

Если $m<1$, то предпочитают говорить не о растяжении с коэффициентом m, а о *сжатии к оси x с коэффициентом* $\frac{1}{m}$. Например, если $m=\frac{1}{3}$, то говорят не о растяжении с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о сжатии с коэффициентом 3.

На рис. 45 показаны графики функций $y=\sin x$ и $y=3\sin x$, а на рис. 46 — графики функций $y=\cos x$ и $y=0{,}5\cos x$.

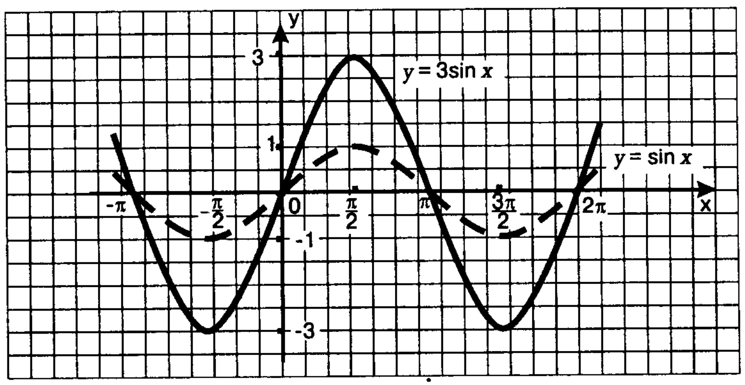


Рис. 45

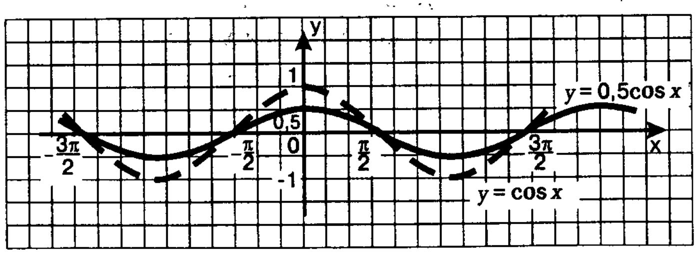


Рис. 46

На практике обычно, выполняя сжатие или растяжение графика функции $y=\sin x$ или $y=\cos x$, сначала работают с одной полуволной синусоиды, а потом достраивают весь график.

Задача 2. Зная график функции $y=f(x)$, построить график функции $y=mf(x)$, где $m=-1$. Иными словами, речь идет о построении графика функции $y=-f(x)$.

Ординаты точек графика функции $y=-f(x)$ отличаются от соответствующих ординат точек графика функции $y=f(x)$ только знаком. Точки $(x;\ f(x))$ и $(x;\ -f(x))$ симметричны относительно оси x (рис. 47). Значит, график функции $y=-f(x)$ можно получить из графика функции $y=f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси x. На рис. 48 изображены графики функций $y=\cos x$ и $y=-\cos x$.

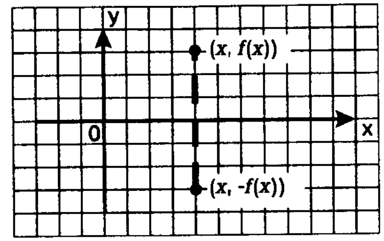


Рис. 47

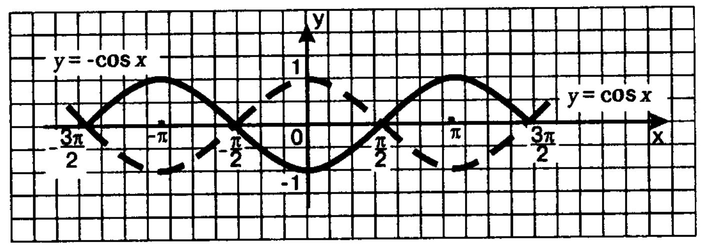


Рис. 48

Задача 3. Зная график функции $y=f(x)$, построить график функции $y=mf(x)$, где m — отрицательное число.

Так как в этом случае справедливо равенство $mf(x)=-|m|f(x)$, то речь идет о построении графика функции $y=-|m|f(x)$. Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции $y=f(x)$;

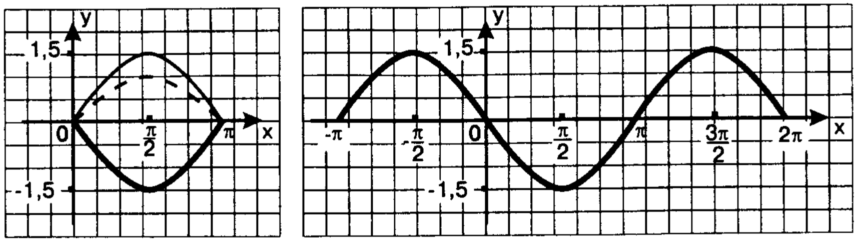
2) осуществить его растяжение от оси x с коэффициентом $|m|$;

3) растянутый (или сжатый) график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x.

Пример. Построить график функции $y=-1{,}5\sin x$.

Решение. 1) Построим график функции $y=\sin x$, точнее, одну полуволну графика (пунктирная линия на рис. 49*а*).

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 1,5; получим одну полуволну графика функции $y=1{,}5\sin x$ (тонкая линия на рис. 49*а*).



а б

Рис. 49

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 1{,}5 \sin x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -1{,}5 \sin x$ (она выделена на рис. 49а).

4) С помощью построенной полуволны получаем весь график функции $y = -1{,}5 \sin x$ (рис. 49б).

§ 13. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(kx)$, ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

В этом параграфе мы познакомимся еще с одним преобразованием, позволяющим, зная график функции $y = f(x)$, довольно быстро строить график функции $y = f(kx)$, где k — любое действительное число (кроме нуля). Рассмотрим несколько случаев.

Задача 1. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — положительное число.

Чтобы вам было проще понять суть дела, рассмотрим конкретный пример, когда $k = 2$. Как построить график функции $y = f(2x)$, если известен график функции $y = f(x)$?

Пусть на графике функции $y = f(x)$ имеются точки (4; 7) и (−2; 3). Это значит, что $f(4) = 7$ и $f(-2) = 3$. Куда переместятся точки, когда мы строим график функции $y = f(2x)$? Смотрите (рис. 50): если $x = 2$, то $y = f(2x) = f(2 \cdot 2) = f(4) = 7$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (2; 7). Далее, если $x = -1$, то $y = f(2x) = f(-1 \cdot 2) = f(-2) = 3$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (−1; 3). Итак, на графике функции $y = f(x)$ есть точки (4; 7) и (−2; 3), а на графике функции $y = f(2x)$ есть точки (2; 7) и (− 1; 3), т.е. точки с той же ординатой,

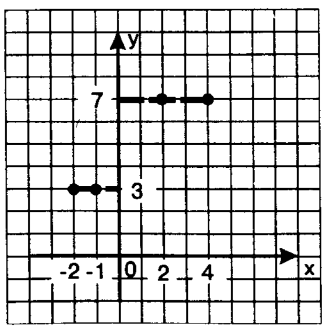


Рис. 50

но в два раза меньшей (по модулю) абсциссой. Так же обстоит дело и с другими точками графика функции $y = f(x)$, когда мы переходим к графику функции $y = f(2x)$ (рис. 51). Такое преобразование называют обычно *сжатием к оси y с коэффициентом 2.*

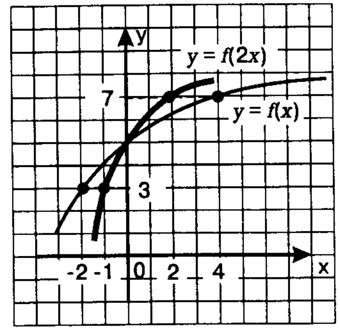


Рис. 51

Вообще, *график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сжатия к оси y с коэффициентом k.* Отметим, что при этом преобразовании остается на месте точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью y (если $x = 0$, то и $kx = 0$).

Впрочем, если $k < 1$, то предпочитают говорить не о сжатии с коэффициентом k, а о растяжении от оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$ (если $k = \frac{1}{3}$, то говорят не о сжатии с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о растяжении с коэффициентом 3).

Пример 1. Построить графики функций:

а) $y = \sin \frac{x}{2}$; б) $y = \cos 2x$.

Решение. а) Построим полуволну графика функции $y = \sin x$ и осуществим ее растяжение от оси y с коэффициентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \sin \frac{x}{2}$ (рис. 52). Затем построим весь график (рис. 53).

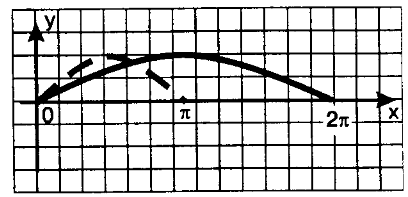


Рис. 52

б) Построим полуволну графика функции $y = \cos x$ и осуществим ее сжатие к оси y с коэффициентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \cos 2x$ (рис. 54). Затем построим весь график (рис. 55).

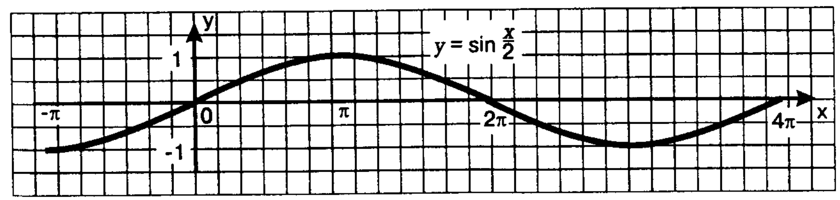


Рис. 53

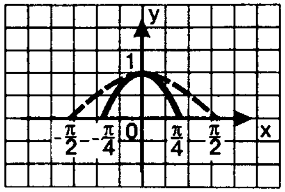


Рис. 54

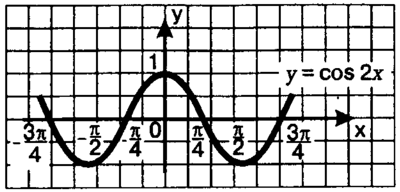


Рис. 55

Задача 2. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где $k = -1$. Иными словами, речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$.

Предположим, что на графике функции $y = f(x)$ есть точки (3; 5) и (–6; 1). Это значит, что $f(3) = 5$, а $f(-6) = 1$. Соответственно на графике функции $y = f(-x)$ имеется точка (–3; 5), так как при подстановке в формулу $y = f(-x)$ значения $x = -3$ получим $y = f(3) = 5$. Аналогично убеждаемся, что графику функции $y = f(-x)$ принадлежит точка (6; 1).

Итак, точке (3; 5), принадлежащей графику функции $y = f(x)$, соответствует точка (–3; 5), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$; точке (–6; 1), принадлежащей графику функции $y = f(x)$, соответствует точка (6; 1), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$. Указанные пары точек симметричны относительно оси y (рис. 56).

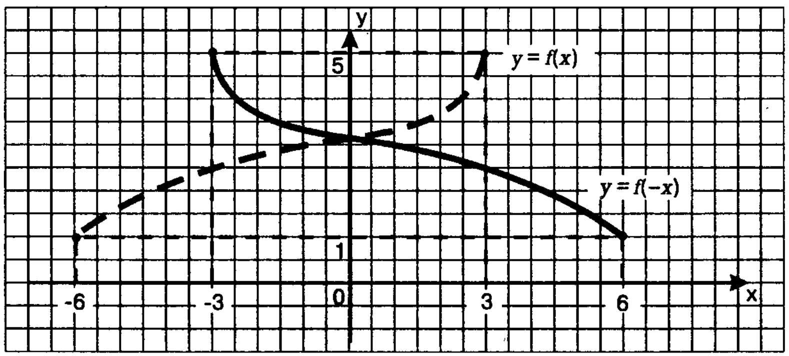


Рис. 56

Обобщая эти рассуждения, приходим к следующему выводу: *график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси y.*

Замечание. Если речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$, то обычно сначала проверяют, является ли функция $y = f(x)$ четной или нечетной. Если $y = f(x)$ — четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$, то график функции $y = f(-x)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Если $y = f(x)$ — нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то вместо графика функции $y = f(-x)$ можно построить график функции $y = -f(x)$.

Задача 3. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — отрицательное число.

Так как в этом случае справедливо равенство $f(kx) = f(-|k|x)$, то речь идет о построении графика функции $y = f(-|k|x)$. Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) осуществить его сжатие (или растяжение) к оси y с коэффициентом $|k|$;

3) сжатый (или растянутый) график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси y.

Пример 2. Построить график функции $y = -3\cos(-2x)$.

Решение. Заметим прежде всего, что $\cos(-2x) = \cos 2x$.

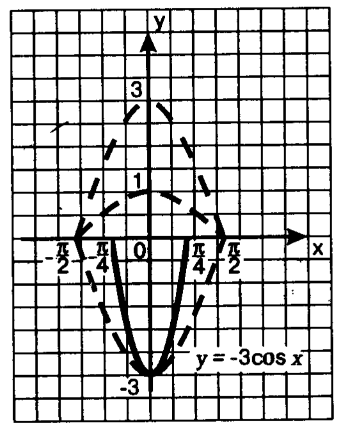
1) Построим график функции $y = \cos x$, точнее, одну полуволну графика (рис. 57*а*. Все предварительные построения обозначены пунктирными линиями).

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 3; получим одну полуволну графика функции $y = 3\cos x$.

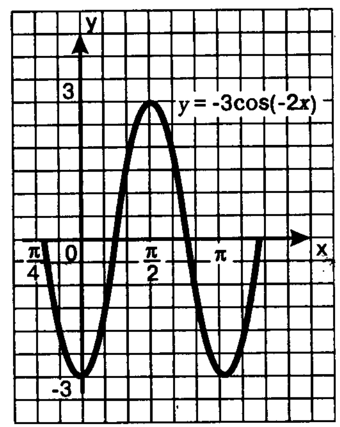
3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 3\cos x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -3\cos x$.

4) Осуществим для полуволны графика функции $y = -3\cos x$ сжатие к оси y с коэффициентом 2; получим полуволну графика функции $y = -3\cos 2x$ (на рис. 57*а* сплошная линия).

5) С помощью полученной полуволны построим весь график (рис. 57*б*).



а



б

Рис. 57

§ 14. ГРАФИК ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ

Тригонометрические функции используются для описания колебательных процессов. Один из наиболее важных процессов такого рода описывается формулой $s = A\sin(\omega t + \alpha)$. Эту формулу называют *законом* (или *уравнением*) *гармонических колебаний*. Если, например, материальную точку, висящую на пружине, вывести из положения равновесия, то она начнет совершать вертикальные колебания, причем закон движения выражается указанной выше формулой, где t — время, а s — отклонение материальной точки от положения равновесия.

Пример. Построить график функции $s = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ в системе координат sOt.

Решение. Имеем $s = 3\sin 2\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$. Чтобы построить график такой функции, нужно над синусоидой $s = \sin t$ (или, как мы условились выше, над полуволной синусоиды) осуществить следующие преобразования: 1) сжать ее к оси ординат с коэффициентом 2; 2) растянуть от оси абсцисс с коэффициентом 3; 3) сжатую и растянутую полуволну сдвинуть вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{6}$ влево. В результате получится главная полуволна искомого графика, с помощью которой без труда можно построить весь график.

На практике главную полуволну предпочитают строить по-другому.

Решим уравнение $3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ (это даст нам точки пересечения графика с осью абсцисс). Имеем (см. пример 6 в § 4):

$$2t + \frac{\pi}{3} = \pi k,$$

$$2t = -\frac{\pi}{3} + \pi k,$$

$$t = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}.$$

Дадим параметру k два соседних значения 0 и 1. При $k = 0$ получаем $t_1 = -\frac{\pi}{6}$; при $k = 1$ получаем $t_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$. Точки $A\left(-\frac{\pi}{6};\ 0\right)$ и $B\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$ служат концами одной полуволны искомого графика. Серединой отрезка $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ является точка $\frac{\pi}{12}$ — среднее арифметическое (полусумма) чисел $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$. Найдем значение заданной функции в точке $\frac{\pi}{12}$:

$$s = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Точка $C\left(\frac{\pi}{12};\ 3\right)$ — верхняя точка искомой полуволны. По трем точкам A, B и C строим сначала полуволну искомого графика (рис. 58), а затем и весь график (рис. 59).

В уравнении гармонических колебаний $s = A\sin(\omega t + \alpha)$ все величины A, ω, α имеют определенный физический смысл: A (или $-A$,

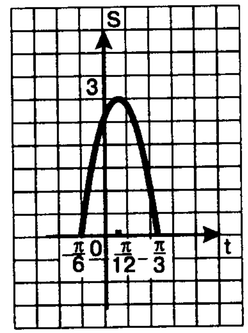


Рис. 58

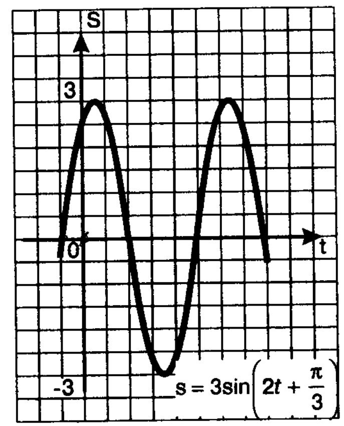


Рис. 59

если $A < 0$) — амплитуда колебаний (максимальное отклонение от положения равновесия); ω — частота колебаний; α — начальная фаза колебаний. Так, в рассмотренном примере $s = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ амплитуда равна трем ($A = 3$), частота колебаний равна двум ($\omega = 2$), начальная фаза колебаний равна $\frac{\pi}{3}$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{3}\right)$.

§ 15. ФУНКЦИИ $y = tg\ x$, $y = ctg\ x$, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Отметим свойства функции $y = \mathrm{tg}\ x$, причем в первую очередь те, которые помогут составить представление о графике функции (большинство из этих свойств фактически известно нам из § 5). Когда такое представление сложится, начнем строить график, как обычно, по точкам.

Свойство 1. *Область определения функции* $y = \mathrm{tg}\ x$ — *множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида* $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

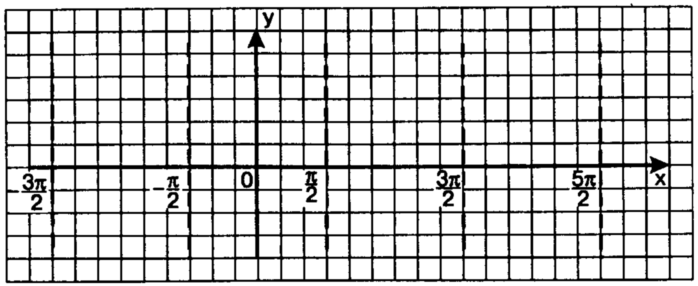


Рис. 60

Это свойство означает, что на графике функции нет точки, принадлежащей прямой $x=\frac{\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x=\frac{3\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x=\frac{5\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x=-\frac{\pi}{2}$, и т.д. Эти прямые проведены пунктиром на рис. 60.

Первое представление о графике получено: он состоит из бесконечного множества ветвей (в полосе между $x=-\frac{\pi}{2}$ и $x=\frac{\pi}{2}$, в полосе между $x=\frac{\pi}{2}$ и $x=\frac{3\pi}{2}$ и т.д.).

Свойство 2. $y=\operatorname{tg} x$ — *периодическая функция с основным периодом* π.

Это следует из двойного равенства

$$\operatorname{tg}(x-\pi)=\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(x+\pi),$$

полученного в § 5.

Значит, если мы построим ветвь графика в полосе от $x=-\frac{\pi}{2}$ до $x=\frac{\pi}{2}$, то затем нужно будет сдвинуть построенную ветвь по оси x вправо и влево на $\pi, 2\pi, 3\pi$ и т.д. Тем самым получено второе представление о графике.

Свойство 3. $y=\operatorname{tg} x$ — *нечетная функция.*

Это следует из доказанного в § 5 соотношения $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Значит, нам можно действовать так: построить по точкам часть графика на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а затем воспользоваться указанной симметрией.

Приступим к построению графика на полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Выберем контрольные точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Отметим эти точки на координатной плоскости и проведем через них плавную кривую (рис. 61). Добавим линию, симметричную построенной кривой относительно начала координат (рис. 62). Воспользовавшись периодичностью, достроим график до конца (рис. 63).

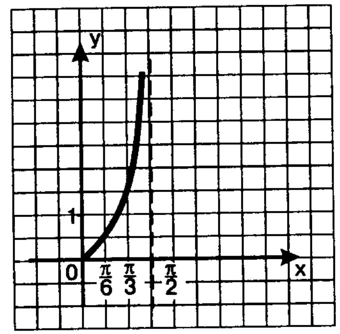


Рис. 61

График функции $y=\operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*. Ту ее часть, которая изображена на рис. 62, обычно называют *главной ветвью* тангенсоиды.

Обратите внимание на то, что из начала координат главная ветвь тангенсоиды выходит как бы под углом 45°. Почему это так, вы узнаете из главы 4.

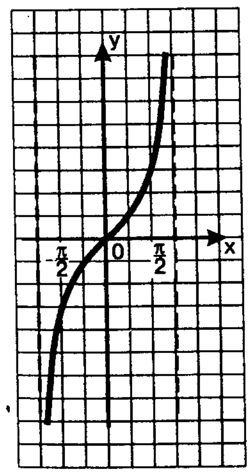


Рис. 62

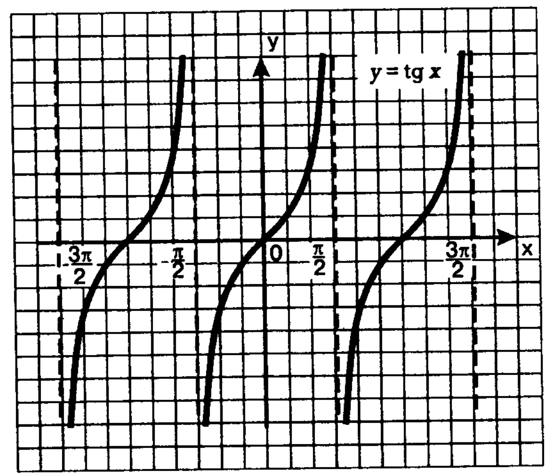


Рис. 63

Отметим еще несколько свойств функции $y=\operatorname{tg} x$.

Свойство 4. *Функция возрастает на интервале* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В более общем виде — *функция возрастает на любом интервале вида* $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$.

Свойство 5. *Функция* $y = \mathrm{tg}\ x$ *не ограничена ни сверху, ни снизу.*

Свойство 6. *У функции* $y = \mathrm{tg}\ x$ *нет ни наибольшего, ни наименьшего значения.*

Свойство 7. *Функция* $y = \mathrm{tg}\ x$ *непрерывна на интервале* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В более общем виде — *функция непрерывна на любом интервале вида* $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$.

При значениях $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$ функция претерпевает разрыв. Каждая прямая вида $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$ служит вертикальной асимптотой графика функции.

Свойство 8. $E(f) = (-\infty, +\infty)$.

Замечание. Свойства 4—8, прочитанные по графику, можно доказать, опираясь на соответствующие математические утверждения, которые нам с вами пока не известны (поэтому мы и ограничиваемся наглядно-интуитивными представлениями). Впрочем, доказательство одного из свойств мы можем осуществить и сейчас.

Докажем, что функция $y = \mathrm{tg}\ x$ возрастает на полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Возьмем два значения аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка: $x_1 < x_2$. Тогда в силу возрастания функции $y = \sin x$ на выбранном полуинтервале, будем иметь $\sin x_1 < \sin x_2$. В силу убывания функции $y = \cos x$ на выбранном полуинтервале будем иметь $\cos x_1 > \cos x_2$. Значит,

$$\mathrm{tg}\ x_1 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \mathrm{tg}\ x_2.$$

Итак, из $x_1 < x_2$ следует $\mathrm{tg}\ x_1 < \mathrm{tg}\ x_2$, а это и означает возрастание функции $y = \mathrm{tg}\ x$ на выбранном промежутке.

Пример 1. Решить уравнение $\mathrm{tg}\ x = \sqrt{3}$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \mathrm{tg}\ x$ — тангенсоиду и $y = \sqrt{3}$ — прямую, параллельную оси x. Они имеют бесконечно много точек пересечения (рис. 64), причем абсциссы этих точек отличаются друг от друга на πk. На главной ветви абсцисса соответствующей точки равна $\frac{\pi}{3}$ (мы воспользовались известным числовым равенством $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$), это один корень уравнения, а все решения описываются формулой $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

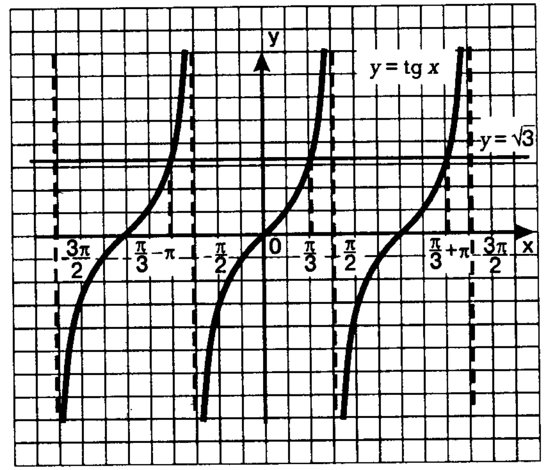


Рис. 64

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Пример 2. Построить график функции $y = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Для начала разберемся с главной ветвью тангенсоиды.

1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (прямая $x = -\frac{\pi}{2}$ проведена на рис. 65 пунктиром).

2) «Привяжем» функцию $y = \mathrm{tg}\ x$ к новой системе координат — это будет график функции $y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, а точнее, главная ветвь искомого графика (рис. 65 — сплошная кривая).

3) Чтобы получить график функции $y = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, достаточно построенную ветвь отобразить симметрично относительно оси x (рис. 66).

4) Зная одну ветвь, можно построить весь график (рис. 67).

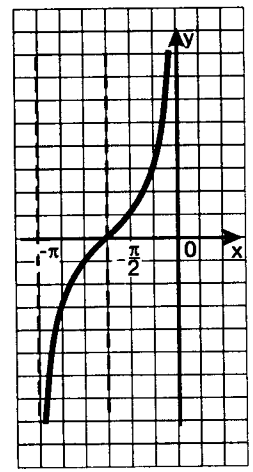


Рис. 65

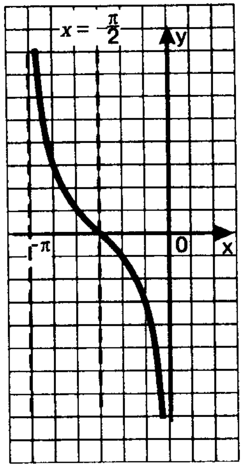


Рис. 66

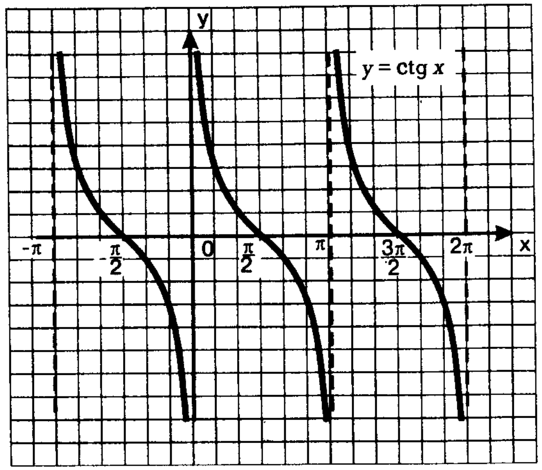


Рис. 67

На самом деле, на рис. 67 построен график функции $y = \operatorname{ctg} x$. Почему? Потому, что имеет место тождество (формула приведения)

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

График функции $y = \operatorname{ctg} x$, как и график функции $y = \operatorname{tg} x$, называют *тангенсоидой*. *Главной ветвью* графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ обычно называют ветвь, заключенную в полосе от $x = 0$ до $x = \pi$.

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = -1$.

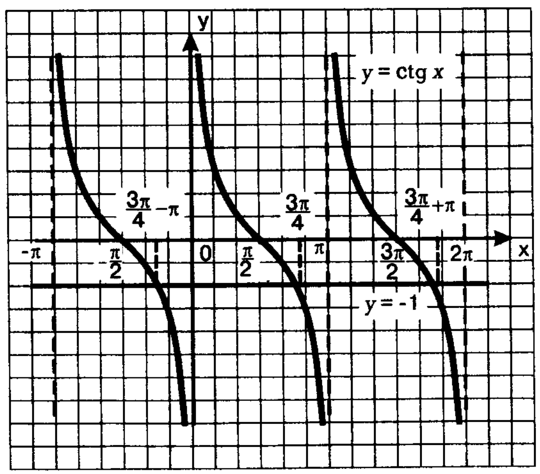


Рис. 68

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ — тангенсоиду и $y = -1$ — прямую, параллельную оси x. Они имеют бесконечно много точек пересечения (рис. 68), причем абсциссы этих точек отличаются друг от друга на πn. На главной ветви абсцисса соответствующей точки равна $\frac{3\pi}{4}$ (мы воспользовались известным соотношением: $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$), а все решения заданного уравнения можно охватить формулой $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы пополнили наш словарный запас математического языка следующими *терминами*:

числовая окружность;
косинус, синус, тангенс и котангенс числового аргумента;
радиан, радианная мера угла;
тригонометрические функции;
синусоида, тангенсоида;
периодическая функция, период функции, основной период;
формулы приведения.

Мы получили *соотношения* между градусной и радианной мерами угла:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\acute{p}ЛЬ; \quad 1\,\acute{p}ЛЬ = \frac{180^0}{\pi} \approx 57{,}3^\circ.$$

Мы исследовали *свойства функций* и научились строить *графики функций*:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x,$$
$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x.$$

Мы получили ряд *формул*:

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x;$$
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x; \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x;$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x; \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x;$$
$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x; \quad \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x;$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}; \quad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}; \quad 1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Мы сформулировали правило для запоминания *формул приведения*.

Мы пополнили список свойств функции, которые обычно включают в процедуру чтения графика, *новым свойством* — периодичностью функции и выявили геометрическую особенность графика периодической функции.

Мы научились строить *графики*:

функций $y=mf(x), y=f(kx)$ (в частности, $y=-f(x), y=f(-x)$) по известному графику функции $y=f(x)$;

гармонических колебаний.

Глава

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 16. ПЕРВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В главе 1 мы научились решать некоторые тригонометрические уравнения вида $\sin t=a$, $\cos t=a$, $\operatorname{tg} t=a$, $\operatorname{ctg} t=a$, где a — действительное число. Например, мы знаем, что уравнения $\sin t=a$ и $\cos t=a$ не имеют решений, если $a<-1$ или $a>1$, поскольку область значений функции $s=\sin t$, равно как и функции $s=\cos t$, есть отрезок $[-1, 1]$.

Напомним, как мы решали тригонометрические уравнения.

Пример 1. Решить уравнения: а) $\cos t=\frac{1}{2}$; б) $\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) Используем геометрическую модель — числовую окружность на координатной плоскости (рис. 69). Отметим на окружности точки M и P с абсциссой $\frac{1}{2}$ (они лежат на прямой $x=\frac{1}{2}$). Точка M соответствует числу $\frac{\pi}{3}$, а значит, всем числам вида $\frac{\pi}{3}+2\pi k$. Точка P соответствует числу $-\frac{\pi}{3}$, следовательно, и всем числам вида $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

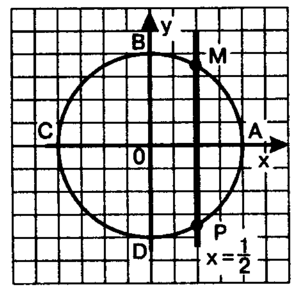


Рис. 69

В итоге получаем две серии решений уравнения:

$$t=\frac{\pi}{3}+2\pi k; \quad t=-\frac{\pi}{3}+2\pi k.$$

Обобщая, это можно записать так:

$$t=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k.$$

б) Используем геометрическую модель — числовую окружность на координатной плоскости (рис. 70). Отметим на окружности точки M и P с ординатой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (они лежат на прямой $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$). Точка M соответствует

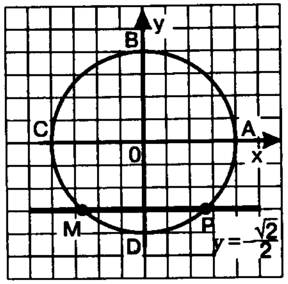


Рис. 70

значению $\frac{5\pi}{4}$, т.е. всем числам вида $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$.

Точка P соответствует значению $\frac{7\pi}{4}$, т.е. всем числам вида $\frac{7\pi}{4}+2\pi k$.

В итоге получаем две серии решений уравнения: $t=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$; $t=\frac{7\pi}{4}+2\pi k$.

Решали мы и некоторые уравнения вида $\text{tg}\ x=a$, $\text{ctg}\ x=a$, используя для этого графики функций $y=\text{tg}\ x$, $y=\text{ctg}\ x$. Так, в § 15 мы, решив уравнение $\text{tg}\ x=\sqrt{3}$, получили $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, а решив уравнение $\text{ctg}\ x=-1$, получили $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$.

Впрочем, и уравнения вида $\sin x=a$, $\cos x=a$ тоже можно решать графическим методом.

А как вы считаете, любое ли уравнение вида $\sin t=a$, $\cos t=a$, $\text{tg}\ t=a$, $\text{ctg}\ t=a$ можно решить графически или с помощью числовой окружности? Для ответа на этот вопрос рассмотрим пример.

Пример 2. Решить уравнения: а) $\cos t=0{,}4$; б) $\sin t=-0{,}3$; в) $\text{tg}\ x=2$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой 0,4 и записать, каким числам t они соответствуют. Абсциссу 0,4 имеют точки M и P (рис. 71), но каким числам t они соответствуют, мы не знаем. Решить это тригонометрическое уравнение мы пока не можем.

б) Нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $-0{,}3$ и записать, каким числам t они соответствуют. Ординату $-0{,}3$ имеют точки L и N (рис. 71), но каким числам t они соответствуют, мы не знаем. Решить это тригонометрическое уравнение мы тоже пока не можем.

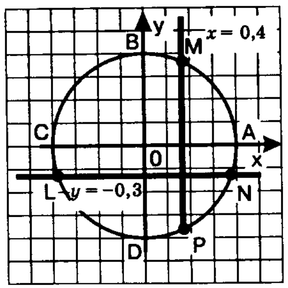


Рис. 71

в) Графики функций $y=\text{tg}\ x$ и $y=2$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x=x_0+\pi k$, где x_0 — абсцисса точки пересечения прямой $y=2$ с главной ветвью тангенсоиды (рис. 72). Но что это за число x_0, мы не знаем. Так что и тригонометрическое уравнение $\text{tg}\ x=2$ мы пока решить не можем.

К уравнениям из примера 2 мы вернемся после того, как заложим необходимую теоретическую базу.

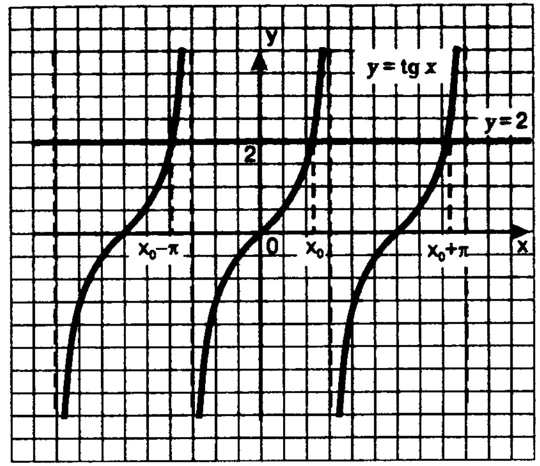


Рис. 72

Итак, пока мы в состоянии решить тригонометрическое уравнение вида $\sin t=a$, $\cos t=a$ только для конкретных значений a: $0,\ \pm1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; знаем мы также, что при $|a|>1$ эти уравнения не имеют решений. Уравнения вида $\text{tg}\ x=a$, $\text{ctg}\ x=a$ мы тоже в состоянии решить пока только для конкретных значений a: $0, \pm1, \pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Но даже с помощью этого небольшого запаса знаний мы уже теперь можем решать некоторые более сложные уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $2\sin^2 t-5\sin t+2=0$.

Решение. Введем новую переменную $z=\sin t$. Тогда уравнение примет вид $2z^2-5z+2=0$, откуда находим: $z_1=2, z_2=\frac{1}{2}$. Значит, либо $\sin t=2$, либо $\sin t=\frac{1}{2}$. Первое из этих уравнений не имеет решений (вспомните почему), а для второго с помощью числовой окружности (рис. 73) находим две серии решений:

$$t=\frac{\pi}{6}+2\pi k;\quad t=\frac{5\pi}{6}+2\pi k.$$

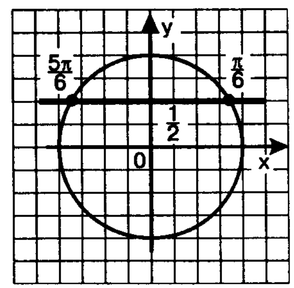


Рис. 73

Пример 4. Решить уравнение $\cos^2 t-\sin^2 t-\cos t=0$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\sin^2 t=1-\cos^2 t$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

$$\cos^2 t-(1-\cos^2 t)-\cos t=0.$$

После понятных преобразований получим:

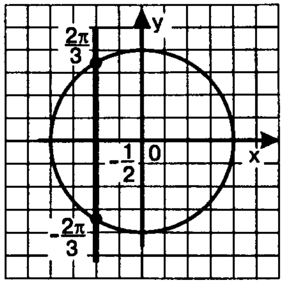


Рис. 74

$$2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0.$$

Введем новую переменную $z = \cos t$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - z - 1 = 0$, откуда находим $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, либо $\cos t = 1$, либо $\cos t = -\frac{1}{2}$. Первое из этих уравнений было решено в § 4 (см. пример 7): $t = 2\pi k$. Для второго уравнения с помощью числовой окружности (рис. 74) находим две серии решений:

$$t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \quad t = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$$

Ответ: $t = 2\pi k$; $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

§ 17. АРККОСИНУС. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $\cos t = a$

В предыдущем параграфе мы отметили, что уравнение вида $\cos t = a$ для одних значений a мы решать умеем, а для других — нет. Так, для уравнения $\cos t = -\frac{1}{2}$ имеем (см. пример 4 в § 16) $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; а для уравнения $\cos t = 1$, как нам известно еще из примера 7 § 4, $t = 2\pi k$.

Теперь рассмотрим уравнение $\cos t = \frac{2}{5}$ (мы не смогли его решить в примере 2 § 16). С помощью числовой окружности получаем (рис. 75):

$$t = t_1 + 2\pi k; \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AM, а $t_2 = -t_1$.

Встретившись впервые с подобной ситуацией, математики поняли, что надо придумать способ ее описания на математическом языке. Они ввели в рассмотрение новый символ $\arccos\frac{2}{5}$ (читается «арккосинус двух пятых»; «arcus» — дуга по-латыни, сравните со словом «арка») и с помощью этого символа таинственные корни t_1 и t_2 уравнения $\cos t = \frac{2}{5}$ записали так:

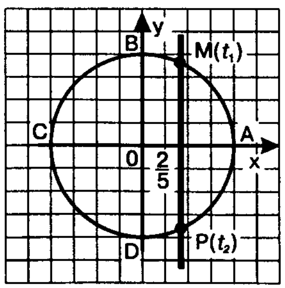


Рис. 75

$$t_1 = \arccos\frac{2}{5}, \quad t_2 = -\arccos\frac{2}{5}.$$

Теперь все корни уравнения $\cos t = \frac{2}{5}$ можно описать двумя формулами:

$$t = \arccos\frac{2}{5} + 2\pi k, \quad t = -\arccos\frac{2}{5} + 2\pi k$$

или, обобщая, одной формулой:

$$t = \pm\arccos\frac{2}{5} + 2\pi k.$$

Что же такое $\arccos\frac{2}{5}$? Это — число (длина дуги AM), косинус которого равен $\frac{2}{5}$ и которое принадлежит первой четверти числовой окружности — отрезку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Замечание. Символ $\arccos\frac{2}{5}$, введенный математиками, содержит новый математический знак (arc), напоминание об исходной функции $\cos t$ (arccos) и, наконец, напоминание о правой части уравнения, в приведенном нами случае о числе $\frac{2}{5}$. Вот так в итоге и появился символ $\arccos\frac{2}{5}$ (состоящий как бы из трех частей).

Теперь рассмотрим уравнение $\cos t = -\frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 76) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k; \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AM, а $t_2 = -t_1$. Математики обозначают число t_1 символом $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$ и записывают все решения уравнения $\cos t = -\frac{2}{5}$ следующим образом:

$$t = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k, \quad t = -\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k$$

или короче:

$$t = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$

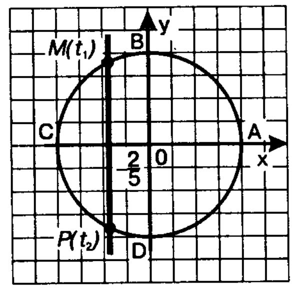


Рис. 76

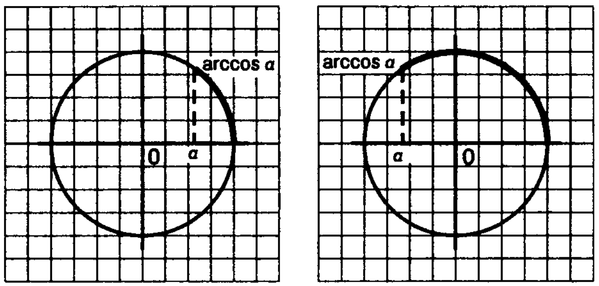
Что же такое $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$? Это — число (длина дуги AM), косинус которого равен $-\frac{2}{5}$ и которое принадлежит второй четверти числовой окружности — отрезку $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Сформулируем определение арккосинуса в общем виде.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то **arccos *a*** (арккосинус a) — это такое число из отрезка $[0, \pi]$, косинус которого равен a (рис. 77).

Итак,

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{если } |a| \leqslant 1, \textbf{ то} \\ \arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = a; \\ 0 \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}\end{array}}$$



а *б*

Рис. 77

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\cos t = a$:

Если** $|a| \leqslant 1$, **то уравнение** $\cos t = a$ **имеет решения:

$$\boxed{t = \pm \arccos a + 2\pi k.}$$

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться не полученной общей формулой, а более простыми соотношениями:

если $\cos t = 0$, $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

если $\cos t = 1$, $t = 2\pi k$;

если $\cos t = -1$, $t = \pi + 2\pi k$.

Замечание. Во всех этих формулах, если не оговорено противное, предполагается, что $k \in Z$. Об этом мы уже договорились выше.

Пример 1. Вычислить:

а) $\arccos \frac{1}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\arccos 0$; г) $\arccos 1$.

Решение. а) Положим $\arccos \frac{1}{2} = t$. Тогда $\cos t = \frac{1}{2}$ и $t \in [0, \pi]$. Значит, $t = \frac{\pi}{3}$, поскольку $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$. Итак, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

б) Положим $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = t$. Тогда $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t \in [0, \pi]$. Значит, $t = \frac{3\pi}{4}$, поскольку $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$. Итак, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

в) Положим $\arccos 0 = t$. Тогда $\cos t = 0$ и $t \in [0, \pi]$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$. Итак, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

г) Положим $\arccos 1 = t$. Тогда $\cos t = 1$ и $t \in [0, \pi]$. Значит, $t = 0$, поскольку $\cos 0 = 1$ и $0 \in [0, \pi]$. Итак, $\arccos 1 = 0$.

Теорема. ***Для любого*** $a \in [-1, 1]$ ***выполняется равенство*** $\arccos a + \arccos(-a) = \pi$.

Доказательство. Будем считать для определенности, что $a > 0$. Отметим $\arccos a$ на числовой окружности — это длина дуги AM и $\arccos(-a)$ — длина дуги AP (рис. 78). Дуги AM и PC симметричны относительно вертикального диаметра окружности, значит, длины этих дуг равны. Получаем:

$$\arccos a + \arccos(-a) = AM + AP = PC + AP = AC = \pi.$$

На практике полученное соотношение удобнее использовать в следующем виде:

$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \text{ где } 0 \leqslant a \leqslant 1.}$$

При этом учитывают, что в случае, когда $a > 0$, значения $\arccos a$ принадлежат первой четверти числовой окружности.

Например, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Такой же результат был получен выше при решении примера 1б.

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos t = \frac{2}{7}$;

г) $\cos t = -1{,}2$.

Решение. а) Составим формулу решений:

$$t = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k.$$

Вычислим значение арккосинуса: $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

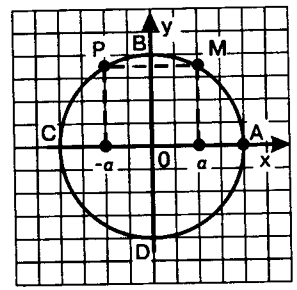


Рис. 78

Подставим найденное значение в формулу решений:

$$t=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k.$$

б) Составим формулу решений:

$$t=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k.$$

Вычислим значение арккосинуса:

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}.$$

Подставим найденное значение в формулу решений:

$$t=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k.$$

в) Составим формулу решений:

$$t=\pm\arccos\frac{2}{7}+2\pi k.$$

Вычислить значение арккосинуса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

г) Так как $-1{,}2<-1$, то уравнеиие $\cos t=-1{,}2$ не имеет решений (переходить здесь к арккосинусу не имеет смысла).

Пример 3. Решить неравенства: а) $\cos t>\frac{1}{2}$; б) $\cos t>0{,}3$; в) $\cos t<-0{,}3$.

Решение. а) Учтем, что $\cos t$ — абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам надо найти такие точки $M(t)$, лежащие на окружности, которые удовлетворяют неравенству $x>\frac{1}{2}$. Прямая $x=\frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках K и P (рис. 79). Неравенству $x>\frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги KP. Дуга KP — это дуга с началом в точке K и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные «имена» точек K и P в этом случае — соответственно $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$. Значит, ядром аналитической записи дуги KP является неравенство: $-\frac{\pi}{3}<t<\frac{\pi}{3}$, а сама аналитическая запись дуги KP имеет вид: $-\frac{\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{\pi}{3}+2\pi k.$

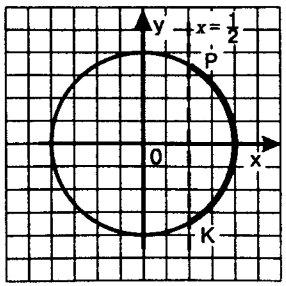


Рис. 79

б) Прямая $x=0{,}3$ пересекает числовую окружность в двух точках K и P (рис. 80). Неравенству $x>0{,}3$ соответствуют точки открытой дуги KP. Главные «имена» точек K и P в этом случае — соответственно $-\arccos 0{,}3$ и $\arccos 0{,}3$. Значит, ядром аналитической записи дуги KP является неравенство:

$$-\arccos 0{,}3<t<\arccos 0{,}3,$$

а сама аналитическая запись дуги KP имеет вид

$$-\arccos 0{,}3+2\pi k<t<\arccos 0{,}3+2\pi k.$$

в) Прямая $x=-0{,}3$ пересекает числовую окружность в двух точках K и P (рис. 81). Неравенству $x<-0{,}3$ соответствуют точки открытой дуги PK. Дуга PK — это дуга с началом в точке P и концом в точке K при движении по окружности против часовой стрелки. Главные «имена» точек P и K — соответственно $\arccos(-0{,}3)$ и $2\pi-\arccos(-0{,}3)$. Значит, ядром аналитической записи дуги PK является неравенство:

$$\arccos(-0{,}3)<t<2\pi-\arccos(-0{,}3),$$

а сама аналитическая запись дуги PK имеет вид

$$\arccos(-0{,}3)+2\pi k<t<2\pi-\arccos(-0{,}3)+2\pi k.$$

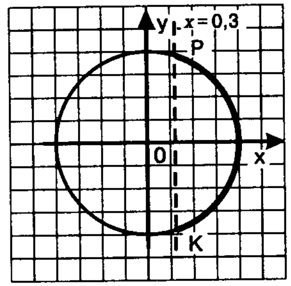


Рис. 80

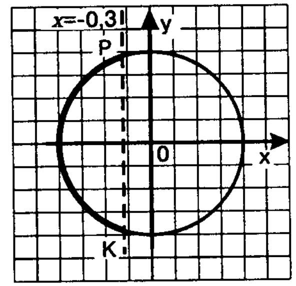


Рис. 81

§ 18. АРКСИНУС. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $\sin t=a$

Рассмотрим уравнение $\sin t=\frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 82) получаем:

$$t=t_1+2\pi k;\quad t=t_2+2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AM, а t_2 — длина дуги AP. Поскольку $AP=AC-PC$, $AC=\pi$, а $PC=AM$, то получаем, что $t_2=\pi-t_1$.

Математики ввели для числа t_1 новый символ: $\arcsin\frac{2}{5}$ (читается «арксинус двух пятых»). С его помощью все корни уравнения $\sin t=\frac{2}{5}$ можно описать двумя формулами:

$$t=\arcsin\frac{2}{5}+2\pi k,\quad t=\pi-\arcsin\frac{2}{5}+2\pi k.$$

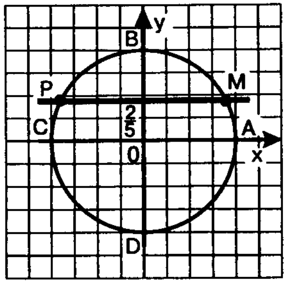


Рис. 82

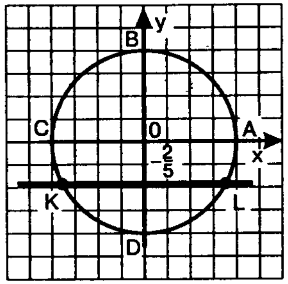


Рис. 83

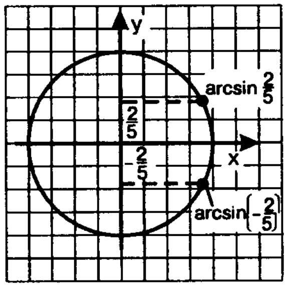


Рис. 84

Что же такое $\arcsin \frac{2}{5}$? Это — число (длина дуги AM), синус которого равен $\frac{2}{5}$ и которое принадлежит первой четверти числовой окружности — отрезку $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь рассмотрим уравнение $\sin t = -\frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 83) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k;\quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги LA, взятая со знаком минус, t_2 — длина дуги KA, взятая тоже со знаком минус. Математики обозначили число t_1 символом $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$ и сразу обратили внимание на два обстоятельства.

Первое: дуги AM и AL (см. рис. 82 и 83) равны по длине и противоположны по направлению. Значит,

$$\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) = -\arcsin\left(\frac{2}{5}\right) \text{(см. рис. 84).}$$

Второе: $AK = AC + CK = AC + LA = = AC - AL = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$. Значит, и в этом случае получается, что $t_2 = \pi - t_1$. Это дает возможность записать все решения уравнения $\sin t = -\frac{2}{5}$ следующим образом:

$$t = \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k,\quad t = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$

Что же такое $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$? Это — число, синус которого равен $-\frac{2}{5}$ и которое принадлежит четвертой четверти числовой окружности — отрезку $\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$.

Сформулируем определение арксинуса в общем виде.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то **arcsin *a* (арксинус *a*)** — это такое число, из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a (см. рис. 85).

Итак,

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{если } |a| \leqslant 1, \textbf{ то} \\ \arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a, \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \end{array}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\sin t = a$:

Если $|a| \leqslant 1$, то уравнение $\sin t = a$ имеет две серии решений:

$$\boxed{t = \arcsin a + 2\pi k;\quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi k.}$$

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться не полученной общей формулой, а более простыми соотношениями:

если $\sin t = 0$, то $t = \pi k$;

если $\sin t = 1$, то $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

если $\sin t = -1$, то $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

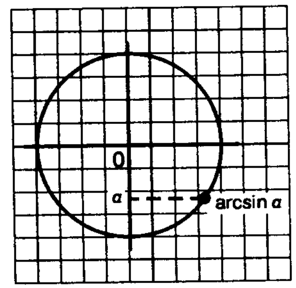


Рис. 85

Выше мы отметили, что $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) = -\arcsin\frac{2}{5}$. Вообще, для любого $a \in [-1,\ 1]$ справедлива формула (см. рис. 86)

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a.}$$

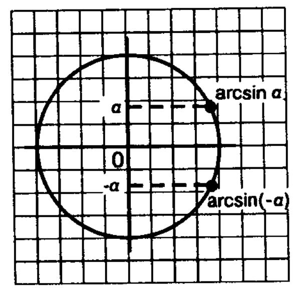


Рис. 86

Пример 1. Вычислить:

а) $\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\arcsin 0$; г) $\arcsin 1$.

Решение. а) Положим $\arcsin\frac{1}{2} = t$. Тогда $\sin t = \frac{1}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) Положим $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=t$. Тогда $\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t=-\frac{\pi}{4}$, поскольку $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Итак, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$.

в) Положим $\arcsin 0=t$. Тогда $\sin t=0$ и $t\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t=0$, поскольку $\sin 0=0$ и $0\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Итак, $\arcsin 0=0$.

г) Положим $\arcsin 1=t$. Тогда $\sin t=1$ и $t\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t=\frac{\pi}{2}$, поскольку $\sin\frac{\pi}{2}=1$ и $\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$. ◀■

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin t=\frac{2}{7}$; г) $\sin t=-1{,}2$.

Решение. а) Составим формулы решений:

$$t=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k;\quad t=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k.$$

Вычислим значение арксинуса: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$t=\frac{\pi}{3}+2\pi k;\quad t=\frac{2\pi}{3}+2\pi k.$$

б) Составим формулы решений:

$$t=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k;\quad t=\pi-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k.$$

Вычислим значение арксинуса:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$t=-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\quad t=\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi k,\ \text{т.е. } t=\frac{4\pi}{3}+2\pi k.$$

в) Составим формулы решений:

$$t=\arcsin\frac{2}{7}+2\pi k;\quad t=\pi-\arcsin\frac{2}{7}+2\pi k.$$

Вычислить значение арксинуса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

г) Так как $-1{,}2<-1$, то уравнение $\sin t=-1{,}2$ не имеет решений (переходить здесь к арксинусу не имеет смысла). ◀■

Пример 3. Решить неравенства:

а) $\sin t>\frac{1}{2}$; б) $\sin t>0{,}3$; в) $\sin t<0{,}3$.

Решение. а) Учтем, что $\sin t$ — ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам надо найти такие точки $M(t)$, лежащие на окружности, которые удовлетворяют неравенству $y>\frac{1}{2}$. Прямая $y=\frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках K и P (рис. 87). Неравенству $y>\frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги KP. Главные «имена» точек K и P — $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Значит, ядром аналитической записи дуги KP является неравенство $\frac{\pi}{6}<t<\frac{5\pi}{6}$, а сама аналитическая запись дуги KP имеет вид:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<t<\frac{5\pi}{6}+2\pi k.$$

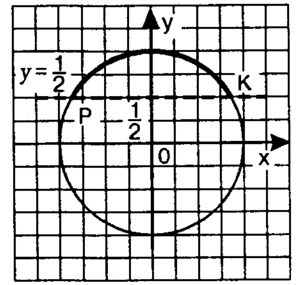


Рис. 87

б) Прямая $y=0{,}3$ пересекает числовую окружность в двух точках K и P (рис. 88). Неравенству $y>0{,}3$ соответствуют точки открытой дуги KP. Главные «имена» точек K и P — соответственно $\arcsin 0{,}3$ и $\pi-\arcsin 0{,}3$. Значит, решение неравенства имеет вид:

$$\arcsin 0{,}3+2\pi k<t<\pi-\arcsin 0{,}3+2\pi k.$$

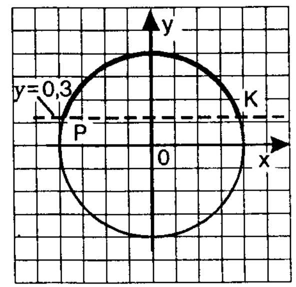


Рис. 88

в) Неравенству $y<0{,}3$ соответствуют точки открытой дуги PK (рис. 89). Главные «имена» точек P и K в этом случае — соответственно $-\pi-\arcsin 0{,}3$ и $\arcsin 0{,}3$. Значит, решение неравенства имеет вид:

$$-\pi-\arcsin 0{,}3+2\pi k<t<\arcsin 0{,}3+2\pi k.$$ ◀■

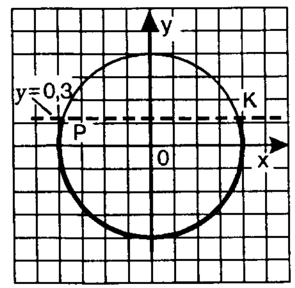


Рис. 89

Полученные выше две формулы для решения уравнения $\sin t=a$:

$$t=\arcsin a+2\pi k;\quad t=\pi-\arcsin a+2\pi k$$

можно объединить одной формулой. Перепишем эти формулы следующим образом:

$$t=\arcsin a+\pi\cdot 2k,$$
$$t=-\arcsin a+\pi(2k+1).$$

Замечаем, что если перед $\arcsin a$ стоит знак «+», то у числа π множителем является четное число $2k$ (см. первую строку); если же перед $\arcsin a$ стоит знак «—», то у числа π множителем является нечетное число $(2k+1)$ (см. вторую строку). Это наблюдение позволяет записать общую формулу для решения уравнения $\sin t = a$:

$$\boxed{t = (-1)^n \arcsin a + \pi n.}$$

Почему эта формула общая? Да потому, что при четном n $(n = 2k)$ из нее получается первая из написанных выше формул, а при нечетном n $(n = 2k+1)$ — вторая из написанных выше формул.

С помощью полученной общей формулы можно по-другому записать решения уравнений примера 2. Так, для уравнения $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем $t = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$. Для уравнения $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем $t = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n$. Это выражение можно записать иначе, выполнив следующие преобразования:

$$(-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) = (-1)^n (-1) \frac{\pi}{3} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3}.$$

В итоге получаем $t = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n$.

Для рассмотренного в примере 2 в) уравнения $\sin t = \frac{2}{7}$ ответ можно записать так: $t = (-1)^n \arcsin \frac{2}{7} + \pi n$.

Теперь мы можем найти решения уравнения, которое не смогли решить в примере 2 § 16: $\sin t = -0{,}3$. Имеем

$$t = (-1)^n \arcsin(-0{,}3) + \pi n \text{ или } t = (-1)^{n+1} \arcsin 0{,}3 + \pi n.$$

Замечание. Вы, наверное, обратили внимание на то, что мы здесь и в § 17, говоря о решении уравнений и неравенств, все время обозначали переменную буквой t, а не x, к чему вы, естественно, больше привыкли. Это дало нам возможность более комфортно использовать для решения уравнений и неравенств числовую окружность. Теперь мы имеем готовые формулы для решения уравнений $\sin t = a$, $\cos t = a$. Значит, мы можем обойтись без числовой окружности. А коли так, то в дальнейшем, говоря о тригонометрических уравнениях и неравенствах, вернемся к более традиционному обозначению переменной — обозначению x.

Пример 4. Вычислить: а) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; б) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Решение. а) Воспользовавшись определением арксинуса, получим: $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

б) Положим $\arcsin\frac{3}{5} = t$. Тогда $\sin t = \frac{3}{5}$, причем $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Требуется вычислить $\cos t$.

Имеем:

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t;$$
$$\cos^2 t = 1 - \frac{9}{25};$$
$$\cos^2 t = \frac{16}{25};$$
$$\cos t = \frac{4}{5} \text{ или } \cos t = -\frac{4}{5}.$$

Поскольку t принадлежит первой четверти, из двух указанных выше возможностей выбираем первую: $\cos t = \frac{4}{5}$.

Итак, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

в) $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$.

Итак, $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{4}$.

Ответ: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{3}{4}$.

§ 19. АРКТАНГЕНС И АРККОТАНГЕНС. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

В примере 2 §16 мы не смогли решить три уравнения:

$$\text{а) } \cos t = \frac{2}{5}; \quad \text{б) } \sin t = -0{,}3; \quad \text{в) } \operatorname{tg} x = 2.$$

Два из них мы уже решили — первое в § 17 и второе в § 18, для этого нам пришлось ввести понятия арккосинуса и арксинуса. Рассмотрим третье уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_1 + \pi k$, где x_1 — абсцисса точки пересечения прямой $y = 2$ с главной ветвью тангенсоиды (рис. 90). Для числа x_1 математики придумали обозначение $\operatorname{arctg} 2$ (читается «арктангенс двух»). Тогда все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ можно описать формулой $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$.

Что же такое arctg 2? Это — число, тангенс которого равен 2 и которое принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим теперь уравнение $\operatorname{tg} x = -2$.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -2$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_2 + \pi k$, где x_2 — абсцисса точки пересечения прямой $y = -2$ с главной ветвью тангенсоиды. Для числа x_2 математики придумали обозначение $\operatorname{arctg}(-2)$. Тогда все корни уравнения $\operatorname{tg} x = -2$ можно описать формулой $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k$.

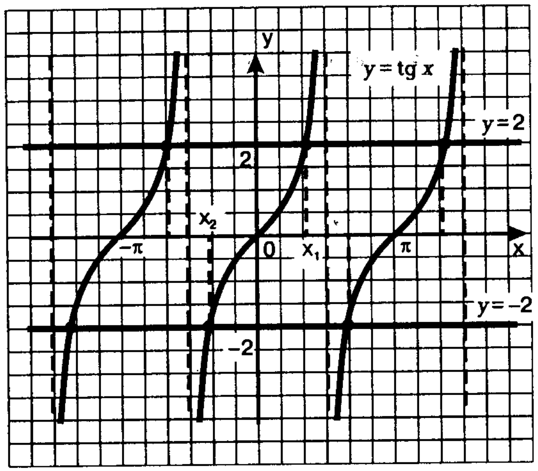


Рис. 90

Что же такое arctg(−2)? Это — число, тангенс которого равен −2 и которое принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Обратите внимание (см. рис. 90): $x_2 = -x_1$. Это значит, что $\operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg} 2$.

Сформулируем определение арктангенса в общем виде.

Определение 1. arctg *a* (арктангенс *a*) — это такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен *a*.

Итак,

$$\boxed{\operatorname{arctg} a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = a; \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\operatorname{tg} x = a$: ***уравнение*** $\operatorname{tg} x = a$ ***имеет решения***

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi k.}$$

Выше мы отметили, что $\operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg} 2$. Вообще, для любого значения a справедлива формула

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.}$$

Пример 1. Вычислить: а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $\operatorname{arctg} 0$.

Решение. а) Положим $\operatorname{arctg} 1 = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = 1$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $x = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

б) Положим $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $x = -\frac{\pi}{6}$, поскольку $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Можно было рассуждать и по-другому:
$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

в) Положим $\operatorname{arctg} 0 = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = 0$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $x = 0$, поскольку $\operatorname{tg} 0 = 0$ и $0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак, $\operatorname{arctg} 0 = 0$. ◀

Пример 2. Решить уравнения: а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -1{,}2$.

Решение. а) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k$.

Находим, что $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; подставив найденное значение в формулу решений, получим:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

б) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi k$.

Находим, что $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$; подставив найденное значение в формулу решений, получаем:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k.$$

в) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg}(-1{,}2) + \pi k$.

Вычислить значение арктангенса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$; б) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$; в) $x = \operatorname{arctg}(-1{,}2) + \pi k$.

Пример 3. Решить неравенства: а) $\operatorname{tg} x < 1$; б) $\operatorname{tg} x > -2$.

Неравенство вида $\operatorname{tg} x < a$ (или $\operatorname{tg} x > a$) можно решать графически, придерживаясь следующего плана:

1) построить тангенсоиду $y = \operatorname{tg} x$ и прямую $y = a$;

2) выделить для главной ветви тангенсоиды промежуток оси x, на котором выполняется заданное неравенство;

3) учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, записать ответ в общем виде.

Применим этот план к решению заданных неравенств.

Решение. а) Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$. На главной ветви тангенсоиды они пересекаются в точке $x = \frac{\pi}{4}$ (рис. 91).

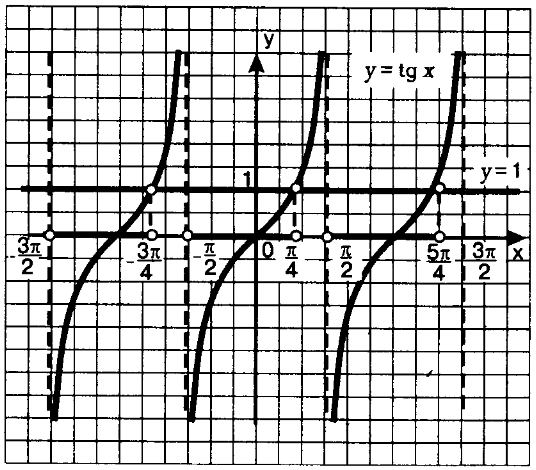


Рис. 91

Выделим промежуток оси x, на котором главная ветвь тангенсоиды расположена ниже прямой $y = 1$, — это интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, делаем вывод, что заданное неравенство выполняется на любом интервале вида:

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n\right).$$

Объединение всех таких интервалов и представляет собой общее решение заданного неравенства.

Ответ можно записать и по-другому:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

б) Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -2$. На главной ветви тангенсоиды (рис. 92) они пересекаются в точке $x = \operatorname{arctg}(-2)$.

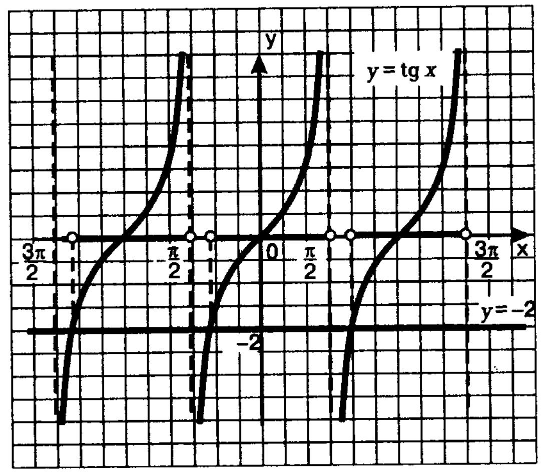


Рис. 92

Выделим промежуток оси x, на котором главная ветвь тангенсоиды расположена выше прямой $y = -2$, — это интервал $\left(\operatorname{arctg}(-2), \frac{\pi}{2}\right)$.

Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, делаем вывод, что заданное неравенство выполняется на любом интервале вида:

$$\left(\operatorname{arctg}(-2) + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right).$$

Ответ можно записать в виде двойного неравенства:

$$\operatorname{arctg}(-2) + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Рассмотрим уравнение $\operatorname{ctg} x = a$, где $a > 0$. Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = a$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид: $x = x_1 + \pi k$, где $x_1 = \operatorname{arcctg} a$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = a$ с главной ветвью тангенсоиды (рис. 93). Значит, $\operatorname{arcctg} a$ — это число, котангенс которого равен a и которое принадлежит интервалу $(0, \pi)$; на этом интервале строится главная ветвь графика функции $y = \operatorname{ctg} x$.

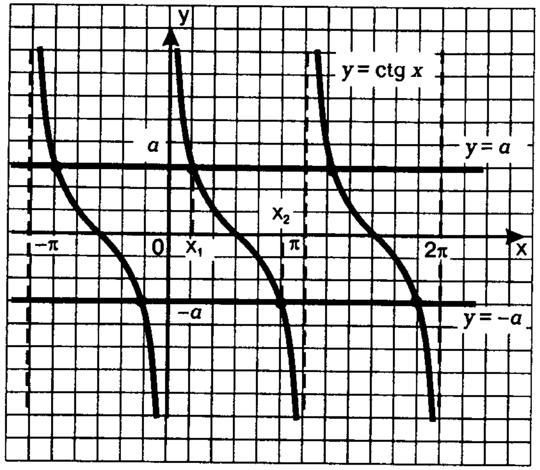


Рис. 93

На рис. 93 представлена и графическая иллюстрация решения уравнения $\operatorname{ctg} x = -a$. Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = -a$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_2 + \pi k$, где $x_2 = \operatorname{arcctg}(-a)$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = -a$ с главной ветвью тангенсоиды. Значит, $\operatorname{arcctg}(-a)$ — это число, котангенс которого равен $-a$ и которое принадлежит интервалу $(0, \pi)$; на этом интервале строится главная ветвь графика функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Определение 2. arcctg *a* (арккотангенс *a*) — это такое число из интервала $(0, \pi)$, котангенс которого равен a.

Итак,

$$\boxed{\operatorname{arcctg} a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = a; \\ 0 < x < \pi. \end{cases}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\operatorname{ctg} x = a$: ***уравнение*** $\operatorname{ctg} x = a$ ***имеет решения:***

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi k.}$$

Обратите внимание (см. рис. 93): $x_2 = \pi - x_1$. Это значит, что

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.}$$

Пример 4. Вычислить:

а) $\operatorname{arcctg} 1$; б) $\operatorname{arcctg}(-1)$; в) $\operatorname{arcctg} 0$.

Решение. а) Положим, $\operatorname{arcctg} 1 = x$. Тогда $\operatorname{ctg} x = 1$ и $x \in (0, \pi)$. Значит, $x = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (0, \pi)$. Итак, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

б) $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Итак, $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

в) Положим, $\operatorname{arcctg} 0 = x$. Тогда $\operatorname{ctg} x = 0$ и $x \in (0, \pi)$. Значит, $x = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$. Итак, $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ практически всегда можно преобразовать к виду $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$. Исключение составляет уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$. Но в этом случае, воспользовавшись тем, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, можно перейти к уравнению $\cos x = 0$. Таким образом, уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$ самостоятельного интереса не представляет.

§ 20. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменная содержится под знаками тригонометрических функций. К их числу прежде всего относятся *простейшие* тригонометрические уравнения, т.е. уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a — действительное число. К настоящему моменту мы знаем, что:

1) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\cos x = a$ имеют вид:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n;$$

2) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\sin x = a$ имеют вид:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n;$$

или, что то же самое,

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad x = \pi - \arcsin a + 2\pi k;$$

3) если $|a| > 1$, то уравнения $\cos x = a$, $\sin x = a$ не имеют решений;

4) решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ для любого значения a имеют вид:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n;$$

5) особо важны частные случаи:

$$\sin x = 0, \ x = \pi n;$$

$$\sin x = 1, \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\cos x = 1,\ x = 2\pi n;$$

$$\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n.$$

Во всех перечисленных формулах подразумевается, что параметр (n, k и т.д.) принимает любые целочисленные значения ($n \in Z$, $k \in Z$).

К простейшим относят обычно и уравнения вида $T(kx+m) = a$, где T — знак какой-либо тригонометрической функции.

Пример 1. Решить уравнения:

$$\text{а) } \sin 2x = \frac{1}{2};\quad \text{б) } \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \text{в) } \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Решение. а) Введем новую переменную $t = 2x$, тогда $\sin t = \frac{1}{2}$, откуда получаем: $t = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$.

Имеем $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Значит, $t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

Возвращаясь к переменной x, получаем: $2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. Осталось обе части этого равенства разделить почленно на 2; получим:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Заметим, что при наличии некоторого опыта можно не вводить промежуточную переменную $t = 2x$, а сразу переходить от уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$ к уравнению $2x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$. Именно так мы и будем действовать в дальнейшем.

б) Мы знаем, что решения уравнения $\cos t = a$ имеют вид: $t = \pm \arccos a + 2\pi n$. Для нашего примера это означает, что $3x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n$. Вычислим $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, воспользовавшись соответствующей формулой для арккосинуса (см. § 17):

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Значит, $3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, откуда находим, что

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}.$$

в) Мы знаем, что решения уравнения $\operatorname{tg} t = a$ имеют вид $t = \operatorname{arctg} a + \pi n$. Для нашего примера это означает, что $4x - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n$. Вычислив $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$, получим $\frac{\pi}{6}$. Таким образом,

$$4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n;\qquad 4x = \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}.$$

Пример 2. Найти те корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$, которые принадлежат отрезку $[0, \pi]$.

Решение. Сначала решим уравнение в общем виде: $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ (см. пример 1а). Далее придадим параметру n последовательно значения $0, 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots$ и подставим эти значения в общую формулу корней.

Если $n = 0$, то $x = (-1)^0 \frac{\pi}{12} + 0 = \frac{\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0, \pi]$.

Если $n = 1$, то $x = (-1)^1 \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0, \pi]$.

Если $n = 2$, то $x = (-1)^2 \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$. Это число не принадлежит заданному отрезку $[0, \pi]$. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = 3, 4, \ldots$

Пусть теперь $n = -1$. Тогда $x = (-1)^{-1} \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12}$.

Это число не принадлежит заданному отрезку $[0, \pi]$. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = -2, -3, \ldots$

На рис. 94 представлена геометрическая интерпретация проведенных рассуждений.

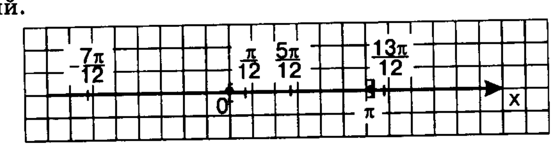


Рис. 94

Итак, заданному отрезку $[0, \pi]$ принадлежат те корни уравнения, которые получаются из общей формулы при следующих значениях параметра n: $n = 0$, $n = 1$. Эти корни таковы: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$.

Ответ: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$.

Пример 3. Найти те корни уравнения $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, которые принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Решение. Сначала решим уравнение в общем виде:

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$$

(см. пример 1б). Далее придадим параметру n последовательно значения 0, 1, 2, ..., −1, −2, ... и подставим эти значения в общую формулу корней.

Если $n = 0$, то $x = \pm\frac{\pi}{4} + 0 = \pm\frac{\pi}{4}$. Оба эти числа: $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$ принадлежат заданному отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Если $n = 1$, то $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$. Это значит, что либо $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$, либо $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$. Оба числа: $\frac{11\pi}{12}$ и $\frac{5\pi}{12}$ — принадлежат заданному отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Если $n = 2$, то $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}$. Это значит, что либо $x = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19\pi}{12}$, либо $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$. Оба числа: $\frac{19\pi}{12}$ и $\frac{13\pi}{12}$ — не принадлежат заданному отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, поскольку оба они больше числа π. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = 3, 4, \ldots$

Пусть $n = -1$. Тогда $x = \pm\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}$. Это значит, что либо $x = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{12}$, либо $x = -\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{11\pi}{12}$. Из этих двух значений заданному отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ принадлежит только первое: $x = -\frac{5\pi}{12}$, поскольку второе число, т.е. число $-\frac{11\pi}{12}$, меньше числа $-\frac{\pi}{2}$.

Не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = -2, -3, \ldots$

На рис. 95 представлена геометрическая интерпретация проведенных рассуждений.

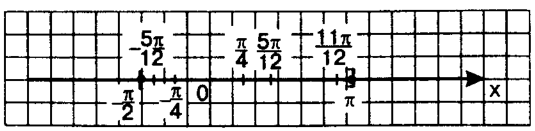


Рис. 95

Итак, заданному отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ принадлежат следующие корни уравнения $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$.

2. Два основных метода решения тригонометрических уравнений

Для решения тригонометрических уравнений чаще всего используются *два метода*: *введения новой переменной* и *разложения на множители*.

Вернемся к материалу § 16. Там в примере 3 мы решили тригонометрическое уравнение $2\sin^2 t - 5\sin t + 2 = 0$. Как мы это сделали? Ввели новую переменную $z = \sin t$, переписали уравнение в виде $2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$. В результате мы получили два простых уравнения: $\sin t = 2$; $\sin t = \frac{1}{2}$. Первое уравнение не имеет решений, а для второго нашли две серии решений: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ и установили (см. § 18), что эти две серии можно объединить одной формулой $t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

В том же § 16 в примере 4 мы решили тригонометрическое уравнение $\cos^2 t - \sin^2 t - \cos t = 0$. Как мы это сделали? Воспользовались тем, что $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ и заданное уравнение переписали в виде $\cos^2 t - (1 - \cos^2 t) - \cos t = 0$ и далее $2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$. Введя новую переменную $z = \cos t$, получили $2z^2 - z - 1 = 0$, откуда $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, либо $\cos t = 1$, либо $\cos t = -\frac{1}{2}$. В итоге получили две серии решений: $t = 2\pi k$; $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

Рассмотрим еще один пример на использование *метода введения новой переменной* при решении тригонометрических уравнений.

Пример 4. Решить уравнение $\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 3\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = 4$.

Решение. Поскольку $\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$, есть смысл ввести новую переменную $z = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Это позволит переписать уравнение в более простом виде: $z + \frac{3}{z} = 4$.

Имеем:

$$z^2+3=4z,$$
$$z^2-4z+3=0,$$
$$z_1=1,\ z_2=3.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем два уравнения: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$ или $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3$. Из первого уравнения находим: $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}1+\pi n$, т.е. $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$. Из второго уравнения находим: $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}3+\pi n$, $x=2\operatorname{arctg}3+2\pi n$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\operatorname{arctg}3+2\pi n$.

Теперь поговорим о втором методе решения тригонометрических уравнений — *методе разложения на множители*. Смысл этого метода вам знаком: если уравнение $f(x)=0$ возможно преобразовать к виду $f_1(x)\cdot f_2(x)=0$, то задача сводится к решению двух уравнений (обычно говорят — к решению *совокупности уравнений*):

$$f_1(x)=0;\ f_2(x)=0.$$

Пример 5. Решить уравнение $\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)\left(\cos x+\frac{2}{5}\right)=0.$

Решение. Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\sin x=\frac{1}{3};\ \cos x=-\frac{2}{5}.$$

Из этих уравнений находим соответственно:

$$x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n;\ x=\pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)+2\pi n.$$

Пример 6. Решить уравнение $2\sin x\cos 5x-\cos 5x=0$.

Решение. Имеем $\cos 5x(2\sin x-1)=0$. Значит, приходим к совокупности уравнений:

$$\cos 5x=0;\quad \sin x=\frac{1}{2}.$$

Из первого уравнения находим: $5x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$.

Из второго уравнения находим: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Замечание. Учтите, что переход от уравнения $f_1(x)\cdot f_2(x)=0$ к совокупности уравнений: $f_1(x)=0; f_2(x)=0$ не всегда безопасен. Рассмотрим, например, уравнение $\operatorname{tg}x(\sin x-1)=0$. Из уравнения $\operatorname{tg}x=0$ находим $x=\pi n$; из уравнения $\sin x=1$ находим $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$. Но включить обе серии решений в ответ нельзя. Дело в том, что при значениях $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, входящий в заданное уравнение множитель $\operatorname{tg}x$ не имеет смысла, т.е. значения $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ не принадлежат области определения уравнения (области допустимых значений уравнения — ОДЗ), это — посторонние корни.

3. Однородные тригонометрические уравнения

Здесь мы познакомимся с довольно часто встречающимися на практике тригонометрическими уравнениями специального вида.

Определение. Уравнение вида: $a\sin x+b\cos x=0$ называют **однородным** тригонометрическим уравнением **первой степени**; уравнение вида: $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ называют **однородным** тригонометрическим уравнением **второй степени**.

Сначала поговорим о решении однородных тригонометрических уравнений первой степени, причем рассмотрим только самый общий случай, когда оба коэффициента a и b отличны от нуля, так как, если $a=0$, уравнение принимает вид $b\cos x=0$, т.е. $\cos x=0$ — такое уравнение отдельного обсуждения не заслуживает; аналогично при $b=0$ получаем $\sin x=0$, что тоже не требует отдельного обсуждения.

Итак, дано уравнение $a\sin x+b\cos x=0$, где $a\neq 0, b\neq 0$. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим:

$$\frac{a\sin x}{\cos x}+\frac{b\cos x}{\cos x}=\frac{0}{\cos x},\ \text{т.е. }\ a\operatorname{tg}x+b=0.$$

В итоге приходим к простейшему тригонометрическому уравнению

$$\operatorname{tg}x=-\frac{b}{a}.$$

Внимание! Вообще-то делить обе части уравнения на одно и то же выражение можно только в том случае, когда мы уверены, что это выражение нигде не обращается в нуль (на 0 делить нельзя). Уверены ли мы, что в нашем уравнении $\cos x$ отличен от нуля? Давайте проанализируем. Предположим, что $\cos x=0$. Тогда однородное уравнение $a\sin x+b\cos x=0$ примет вид $a\sin x=0$, т.е. $\sin x=0$ (вы ведь не забыли, что коэффициент a отличен от нуля). Получается, что и $\cos x=0$, и $\sin x=0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ обращаются в нуль в различных точках. Итак, в однородном тригонометрическом уравнении первой степени деление обеих частей уравнения на $\cos x$ — вполне благополучная операция.

Уравнения вида $a\sin mx+b\cos mx=0$ тоже называют однородными тригонометрическими уравнениями первой степени. Для их решения обе части уравнения делят почленно на $\cos mx$.

Пример 7. Решить уравнение $2\sin x-3\cos x=0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим:

$$2\operatorname{tg} x-3=0, \quad \operatorname{tg} x=\frac{3}{2}, \quad x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n.$$

Ответ: $x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n.$

Пример 8. Решить уравнение $\sin 2x+\cos 2x=0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos 2x$, получим:

$$\operatorname{tg} 2x+1=0, \quad \operatorname{tg} 2x=-1, \quad 2x=\operatorname{arctg}(-1)+\pi n,$$

$$2x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}.$

Рассмотрим теперь однородное тригонометрическое уравнение второй степени:

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0.$$

Если коэффициент a отличен от нуля, т.е. в уравнении содержится член $\sin^2 x$ с каким-то коэффициентом, отличным от нуля, то, рассуждая как и выше, нетрудно убедиться в том, что при интересующих нас значениях переменной $\cos x$ не обращается в нуль, а потому можно обе части уравнения разделить почленно на $\cos^2 x$. Что это даст? Смотрите:

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x}+\frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{0}{\cos^2 x},$$

т.е. $a\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{tg} x+c=0.$

Это — квадратное уравнение относительно новой переменной $z=\operatorname{tg} x$.

Пусть теперь в однородном тригонометрическом уравнении

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$$

коэффициент a равен 0, т.е. отсутствует член $a\sin^2 x$. Тогда уравнение принимает вид:

$$b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0.$$

Это уравнение можно решить методом разложения на множители:

$$\cos x\,(b\sin x+c\cos x)=0,$$

$$\cos x=0 \text{ или } b\sin x+c\cos x=0.$$

Получились два уравнения, которые мы с вами решать умеем.

Аналогично обстоит дело и в случае, когда $c=0$, т.е. когда однородное уравнение имеет вид $a\sin^2 x+b\sin x\cos x=0$ (здесь можно вынести за скобки $\sin x$).

Фактически мы выработали

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$:

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $a\sin^2 x$.

2. Если член $a\sin^2 x$ в уравнении содержится (т.е. $a\neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z=\operatorname{tg} x$.

3. Если член $a\sin^2 x$ в уравнении не содержится (т.е. $a=0$), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят $\cos x$.

Так же обстоит дело и в однородных уравнениях вида:

$$a\sin^2 mx+b\sin mx\cos mx+c\cos^2 mx=0.$$

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0.$$

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos^2 x$, получим $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+2=0$. Введя новую переменную $z=\operatorname{tg} x$, получим $z^2-3z+2=0$, откуда находим $z_1=1$, $z_2=2$. Значит, либо $\operatorname{tg} x=1$, либо $\operatorname{tg} x=2$. Из первого уравнения находим:

$$x=\operatorname{arctg} 1+\pi n, \text{ т.е. } x=\frac{\pi}{4}+\pi n.$$

Из второго уравнения находим: $x=\operatorname{arctg} 2+\pi n$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n;\quad x=\operatorname{arctg} 2+\pi n.$

Пример 10. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0.$$

Решение. Здесь отсутствует член вида $a\sin^2 x$, значит, делить обе части уравнения на $\cos^2 x$ нельзя. Решим уравнение методом разложения на множители. Имеем:

$$\cos x(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=0, \text{ т.е.}$$

$$\cos x=0 \text{ или } \sqrt{3}\sin x+\cos x=0.$$

Из первого уравнения находим $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Второе уравнение — однородное тригонометрическое уравнение первой степени. Решим его с помощью почленного деления обеих частей уравнения на $\cos x$:

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=0,$$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg} x+1=0;$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{-1}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } x=\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)+\pi n,\ x=-\frac{\pi}{6}+\pi n.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n;\quad x=-\frac{\pi}{6}+\pi n.$

В заключение рассмотрим более сложный пример.

Пример 11. Решить уравнение

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\,\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2$$

и выделить те его корни, которые принадлежат интервалу $(-\pi, \pi)$.

Решение. Чем это уравнение сложнее предыдущих? Во-первых, оно не является однородным, так как в правой его части содержится не 0, а 2. Во-вторых, в левой части уравнения под знаками синуса и косинуса находится не x, а $3x$. В-третьих, нужно не только решить уравнение в общем виде, но и выбрать корни, принадлежащие заданному промежутку. Эти три дополнительные трудности мы сейчас и начнем преодолевать.

С числом 2, содержащимся в правой части уравнения, мы поступим следующим образом. Известно, что $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ — это тождество верно для любого t. В частности, $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$. Но тогда $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x = 2$. Заменив в правой части уравнения 2 на $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x$, получим:

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\,\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x.$$

Далее имеем:

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\,\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x - 2\sin^2 3x - 2\cos^2 3x = 0,$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\,\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0.$$

Как видите, нам удалось преобразовать заданное уравнение в однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Оно содержит в своем составе член $\sin^2 3x$, значит, применив способ почленного деления на $\cos^2 3x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 3x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} 3x + 3 = 0.$$

Положив $z = \operatorname{tg} 3x$, получим квадратное уравнение:

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = 0.$$

Для решения этого уравнения можно использовать формулу корней квадратного уравнения, но изящнее сделать так: заметив, что

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = (z - \sqrt{3})^2,$$

преобразовать квадратное уравнение к виду:

$$(z - \sqrt{3})^2 = 0,$$

и далее $z - \sqrt{3} = 0$.

Значит, $z = \sqrt{3}$, т.е.

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3},$$

$$3x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n,$$

$$3x = \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

Осталось из найденной серии решений выбрать те корни уравнения, которые принадлежат заданному интервалу $(-\pi, \pi)$. Можно осуществить «перебор по параметру», т.е. последовательно придать параметру n значения $0, 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots$, как мы это делали в п. 1 (примеры 2 и 3). Но мы хотим показать вам еще один прием (быть может, он покажется вам более интересным).

Нам нужно найти такие значения x, которые содержатся в интервале $(-\pi, \pi)$, т.е. удовлетворяют двойному неравенству $-\pi < x < \pi$. Поскольку $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, получаем неравенство:

$$-\pi < \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3} < \pi.$$

Умножив все части этого неравенства на 9 и разделив на π, получим:

$$-9 < 1 + 3n < 9,$$

$$-10 < 3n < 8,$$

$$-\frac{10}{3} < n < \frac{8}{3}.$$

Осталось выяснить, какие целочисленные значения параметра n удовлетворяют последнему неравенству. Это значения: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$. Значит, если перечисленные шесть значений подставить вместо n в формулу решений $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, то мы тем самым и выделим интересующие нас корни уравнения, принадлежащие заданному интервалу $(-\pi, \pi)$. Итак:

1) если $n = -3$, то из формулы $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$ получаем

$$x = \frac{\pi}{9} - \pi = -\frac{8\pi}{9};$$

2) если $n = -2$, то из формулы $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$ получаем

$$x = \frac{\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{9};$$

3) если $n = -1$, то из формулы $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$ получаем

$$x = \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{9};$$

4) если $n = 0$, то из формулы $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$ получаем

$$x = \frac{\pi}{9} + 0 = \frac{\pi}{9};$$

5) если $n = 1$, то из формулы $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$ получаем

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{9};$$

6) если $n = 2$, то из формулы $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$ получаем

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}.$$

Ответ: $-\frac{8\pi}{9}$; $-\frac{5\pi}{9}$; $-\frac{2\pi}{9}$; $\frac{\pi}{9}$; $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{9}$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы пополнили наш словарный запас математического языка следующими *терминами*:

арксинус;

арккосинус;

арктангенс;

арккотангенс;

тригонометрическое уравнение, простейшее тригонометрическое уравнение;

однородное тригонометрическое уравнение первой степени, второй степени.

Мы вывели *формулы* для решения простейших тригонометрических уравнений:

$\cos x = a,\ \ x = \pm \arccos a + 2\pi n$ (при $|a| \leq 1$);

$\sin x = a,\ \ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ (при $|a| \leq 1$);

$\mathrm{tg}\, x = a,\ \ x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n$;

$\mathrm{ctg}\, x = a,\ \ x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n$.

Мы получили *соотношения* для арккосинуса, арксинуса, арктангенса и арккотангенса:

Если $|a| \leq 1$, то

$$\arccos a = t \text{ означает, что } \begin{cases} \cos t = a; \\ 0 \leq t \leq \pi; \end{cases}$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Если $|a| \leq 1$, то

$$\arcsin a = t \text{ означает, что } \begin{cases} \sin t = a; \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

Для любого числа a

$$\mathrm{arctg}\, a = t \text{ означает, что } \begin{cases} \mathrm{tg}\, t = a; \\ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a.$$

Для любого числа a

$$\mathrm{arcctg}\, a = t \text{ означает, что } \begin{cases} \mathrm{ctg}\, t = a; \\ 0 < t < \pi; \end{cases}$$

$$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a.$$

Мы обсудили *два основных метода решения тригонометрических уравнений*: разложение на множители и введение новой переменной.

Мы изучили *метод* решения однородных тригонометрических уравнений.

Глава 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 21. СИНУС И КОСИНУС СУММЫ АРГУМЕНТОВ

В этой главе речь пойдет о преобразовании тригонометрических выражений. Для этого используются различные тригонометрические формулы, основные из которых мы внимательно рассмотрим.

Пожалуй, самыми важными в тригонометрии являются следующие две формулы (доказательства их технически довольно сложны, и мы их здесь* не приводим):

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y. \end{aligned}}$$

Эти формулы обычно называют *синус суммы* и *косинус суммы*. А считаются они самыми важными потому, что, как мы увидим далее, из этих формул без особого труда выводятся практически все формулы тригонометрии. Поэтому есть смысл уделить указанным формулам особое внимание. Рассмотрим примеры, в которых используются формулы синуса суммы и косинуса суммы. Учтем при этом, что каждая из указанных формул применяется на практике как «слева направо», так и «справа налево».

Пример 1. Вычислить $\sin 75°$ и $\cos 75°$.

Решение. Воспользуемся тем, что $75° = 45° + 30°$, и тем, что значения синуса и косинуса от углов 45° и 30° мы знаем:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ \sin 30° = \frac{1}{2};\ \ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Имеем:

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

* Доказательство приведено в пособии для учителя (Алгебра и начала анализа, 10–11, Мнемозина, 2000).

$$\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 45° \cdot \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Доказать, что $\sin(\pi + x) = -\sin x$,
$\cos(\pi + x) = -\cos x$.

Решение. Имеем:
$$\sin(\pi + x) = \sin\pi\cos x + \cos\pi\sin x = 0 \cdot \cos x + (-1)\sin x = -\sin x;$$
$$\cos(\pi + x) = \cos\pi\cos x - \sin\pi\sin x = (-1)\cdot\cos x - 0 \cdot \sin x = -\cos x.$$

Замечание. Вернемся к доказанному в § 4 свойству 3. Это те самые тождества (формулы приведения), которые только что доказаны в примере 2, но ранее мы получили их с помощью числовой окружности, а сейчас — с помощью формул синуса и косинуса суммы.

Пример 3. Вычислить $\sin x$ и $\cos x$, если $x = 255°$.

Решение. Имеем: $\sin 255° = \sin(180°+75°) = -\sin 75°$;
$\cos 255° = \cos(180°+75°) = -\cos 75°$.

В примере 1 мы установили, что
$$\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \quad \cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Значит,
$$\sin 255° = -\sin 75° = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \quad \cos 255° = -\cos 75° = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 4. Упростить выражение
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

Решение. Имеем:
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \sqrt{2}\cos x.$$

Ответ: $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\cos x$.

Пример 5. Вычислить $\sin(x + y)$, если известно, что
$$\sin x = \frac{3}{5}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad \cos y = -\frac{3}{5}, \quad \pi < y < \frac{3\pi}{2}.$$

Решение. Воспользуемся формулой синуса суммы:
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \qquad (1)$$

Значения $\sin x$ и $\cos y$ заданы, нужно вычислить значения $\cos x$ и $\sin y$.

Имеем: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

По условию аргумент x принадлежит первой четверти, а в ней косинус положителен. Поэтому из равенства $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ находим, что $\cos x = \frac{4}{5}$.

Имеем: $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

По условию аргумент y принадлежит третьей четверти, а в ней синус отрицателен. Поэтому из равенства: $\sin^2 y = \frac{16}{25}$ находим, что $\sin y = -\frac{4}{5}$.

Подставим заданные и найденные значения в правую часть формулы (1):
$$\sin(x + y) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -1.$$

Ответ: -1.

Пример 6. Вычислить $x + y$, если известно, что
$$\sin x = \frac{3}{5}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad \cos y = -\frac{3}{5}, \quad \pi < y < \frac{3\pi}{2}.$$

Решение. В предыдущем примере мы установили, что при заданных условиях $\sin(x + y) = -1$.

По условию данного примера, как и в примере 5,
$$0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$\pi < y < \frac{3\pi}{2}.$$

Сложив эти два двойных неравенства, получим: $\pi < x + y < 2\pi$.

Итак, $\sin(x + y) = -1$ и $\pi < x + y < 2\pi$. Значит, $x + y = \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$.

Пример 7. Вычислить:

а) $\sin 48° \cos 12° + \cos 48° \sin 12°$;

б) $\cos 37° \cos 8° - \sin 37° \sin 8°$.

Решение. а) Заданное выражение можно «свернуть» в синус суммы аргументов 48° и 12°, получим:
$$\sin 48° \cos 12° + \cos 48° \sin 12° = \sin(48° + 12°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Заданное выражение можно «свернуть» в косинус суммы аргументов 37° и 8°, получим:
$$\cos 37° \cos 8° - \sin 37° \sin 8° = \cos(37° + 8°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 8. Упростить выражение $\sqrt{3}\cos x - \sin x$.

Решение. Если переписать заданное выражение в виде $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$ и вспомнить, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то заметим, что выражение в скобках представляет собой правую часть формулы «косинус суммы» для аргументов $\frac{\pi}{6}$ и x. Таким образом,

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Ответ: $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$

Пример 9. Решить уравнение: $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

Решение. В предыдущем примере мы получили, что

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде $2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1.$

Решая это уравнение, последовательно находим:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Учтем, что $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, а $-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$. Это позволяет записать решение уравнения не в виде одной, а в виде двух серий, но зато они выглядят понятнее: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Итак, мы познакомились с двумя тригонометрическими формулами: «синус суммы» и «косинус суммы», увидели, как эти формулы используются для доказательства тригонометрических тождеств и упрощения тригонометрических выражений, для отыскания значений тригонометрических выражений и решения тригонометрических уравнений. В § 22 мы проделаем аналогичную работу с формулами «синус разности» и «косинус разности».

§ 22. СИНУС И КОСИНУС РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ

Рассмотрим выражение $\sin(x-y)$. Если переписать его в виде $\sin(x+(-y))$, то появляется возможность применить формулу синуса суммы для аргументов x и $-y$:

$$\sin(x+(-y)) = \sin x\cos(-y) + \cos x\sin(-y). \qquad (1)$$

А теперь воспользуемся тем, что

$$\cos(-y) = \cos y, \quad \sin(-y) = -\sin y.$$

Это позволяет правую часть равенства (1) переписать в виде

$$\sin x\cos y - \cos x\sin y.$$

Таким образом, мы вывели следующую формулу, называемую на практике *синус разности*:

$$\boxed{\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y.}$$

Аналогичные рассуждения позволяют вывести формулу *косинуса разности* (мы сделаем это «молча», а вы «озвучьте» написанное):

$$\cos(x-y) = \cos(x+(-y)) = \cos x\cos(-y) - \sin x\sin(-y) =$$
$$= \cos x\cos y + \sin x\sin y.$$

Итак, перед вами формула косинуса разности:

$$\boxed{\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y.}$$

Естественно, что формулы синуса разности и косинуса разности применяются на практике в написании как слева направо, так и справа налево.

Пример 1. Вычислить $\sin 15°$ и $\cos 15°$.

Решение. Воспользуемся тем, что $15° = 45° - 30°$, и тем, что значения синуса и косинуса углов 45° и 30° мы знаем:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Имеем:

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Доказать, что $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$.

Решение. Имеем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\sin x=1\cdot\cos x-0\cdot\sin x=\cos x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\sin x=0\cdot\cos x+1\cdot\sin x=\sin x.$$

Замечание. В § 21 мы вывели две формулы приведения с помощью формул синуса и косинуса суммы аргументов. В только что решенном примере 2 мы вывели еще две формулы приведения с помощью формул синуса и косинуса разности аргументов. Вообще все формулы приведения для синуса и косинуса, о которых мы говорили в § 8, без труда выводятся с помощью формул синуса и косинуса суммы или разности аргументов.

Пример 3. Решить уравнение $\cos(2\pi-2x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Мы знаем, что $\cos(-t)=\cos t$, значит,

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right).$$

По формулам приведения имеем:

$$\cos(2\pi-2x)=\cos 2x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sin 2x.$$

Это позволяет переписать заданное уравнение в более простом виде: $\cos 2x=\sin 2x$, т.е. $\sin 2x-\cos 2x=0$.

Мы получили однородное уравнение первой степени, о решении которого шла речь в § 20, более того, там же в примере 2 было решено уравнение, очень похожее на полученное. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos 2x$, получим:

$$\operatorname{tg}2x-1=0,$$

$$\operatorname{tg}2x=1,$$

$$2x=\operatorname{arctg}1+\pi n,$$

$$2x=\frac{\pi}{4}+\pi n,$$

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}.$$

Пример 4. Вычислить $\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)$, если известно, что

$$\cos y=-\frac{3}{5},\quad \frac{\pi}{2}<y<\pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой косинуса разности:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos y+\sin\frac{\pi}{3}\sin y. \qquad (2)$$

Значение $\cos y$ задано в условии, значения $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$ известны, они равны соответственно $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Осталось вычислить значение $\sin y$.

Имеем:

$$\sin^2 y=1-\cos^2 y=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}.$$

По условию аргумент y принадлежит второй четверти, а в ней синус положителен. Поэтому из равенства: $\sin^2 y=\frac{16}{25}$ находим, что $\sin y=\frac{4}{5}$.

Подставим заданные и найденные значения в правую часть формулы (2):

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}.$$

Ответ: $0{,}1(4\sqrt{3}-3)$.

Пример 5. Решить уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sqrt{3}.$$

Решение. Имеем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)+\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x-\frac{1}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x+\frac{1}{2}\cdot\sin x=\sqrt{3}\cos x.$$

Теперь заданное уравнение мы можем переписать в виде $\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$, т.е. $\cos x=1$, откуда получаем: $x=2\pi n$.

Ответ: $x=2\pi n$.

Пример 6. Вычислить $\sin 44^\circ\cos 14^\circ-\sin 46^\circ\cos 76^\circ$.

Решение. По формулам приведения находим:

$$\sin 46^\circ=\sin(90^\circ-44^\circ)=\cos 44^\circ;$$

$$\cos 76^\circ=\cos(90^\circ-14^\circ)=\sin 14^\circ.$$

Это значит, что мы имеем право в заданном выражении заменить $\sin 46^\circ$ на $\cos 44^\circ$, а $\cos 76^\circ$ на $\sin 14^\circ$. Тогда заданное выражение можно переписать в виде: $\sin 44^\circ\cdot\cos 14^\circ-\cos 44^\circ\cdot\sin 14^\circ$ и «свернуть» его в синус разности аргументов 44° и 14°. Получим:

$$\sin 44^\circ\cdot\cos 14^\circ-\cos 44^\circ\cdot\sin 14^\circ=\sin(44^\circ-14^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

§ 23. ТАНГЕНС СУММЫ И РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ

В § 21 и 22 мы получили формулы, выражающие синус и косинус суммы и разности аргументов через синусы и косинусы аргументов. В этом параграфе речь пойдет о том, как тангенс суммы или разности аргументов выражается через тангенсы аргументов. Соответствующие формулы выглядят следующим образом:

$$\boxed{\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y};}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.}$$

При этом, разумеется, предполагается, что все тангенсы имеют смысл, т.е. что $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ (для первой формулы), $x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ (для второй формулы).

Доказательства этих формул достаточно сложны, мы приведем одно из них в конце параграфа. Но сначала рассмотрим ряд примеров, показывающих, как используются эти формулы на практике.

Пример 1. Вычислить: а) $\operatorname{tg}75°$; б) $\operatorname{tg}15°$; в) $\frac{\operatorname{tg}27°+\operatorname{tg}18°}{1-\operatorname{tg}27°\operatorname{tg}18°}$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $75° = 45° + 30°$. Получим:

$$\operatorname{tg}75°=\operatorname{tg}(45°+30°)=\frac{\operatorname{tg}45°+\operatorname{tg}30°}{1-\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}30°}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.$$

Есть смысл избавиться от иррациональности в знаменателе, домножив и числитель, и знаменатель полученной дроби на $3+\sqrt{3}$:

$$\frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=\frac{(3+\sqrt{3})^2}{3^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=\frac{6(2+\sqrt{3})}{6}=2+\sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg}75°=2+\sqrt{3}$.

б) Воспользуемся тем, что $15° = 45° - 30°$. Получим:

$$\operatorname{tg}15°=\operatorname{tg}(45°-30°)=\frac{\operatorname{tg}45°-\operatorname{tg}30°}{1+\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}30°}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}.$$

Есть смысл избавиться от иррациональности в знаменателе, домножив и числитель, и знаменатель полученной дроби на $3-\sqrt{3}$:

$$\frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{(3-\sqrt{3})^2}{3^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=\frac{6(2-\sqrt{3})}{6}=2-\sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg}15°=2-\sqrt{3}$.

в) Заметим, что заданное выражение представляет собой правую часть формулы «тангенс суммы» для аргументов 27° и 18°. Значит,

$$\frac{\operatorname{tg}27°+\operatorname{tg}18°}{1-\operatorname{tg}27°\operatorname{tg}18°}=\operatorname{tg}(27°+18°)=\operatorname{tg}45°=1.$$

Ответ: а) $2+\sqrt{3}$; б) $2-\sqrt{3}$; в) 1.

Пример 2. Доказать тождество: $\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

Решение. Применим к правой части проверяемого тождества формулу «тангенс разности». Имеем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}x}=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}.$$ ■

Замечание. Когда речь идет о доказательстве тригонометрического тождества или о преобразовании тригонометрического выражения, всегда предполагается, что аргументы принимают только допустимые значения. Так, в рассмотренном примере доказанное тождество справедливо при условии, что $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ \frac{\pi}{4}-x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Пример 3. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, если известно, что $\cos x=-\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2}<x<\pi$.

Решение. Воспользуемся тождеством, полученным в предыдущем примере:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}. \qquad (1)$$

Если мы вычислим $\operatorname{tg}x$, то вычислим и $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

Значение $\cos x$ задано, значение $\operatorname{tg}x$ найдем с помощью соотношения $1+\operatorname{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2x}$.

Имеем: $\operatorname{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2x}-1=\frac{25}{9}-1=\frac{16}{9}$.

По условию аргумент x принадлежит второй четверти, а в ней тангенс отрицателен. Поэтому из равенства $\operatorname{tg}^2x=\frac{16}{9}$ находим, что $\operatorname{tg}x=-\frac{4}{3}$.

Подставим найденное значение в правую часть формулы (1):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{1+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}}=\frac{7}{3}:\left(-\frac{1}{3}\right)=-7.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-7$.

В заключение докажем, как было обещано, формулу тангенса суммы. Кроме того, приведем довольно любопытный пример, показывающий неожиданное применение формулы тангенса суммы.

Имеем:

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}.$$

Разделим в полученной дроби и числитель, и знаменатель почленно на $\cos x\cos y$. Получим:

$$\frac{\frac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\frac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}}=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

Итак, нам удалось преобразовать $\operatorname{tg}(x+y)$ к виду $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$. ●

Пример 4. Доказать, что $\operatorname{tg}1°$ — иррациональное число.

Решение. Предположим противное, что $\operatorname{tg}1°$ — рациональное число: $\operatorname{tg}1°=r$, где r — рациональное число. Имеем:

$$\operatorname{tg}2°=\operatorname{tg}(1°+1°)=\frac{\operatorname{tg}1°+\operatorname{tg}1°}{1-\operatorname{tg}1°\operatorname{tg}1°}=\frac{r+r}{1-r\cdot r}=\frac{2r}{1-r^2}.$$

Получилось рациональное число, обозначим его q; итак $\operatorname{tg}2°=q$.

Рассуждая аналогично, устанавливаем, что:

$\operatorname{tg}3°=\operatorname{tg}(1°+2°)=\frac{\operatorname{tg}1°+\operatorname{tg}2°}{1-\operatorname{tg}1°\operatorname{tg}2°}=\frac{r+q}{1-r\cdot q}$; снова получили рациональное число. Продолжая процесс, получим, что $\operatorname{tg}4°, \operatorname{tg}5°, \ldots, \operatorname{tg}60°$ — рациональные числа. Но $\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$, а это — иррациональное число. Получили противоречие, значит, сделанное предположение неверно, т.е. $\operatorname{tg}1°$ — иррациональное число. ◀■

§ 24. ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

Здесь речь пойдет о формулах тригонометрии, позволяющих выразить $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg}2x$ через $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$. Эти формулы обычно называют *формулами двойного аргумента*. Название, может быть, не очень удачно, как, впрочем, и такие названия, как «формулы приведения», «синус суммы», «косинус разности» и т.д., но это не суть важно: главное, что есть некий словесный символ, позволяющий посвященным понять, о чем идет речь.

Рассмотрим выражение $\sin 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x+x$. Это позволит применить к выражению $\sin(x+x)$ формулу «синус суммы» (см. § 21). Имеем:

$$\sin 2x=\sin(x+x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x=2\sin x\cos x.$$

Итак,

$$\boxed{\sin 2x=2\sin x\cos x.}$$

Рассмотрим выражение $\cos 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x+x$. Это позволит применить к выражению $\cos(x+x)$ формулу «косинус суммы» (см. § 21). Имеем:

$$\cos 2x=\cos(x+x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

Итак,

$$\boxed{\cos 2x=\cos^2 x\pm\sin^2 x.}$$

Рассмотрим выражение $\operatorname{tg}2x$, представив при этом $2x$ в виде $x+x$. Это позволит применить к выражению $\operatorname{tg}(x+x)$ формулу «тангенс суммы» (см. § 23). Имеем:

$$\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}(x+x)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}x}=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}.$$

Итак,

$$\boxed{\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}.}$$

Формулы «синус двойного аргумента» и «косинус двойного аргумента» справедливы для любых значений аргумента (никаких ограничений нет), тогда как формула «тангенс двойного аргумента» справедлива лишь для тех значений аргумента x, для которых определены $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{tg}2x$, а также отличен от нуля знаменатель дроби, т.е. $1-\operatorname{tg}^2x\neq 0$.

Разумеется, формулы двойного аргумента можно применять и в тех случаях, когда место аргумента x занимает более сложное выражение. Так, справедливы следующие соотношения:

$$\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x;$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2};$$
$$\cos 48° = \cos^2 24° - \sin^2 24°;$$
$$\cos(2x+6y) = \cos^2(x+3y) - \sin^2(x+3y);$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}-2t\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-t\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{3}-t\right)} \text{ и т.д.}$$

И, как всегда, любую из трех полученных в этом параграфе формул двойного аргумента можно использовать в написании как справа налево, так и слева направо. Например,

вместо $2\sin 3x\cos 3x$ можно написать $\sin 6x$,

вместо $\cos^2 2{,}5t - \sin^2 2{,}5t$ можно написать $\cos 5t$.

Пример 1. Доказать тождества:

а) $1+\sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$;

б) $1-\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, и формулой синуса двойного аргумента. Получим:

$$1+\sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = (\cos x + \sin x)^2.$$

б) Рассуждая аналогично, получим:

$$1-\sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = (\cos x - \sin x)^2.$$

Пример 2. Сократить дробь $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$.

Решение. В числителе дроби воспользуемся доказанным в примере 1 а тождеством, а в знаменателе — формулой косинуса двойного аргумента. Получим:

$$\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)} = \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}.$$

Пример 3. Вычислить: а) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; б) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; в) $\sin 18°\cos 36°$.

Решение. а) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы косинуса двойного аргумента. Заметив это, получим

$$\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{2\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы синуса двойного аргумента, но только не хватает множителя 2. Введя его, получим:

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 0{,}5\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 0{,}5\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = 0{,}5\sin\frac{\pi}{6} =$$
$$= 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

в) Этот пример значительно сложнее, но зато он красивее предыдущих: здесь нужно догадаться умножить и разделить заданное выражение на $4\cos 18°$. Что это даст? Смотрите:

$$\sin 18°\cos 36° = \frac{4\cos 18°\sin 18\cos 36°}{4\cos 18°} =$$
$$= \frac{2(2\sin 18°\cos 18°)\cos 36°}{4\cos 18°} = \frac{2\sin 36°\cos 36°}{4\cos 18°} = \frac{\sin 72°}{4\cos 18°}.$$

Как видите, мы дважды воспользовались формулой синуса двойного аргумента. Чтобы довести вычисления до конца, заметим, что $72° = 90° - 18°$. Значит, $\sin 72° = \sin(90° - 18°) = \cos 18°$. Таким образом,

$$\sin 18°\cos 36° = \frac{\sin 72°}{4\cos 18°} = \frac{\cos 18°}{4\cos 18°} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0,25; в) 0,25.

Пример 4. Доказать тождество $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$.

Решение. Преобразуем левую часть доказываемого тождества:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x\sin x} = \frac{1}{\cos x\sin x}.$$

Умножив и числитель, и знаменатель последней дроби на 2 («подгоняем» знаменатель под формулу синуса двойного аргумента), получим:

$$\frac{2}{2\cos x\sin x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Итак, $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Еще раз обращаем ваше внимание на то, что тождество доказано лишь для допустимых значений x, конкретнее для $x \ne \frac{\pi n}{2}$, т.е. для значений x, при которых имеющиеся знаменатели отличны от нуля.

Пример 5. Зная, что $\cos x = \frac{3}{5}$ и что $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, вычислить:

а) $\cos 2x$; б) $\sin 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)$.

Решение. а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Имеем:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

Теперь нетрудно вычислить $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$$

б) Для вычисления $\sin 2x$ воспользуемся формулой

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

Значение $\cos x$ дано в условии, а значение $\sin x$ найдем следующим образом. Во-первых, мы уже знаем, что $\sin^2 x = \frac{16}{25}$. Это значит, что $\sin x = \frac{4}{5}$ или $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Во-вторых, по условию аргумент x принадлежит четвертой четверти, а в ней синус отрицателен. Это значит, что из двух значений $\sin x = \frac{4}{5}$, $\sin x = -\frac{4}{5}$ надо выбрать второе: $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Теперь нетрудно вычислить $\sin 2x$:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

в) $\operatorname{tg} 2x$ вычислим, воспользовавшись определением тангенса:

$$\operatorname{tg}2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}.$$

г) Для вычисления $\sin\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)$ сначала воспользуемся формулой приведения: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+4x\right) = \cos 4x$.

Применим к выражению $\cos 4x$ формулу косинуса двойного аргумента: $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$. Воспользуемся тем, что значения $\cos 2x$ и $\sin 2x$ уже найдены нами:

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \left(-\frac{7}{25}\right)^2 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49}{626} - \frac{576}{625} = -\frac{527}{625}.$$

Ответ: $\cos 2x = -\frac{7}{25}$; $\sin 2x = -\frac{24}{25}$; $\operatorname{tg} 2x = \frac{24}{7}$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}+4x\right) = -\frac{527}{625}$.

Пример 6. Решить уравнение $\sin 4x - \cos 2x = 0$.

Решение. Если в левой части уравнения применить к выражению $\sin 4x$ формулу синуса двойного аргумента, то удастся разложить левую часть на множители. Имеем последовательно:

$$\sin 4x - \cos 2x = 0;$$
$$2\sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0;$$
$$\cos 2x(2\sin 2x - 1) = 0;$$
$$\cos 2x = 0 \text{ или } 2\sin 2x - 1 = 0.$$

Из уравнения $\cos 2x = 0$ находим:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

Из уравнения $2\sin 2x - 1 = 0$ находим:

$$\sin 2x = \frac{1}{2}; \; 2x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n;$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$.

§ 25. ФОРМУЛЫ ПОНИЖЕНИЯ СТЕПЕНИ

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$, то получим:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Таким образом, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, откуда:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.}$$

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, то получим:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Таким образом, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, откуда:

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.}$$

Полученные две формулы обычно называют *формулами понижения степени*, что опять-таки не слишком удачно — об условности названия формул в тригонометрии мы уже говорили в начале § 24.

Замечание. Откуда появилось такое название? Причина, видимо, в том, что в левой части обоих тождеств содержится вторая степень косинуса или синуса, а в правой части — первая степень косинуса (степень понизилась). Но при применении этих формул будьте внимательны: степень понижается, зато аргумент удваивается.

Пример 1. Зная, что $\cos x = -\frac{5}{13}$ и что $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, вычислить:

а) $\cos\frac{x}{2}$; б) $\sin\frac{x}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой понижения степени:

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}.$$

Получим: $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-\frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13}$. По условию $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, значит, $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти, а в ней косинус положителен. Поэтому из уравнения $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{4}{13}$ получаем: $\cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Второе возможное решение $\cos\frac{x}{2} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ нас не устраивает.

Итак, $\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\sqrt{13}}$.

б) Воспользуемся формулой понижения степени: $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$. Получим: $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1+\frac{5}{13}}{2}=\frac{9}{13}$.

Выше мы уже установили, что аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти, где синус положителен. Поэтому из уравнения $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{9}{13}$ получаем: $\sin\frac{x}{2}=\frac{3}{\sqrt{13}}$. Второе возможное решение $\sin\frac{x}{2}=-\frac{3}{\sqrt{13}}$ нас не устраивает.

Итак, $\sin\frac{x}{2}=\frac{3}{\sqrt{13}}$.

в) Осталось вычислить значение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{13}}}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: а) $\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\sqrt{13}}$; б) $\sin\frac{x}{2}=\frac{3}{\sqrt{13}}$; в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{3}{2}$.

Пример 2. Доказать тождество: $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1+\sin 2x}{2}$.

Решение. Применим к левой части доказываемого тождества формулу понижения степени:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1-\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)}{2}.$$

Замечаем, воспользовавшись формулой приведения, что

$$\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=-\sin 2x.$$

Таким образом, $1-\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)=1+\sin 2x$,

а это значит, что

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1+\sin 2x}{2}.$$

Пример 3. Решить уравнение: $\cos^2 3x=\frac{3}{4}$.

Решение. Можно, конечно, идти по проторенной дорожке — извлечь из обеих частей уравнения квадратный корень, получить два уравнения:

$\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos 3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, а затем каждое из этих уравнений решить по соответствующей формуле. Но значительно приятнее воспользоваться сначала формулой понижения степени:

$$\cos^2 3x=\frac{1+\cos 6x}{2}.$$

Тогда заданное уравнение примет вид: $\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{3}{4}$, и далее $\cos 6x=\frac{1}{2}$.

Получилось не два уравнения, а одно. Находим:

$$6x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n;$$

$$6x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;$$

$$x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}.$$

§ 26. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Продолжим изучение формул тригонометрии, но сначала обсудим один вопрос, который наверняка вы уже задавали своему учителю: формул тригонометрии очень много, неужели все эти формулы мы должны помнить, как таблицу умножения? Отвечаем: запоминать все формулы вы не должны! Но для чего, спросите вы, в предыдущих параграфах эти формулы выводились и как-то выделялись в тексте? Отвечаем и на этот вопрос: вы должны, во-первых, иметь представление о том, что такие-то и такие-то тригонометрические формулы существуют, и, во-вторых, научиться применять их на практике. Главное — выписать нужные формулы, удачно их расположить и держать перед глазами, когда решаете тригонометрический пример. В конце главы 3 мы составим такую «шпаргалку».

В этом параграфе речь пойдет о формулах, особенно полезных при решении тригонометрических уравнений, поскольку они позволяют сумму или разность синусов или косинусов разложить на множители.

1. Сумма синусов

Рассмотрим выражение $\sin(s+t)+\sin(s-t)$. Применив формулы синуса суммы и синуса разности, получим:

$(\sin s\cos t+\cos s\sin t)+(\sin s\cos t-\cos s\sin t)=2\sin s\cos t$.

Итак, $\sin(s+t)+\sin(s-t)=2\sin s\cos t$. (а)

Положим в этой формуле $x=s+t$, $y=s-t$. Если эти равенства сложить, получим $x+y=2s$, т. е. $s=\frac{x+y}{2}$. Если же из первого равенства вычесть второе, получим $x-y=2t$, т.е. $t=\frac{x-y}{2}$. А теперь заменим в формуле (а) $s+t$ на x, $s-t$ на y, s на $\frac{x+y}{2}$, t на $\frac{x-y}{2}$. Тогда формула (а) примет вид:

$$\boxed{\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (1)$$

Например,

$$\sin 6x+\sin 4x=2\sin\frac{6x+4x}{2}\cos\frac{6x-4x}{2}=2\sin 5x\cos x;$$

$$\sin 43°+\sin 17°=2\sin\frac{43°+17°}{2}\cos\frac{43°-17°}{2}=2\sin 30°\cos 13°=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 13°=\cos 13°.$$

2. Разность синусов

Воспользовавшись тем, что $-\sin y=\sin(-y)$ и полученной в п. 1 формулой суммы синусов, находим, что

$$\sin x-\sin y=\sin x+\sin(-y)=$$

$$2\sin\frac{x+(-y)}{2}\cos\frac{x-(-y)}{2}=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Итак,

$$\boxed{\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.} \qquad (2)$$

Например,

$$\sin 3x-\sin 5x=2\sin\frac{3x-5x}{2}\cos\frac{3x+5x}{2}=2\sin(-x)\cos 4x=$$

$$=-2\sin x\cos 4x.$$

При этом мы учли, что $\sin(-x)=-\sin x$.

3. Сумма косинусов

Рассмотрим выражение $\cos(s+t)+\cos(s-t)$. Применив формулы косинуса суммы и косинуса разности, получим:

$$(\cos s\cos t-\sin s\sin t)+(\cos s\cos t+\sin s\sin t)=2\cos t\cos s.$$

Итак, $\cos(s+t)+\cos(s-t)=2\cos s\cos t$.

Положив $x=s+t, \quad y=s-t$, получим:

$$\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (3)$$

Например,

$$\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}=2\cos\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}}{2}=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$$

(попутно мы учли, что $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и что $\cos(-t)=\cos t$).

4. Разность косинусов

Рассмотрим выражение $\cos(s+t)-\cos(s-t)$. Применив формулы косинуса суммы и косинуса разности, получим:

$$(\cos s\cos t-\sin s\sin t)-(\cos s\cos t+\sin s\sin t)=-2\sin s\sin t.$$

Итак, $\cos(s+t)-\cos(s-t)=-2\sin s\sin t$.

Положив $x=s+t, \quad y=s-t$, получим:

$$\boxed{\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.} \qquad (4)$$

Например,

$$\cos(2x+y)-\cos(4x-y)=$$

$$=-2\sin\frac{(2x+y)+(4x-y)}{2}\sin\frac{(2x+y)-(4x-y)}{2}=$$

$$=-2\sin 3x\sin(-x+y)=2\sin 3x\sin(x-y).$$

Пример 1. Решить уравнения: а) $\sin 5x+\sin x=0$;
б) $\sin 17x=\sin 7x$; в) $\cos 3x=\sin x$.

Решение. а) Преобразовав сумму синусов в произведение по формуле (1), получим:

$$\sin 5x+\sin x=2\sin 3x\cos 2x.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать в виде:

$$2\sin 3x\cos 2x=0.$$

Значит, либо $\sin 3x=0$, откуда находим: $3x=\pi n, \quad x=\frac{\pi n}{3}$; либо $\cos 2x=0$, откуда находим: $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

б) Имеем последовательно:

$$\sin 17x-\sin 7x=0;$$

$$2\sin 5x\cos 12x=0;$$

$$\sin 5x=0;\ \cos 12x=0.$$

Из первого уравнения находим: $5x=\pi n, \quad x=\frac{\pi n}{5}$.

Из второго уравнения находим: $12x=\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{12}$.

в) Здесь придется воспользоваться формулой приведения:

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

чтобы вместо разности синуса и косинуса получить разность косинусов, для которой у нас имеется формула (4). Тогда получим последовательно:

$$\cos 3x-\sin x=0;$$

$$\cos 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0;$$

$$-2\sin\frac{3x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\,\sin\frac{3x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}=0;$$

$$-2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0;$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0;\quad \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Из первого уравнения находим: $x+\frac{\pi}{4}=\pi n, \quad x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$.

Из второго уравнения находим: $2x-\frac{\pi}{4}=\pi n, \quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi n}{3}, \quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; б) $x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{12}, \quad x=\frac{\pi n}{5}$;
в) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение: $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

Решение. Сгруппируем первое и третье слагаемые левой части уравнения:

$$(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=0.$$

Далее имеем:

$$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0;$$

$$\sin 2x\,(2\cos x+1)=0;$$

$$\sin 2x=0 \text{ или } \cos x=-\frac{1}{2}.$$

Из первого уравнения находим: $2x=\pi n, x=\frac{\pi n}{2}$.

Из второго уравнения находим: $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n$,

$$x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)+2\pi n, \quad x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi n, \quad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n.$$

Ответ: $x=\frac{\pi n}{2}; \quad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$.

Пример 3. Решить уравнение: $\cos^2 x+\sin^2 3x=1$.

Решение. Это — достаточно сложный пример, требующий умения свободно оперировать формулами тригонометрии. Поэтому мы сделаем его не спеша, обстоятельно и «по действиям».

1) Дважды применим к левой части уравнения формулы понижения степени:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\quad \sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2}.$$

2) Теперь заданное уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=1,$$

откуда получаем: $\cos 2x-\cos 6x=0$.

3) Преобразуем разность косинусов в произведение:

$$\cos 2x-\cos 6x=-2\sin\frac{2x+6x}{2}\cdot\sin\frac{2x-6x}{2}=-2\sin 4x\,\sin(-2x)=$$
$$=2\sin 4x\,\sin 2x.$$

Значит, задача сводится к решению уравнения $2\sin 4x\,\sin 2x=0$.

4) Полученное уравнение сводится к совокупности двух уравнений:

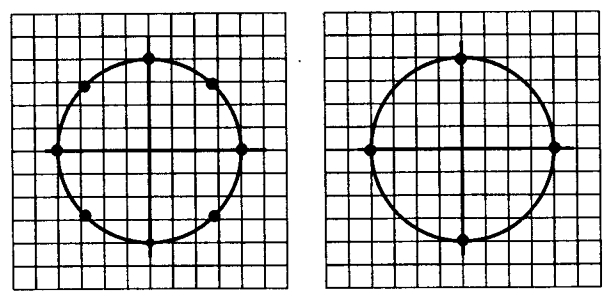
$$\sin 4x=0;\ \sin 2x=0.$$

Из первого уравнения находим: $4x=\pi n, \quad x=\frac{\pi n}{4}$.

Из второго уравнения находим: $2x=\pi n, \quad x=\frac{\pi n}{2}$.

Ответ: $x=\frac{\pi n}{4}; \quad x=\frac{\pi n}{2}$.

Замечание. Полученный ответ можно записать компактнее. Поступим так: отметим все значения x, содержащиеся в серии $x=\frac{\pi n}{4}$, точками на числовой окружности — восемь точек на рис. 96*а* (они получаются, если параметру n придать последовательно значения 0, 1, 2, 3, ...). Отметим все значения x, содержащиеся в серии $x=\frac{\pi n}{2}$, точками на числовой окружности — четыре точки на рис. 96*б*. Но они уже отмечены на рис. 96*а*. Что это значит? Это значит, что вторая серия не содержит новой информации о решениях заданного тригонометрического уравнения, т.е. все его решения исчерпываются первой серией: $x=\frac{\pi n}{4}$.



а *б*

Рис. 96

§ 27. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММЫ

Сравните название этого параграфа с названием § 26, в котором речь шла о преобразовании суммы (или разности) синусов или косинусов в произведение. Известно, что любая математическая формула на практике применяется как справа налево, так и слева направо. Поэтому неудивительно, что в тригонометрии приходится осуществлять и «движение в обратном направлении»: преобразовывать произведение тригонометрических функций в сумму. Об этом и пойдет речь в настоящем параграфе.

В § 26 мы видели, что $\sin(s+t)+\sin(s-t)=2\sin s\cos t$.

Отсюда получаем:

$$\boxed{\sin s\cos t=\frac{\sin(s+t)+\sin(s-t)}{2}.}$$

В § 26 мы видели, что $\cos(s+t)+\cos(s-t)=2\cos s\cos t$.

Отсюда получаем:

$$\boxed{\cos s\cos t=\frac{\cos(s+t)+\cos(s-t)}{2}.}$$

В § 26 мы видели, что $\cos(s+t)-\cos(s-t)=-2\sin s\ \sin t$.

Отсюда получаем:

$$\boxed{\sin s\sin t=\frac{\cos(s-t)-\cos(s+t)}{2}.}$$

Таковы три формулы, позволяющие преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму.

Пример 1. Преобразовать произведения в суммы:

а) $\sin 5x\cos 3x$; б) $\sin 3x\cos 5x$;

в) $\cos(3x+y)\cos(x-3y)$; г) $\sin 27°\sin 57°$.

Решение.

а) $\sin 5x\cos 3x=\frac{\sin(5x+3x)+\sin(5x-3x)}{2}=\frac{\sin 8x+\sin 2x}{2}$.

б) $\sin 3x\cos 5x=\frac{\sin(3x+5x)+\sin(3x-5x)}{2}=$

$=\frac{\sin 8x+\sin(-2x)}{2}=\frac{\sin 8x-\sin 2x}{2}$.

в) $\cos(3x+y)\cos(x-3y)=$

$$=\frac{\cos((3x+y)+(x-3y))+\cos((3x+y)-(x-3y))}{2}=$$

$$=\frac{\cos(4x-2y)+\cos(2x+4y)}{2}.$$

г) $\sin 27°\sin 57°=\frac{\cos(27°-57°)-\cos(27°+57°)}{2}=\frac{\cos(-30°)-\cos 84°}{2}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 84°\right).$$

Пример 2. Найти значение выражения $\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$, если известно, что $\cos x=\frac{2}{3}$.

Решение. Имеем:

$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos x).$$

Значение $\cos x$ дано в условии, значение $\cos 2x$ легко найти, воспользовавшись формулой понижения степени: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

Получаем: $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-1=\frac{8}{9}-1=-\frac{1}{9}$.

Таким образом,

$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{18}.$$

§ 28. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $A\sin x+B\cos x$ К ВИДУ $C\sin(x+t)$

На практике, например при изучении колебаний, довольно часто встречаются выражения вида $A\sin x+B\cos x$, причем возникает необходимость свести эту алгебраическую сумму тригонометрических функций к одной тригонометрической функции. Рассмотрим для примера выражение $\sqrt{3}\sin x+\cos x$.

Если переписать это выражение в виде $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$ и вспомнить, что $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, то можно заметить, что выражение в скобках представляет собой правую часть формулы «синус суммы» для аргументов x и $\frac{\pi}{6}$. Таким образом,

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\ \sin x+\sin\frac{\pi}{6}\ \cos x\right)=$$
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Итак, $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Выражение вида $A\sin x+B\cos x$ (для случая, когда $A=\sqrt{3}$, $B=1$) мы преобразовали к виду $C\sin(x+t)$. Конкретнее, у нас получилось, что $C=2$, $t=\frac{\pi}{6}$. Обратите внимание на то, что $C=\sqrt{A^2+B^2}$.

В самом деле, $A^2+B^2=(\sqrt{3})^2+1^2=4=2^2=C^2$. Оказывается, это не случайно — на подобной идее основано преобразование любого выражения вида $A\sin x+B\cos x$.

Рассмотрим выражение $A\sin x+B\cos x$; пусть, для определенности, A и B — положительные числа.

Введем обозначение: $C=\sqrt{A^2+B^2}$. Заметим, что

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2+\left(\frac{B}{C}\right)^2=1.$$

В самом деле,

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2+\left(\frac{B}{C}\right)^2=\frac{A^2}{C^2}+\frac{B^2}{C^2}=\frac{A^2+B^2}{C^2}=\frac{C^2}{C^2}=1.$$

Это значит, что пара чисел $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ удовлетворяет уравнению $x^2+y^2=1$, т.е. точка с координатами $\left(\frac{A}{C};\frac{B}{C}\right)$ лежит на числовой (единичной) окружности. Но тогда $\frac{A}{C}$ есть косинус, а $\frac{B}{C}$ — синус некоторого аргумента t, т.е. $\frac{A}{C}=\cos t$, $\frac{B}{C}=\sin t$. Более конкретно:

$$t=\arcsin\frac{B}{C}\ \text{ или }\ t=\arccos\frac{A}{C}.$$

Учитывая все это, поработаем с выражением $A\sin x+B\cos x$:

$$A\sin x+B\cos x=C\left(\frac{A}{C}\sin x+\frac{B}{C}\cos x\right)=$$
$$=C(\cos t\ \sin x+\sin t\ \cos x)=C\sin(x+t).$$

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}A\sin x+B\cos x=C\sin(x+t),\\ \text{где } C=\sqrt{A^2+B^2},\ t=\arcsin\frac{B}{C}.\end{gathered}}$$

Обычно аргумент t называют *вспомогательным (дополнительным) аргументом.*

Аналогично можно выражение $A\sin x-B\cos x$, где $A>0$, $B>0$, преобразовать к виду $C\sin(x-t)$.

Пример 1. Преобразовать в произведение выражение

$$5\sin x-12\cos x.$$

Решение. Здесь $A=5, B=-12, C=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$.

Имеем: $5\sin x-12\cos x=13\left(\frac{5}{13}\sin x-\frac{12}{13}\cos x\right)$.

Введем вспомогательный аргумент t, удовлетворяющий соотношениям: $\cos t=\frac{5}{13}$, $\sin t=\frac{12}{13}$; например, $t=\arcsin\frac{12}{13}$. Тогда

$$\frac{5}{13}\sin x-\frac{12}{13}\cos x=\sin x\cos t-\cos x\sin t=\sin(x-t).$$

Окончательно получаем:

$$5\sin x-12\cos x=13\sin(x-t),\quad \text{где } t=\arcsin\frac{12}{13}.$$

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=5\sin x-12\cos x.$$

Решение. Имеем (см. пример 1): $y=13\sin(x-t)$.

Теперь ясно, что $y_{\text{наим.}}=-13$, $y_{\text{наиб.}}=13$ (поскольку синус принимает значения от -1 до 1).

Ответ: $y_{\text{наим.}}=-13$, $y_{\text{наиб.}}=13$.

Пример 3. Решить уравнение $5\sin x-12\cos x=13$.

Решение. В этом примере, как и в примере 2, есть смысл преобразовать выражение $5\sin x-12\cos x$ к виду $13\sin(x-t)$. Получим: $13\sin(x-t)=13$ и далее:

$$\sin(x-t)=1;$$
$$x-t=\frac{\pi}{2}+2\pi n;$$
$$x=t+\frac{\pi}{2}+2\pi n,$$

где $t=\arcsin\frac{12}{13}$ (см. пример 1).

Ответ: $x=\arcsin\frac{12}{13}+\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь мы выполним данное в начале § 26 обещание: соберем все основные формулы тригонометрии и расположим их так, чтобы ими было удобно пользоваться. Разумеется, все эти формулы применяются только при допустимых значениях аргументов.

1. *Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:*

1) $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$;

2) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$;

3) $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; $1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

2. *Формулы, связывающие функции аргументов, из которых один вдвое больше другого:*

1) $\sin 2x=2\sin x\cos x$;

2) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

3) $\operatorname{tg} 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$;

4) $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ (формулы понижения степени).

3. *Формулы сложения аргументов:*

1) $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$;

2) $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$;

3) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$;

4) $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$;

5) $\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$; $\operatorname{tg}(x-y)=\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$.

4. *Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения:*

1) $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$;

2) $\sin x-\sin y=2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$;

3) $\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$;

4) $\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

5. *Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы:*

1) $\sin x\cos y=\dfrac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$;

2) $\cos x\cos y=\dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$;

3) $\sin x\cos y=\dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$.

6. $A\sin x+B\cos x=C\sin(x+t)$, где

$$\begin{cases}\sin t=\dfrac{B}{C},\\ \cos t=\dfrac{A}{C},\end{cases}\qquad C=\sqrt{A^2+B^2}.$$

Глава 4 ПРОИЗВОДНАЯ

Мы приступаем к изучению раздела математики, который обычно называют «Математический анализ». Естественно, что в школе мы ограничимся изучением лишь отдельных элементов математического анализа. Это будет первое знакомство с серьезным разделом высшей математики. Сразу попытаемся объяснить, что здесь «анализируют». «Анализируют» довольно тонкие моменты: как ведёт себя функция не только в целом, в своей области определения (глобальный подход), но и около конкретной точки (локальный подход). Такой анализ практически всегда связан с понятием *предела* (предела функции, предела последовательности). С этим понятием мы познакомимся в § 30 и 31, а далее изучим *производную* — важную математическую модель, давшую название всей главе. Построение этой модели также основано на понятии предела.

§ 29. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Определение числовой последовательности и способы ее задания

Что такое числовая последовательность и как она задается, вам известно из курса алгебры 9-го класса. Напомним соответствующее определение.

Определение 1. Функцию вида $y = f(x)$, $x \in N$ называют **функцией натурального аргумента** или **числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$

Иногда для обозначения последовательности используется запись (y_n).

Последовательности можно задавать различными способами, например *словесно*, когда правило задания последовательности описано словами, без указания каких-то формул. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$$

Особенно важны *аналитический* и *рекуррентный* способы задания последовательности.

Говорят, что последовательность задана *аналитически*, если указана формула ее n-го члена.

Приведем три примера.

1) $y_n = n^2$. Это — аналитическое задание последовательности

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$$

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если, например, $n = 9$, то $y_9 = 9^2$, т.е. $y_9 = 81$; если $n = 27$, то $y_{27} = 27^2$, т.е. $y_{27} = 729$. Напротив, если взят определенный член последовательности, можно указать его номер. Например, если $y_n = 625$, то из уравнения $n^2 = 625$ находим, что $n = 25$. Это значит, что 25-й член заданной последовательности равен 625.

2) $y_n = C$. Здесь речь идет о последовательности

$$C, C, C, \ldots, C, \ldots$$

Такую последовательность называют постоянной (или *стационарной*).

3) $y_n = 2^n$. Это — аналитическое задание последовательности

$$2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots$$

Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывают правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны ее предыдущие члены. Например, арифметическая прогрессия — это числовая последовательность (a_n), заданная рекуррентно соотношениями:

$$a_1 = a, \ a_{n+1} = a_n + d$$

(a и d — заданные числа, d — разность арифметической прогрессии).

Геометрическая прогрессия — это числовая последовательность (b_n), заданная рекуррентно соотношениями:

$$b_1 = b, \ b_{n+1} = b_n \cdot q$$

(b и q — заданные числа, $b \neq 0, q \neq 0$; q — знаменатель геометрической прогрессии). Прогрессии вы изучали в курсе алгебры 9-го класса.

2. Свойства числовых последовательностей

Числовая последовательность — частный случай числовой функции, а потому некоторые свойства функций (ограниченность, монотонность) рассматривают и для последовательностей.

Определение 2. Последовательность (y_n) называют **ограниченной сверху**, если все ее члены не больше некоторого числа.

Иными словами, последовательность (y_n) *ограничена сверху*, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leq M$. Число M называют *верхней границей последовательности*.

Например, последовательность $-1, -4, -9, -16, \ldots, -n^2, \ldots$ ограничена сверху. В качестве верхней границы можно взять число -1 или любое число, которое больше, чем -1, например 0.

Определение 3. Последовательность (y_n) называют **ограниченной снизу**, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Иными словами, последовательность (y_n) *ограничена снизу*, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Число m называют *нижней границей последовательности*.

Например, последовательность $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$ ограничена снизу. В качестве нижней границы можно взять число 1 или любое число меньше 1.

Если последовательность ограничена и сверху, и снизу, то ее называют **ограниченной**. Например, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Эта последовательность ограничена и сверху, и снизу. В качестве верхней границы можно взять число 1, в качестве нижней границы — число 0.

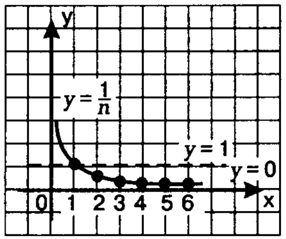


Рис. 97

Если построить график последовательности $y_n = \frac{1}{n}$, т.е. график функции $y = \frac{1}{x}, x \in N$ в прямоугольной системе координат, то окажется, что весь он расположен в полосе между некоторыми горизонтальными прямыми, например, $y = 0$, и $y = 1$ (рис. 97), а в этом и состоит, как известно, геометрический признак ограниченности функции.

Особенно наглядным становится свойство ограниченности последовательности, если члены последовательности отметить точками на числовой прямой. Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности (точнее, соответствующие им точки прямой) принадлежат некоторому отрезку. Так, изобразив члены последовательности $y_n = \frac{1}{n}$ точками на числовой прямой, замечаем, что все они принадлежат отрезку $[0, 1]$ (рис. 98).

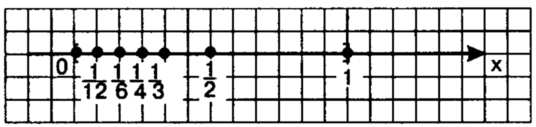


Рис. 98

Определение 4. Последовательность (y_n) называют **возрастающей**, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots$$

Например, $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1, \ldots$ — возрастающая последовательность.

Определение 5. Последовательность (y_n) называют **убывающей**, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots$$

Например, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ — убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином — **монотонные последовательности.**

Приведем еще несколько примеров.

1) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}, \ldots$ Эта последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей (немонотонная последовательность).

2) $y_n = 2^n$. Речь идет о последовательности $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ Это — возрастающая последовательность.

Вообще, *если $a > 1$, то последовательность $y_n = a^n$ возрастает.*

3) $y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Речь идет о последовательности $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ Это — убывающая последовательность.

Вообще, *если $0 < a < 1$, то последовательность $y_n = a^n$ убывает.*

§ 30. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Определение предела последовательности

Рассмотрим две числовые последовательности (y_n) и (x_n).

$$(y_n): 1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n - 1, \ldots;$$

$$(x_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатной прямой (рис. 99 для (y_n) и рис. 98 для (x_n)). Замечаем, что члены второй последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0, а у первой последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. В подобных случаях математики говорят так: последовательность (x_n) *сходится*, а последовательность (y_n) *расходится*.

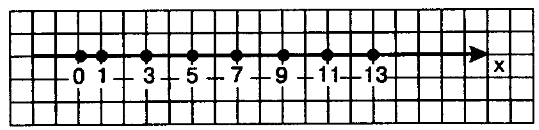


Рис. 99

Возникает естественный вопрос: как узнать, является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности. Чтобы ответить на этот вопрос, введем новый математический термин.

Определение 1. Пусть a — точка прямой, а r — положительное число. Интервал $(a-r, a+r)$ называют **окрестностью точки *a*** (рис. 100), а число r — **радиусом окрестности.**

Например, (5,98, 6,02) — окрестность точки 6, причем радиус этой окрестности равен 0,02.

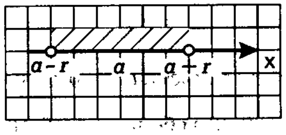


Рис. 100

Теперь мы можем ответить на поставленный выше вопрос. Но сразу уточним: математики не любят термин «точка сгущения для членов заданной последовательности», они предпочитают использовать термин «предел последовательности».

Определение 2. Число b называют **пределом последовательности** (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут либо так: $y_n \to b$ (читают: y_n стремится к b или y_n сходится к b), либо так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ (читают: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b; но обычно слова «при стремлении n к бесконечности» опускают).

Дадим несколько пояснений к определению 2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Возьмем интервал $(b-r_1,\ b+r_1)$, т.е. окрестность точки b; r_1 — радиус этой окрестности $(r_1>0)$. Существует номер n_1, начиная с которого вся последовательность содержится в указанной окрестности: $y_{n_1} \in (b-r_1, b+r_1)$, $y_{n_1+1} \in (b-r_1, b+r_1)$, $y_{n_1+2} \in (b-r_1, b+r_1)$ и т.д.

А что будет, если взять интервал $(b-r_2,\ b+r_2)$, где $0<r_2<r_1$, т.е. если уменьшить радиус окрестности? Опять найдется номер n_2, начиная с которого вся последовательность содержится в указанной окрестности, но этот номер будет больше, т.е. $n_2>n_1$.

Замечание. Если число b — предел последовательности (y_n), то, образно выражаясь, окрестность точки b — это «ловушка» для последовательности: начиная с некоторого номера n_0 эта ловушка «заглатывает» y_{n_0} и все последующие члены последовательности. Чем «тоньше» ловушка, т.е. чем меньшая выбирается окрестность, тем дольше «сопротивляется» последовательность, но потом все равно «подписывает акт о капитуляции» — попадает в выбранную окрестность.

Пример 1. Дана последовательность (y_n):

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

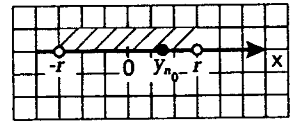


Рис. 101

Решение. Возьмем любую окрестность точки 0, пусть ее радиус равен r (рис. 101). Ясно, что всегда можно подобрать натуральное число n_0 так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n_0}<r$. Если, например, $r = 0{,}001$, то в качестве n_0 можно взять 1001, поскольку $\frac{1}{1001}<0{,}001$; если $r=\frac{3}{5774}$, то в качестве n_0 можно взять 5774, поскольку $\frac{1}{5774}<\frac{3}{5774}$, и т.д. Но это значит, что член последовательности y_n с номером n_0, т.е. y_{n_0}, попадает в выбранную окрестность точки 0. Тем более в этой окрестности будут находиться все последующие члены заданной убывающей последовательности $\frac{1}{n}$. В соответствии с определением 2 это и означает, что

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.}$$

Пример 2. Найти предел последовательности:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$$

Решение. Здесь, как и в предыдущем примере, последовательность сходится к 0: $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Результат, полученный в примере 2, является частным случаем более общего утверждения:

$$\boxed{\textit{если } |q|<1, \textit{ то } \lim_{n\to\infty} q^n = 0.}$$

А что будет с последовательностью q^n, если $|q|>1$? Пусть, например, $q=2$, т.е. речь идет о последовательности $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots$ Эта последовательность явно не имеет предела (нет «точки сгущения»). Вообще, справедливо утверждение:

если $|q|>1$, то последовательность q^n расходится.

Пример 3. Найти предел последовательности:

$$\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \ldots, \frac{2n}{n+1}, \ldots$$

Решение. Выполним некоторые преобразования выражения $\frac{2n}{n+1}$. Имеем:

$$\frac{2n}{n+1}=\frac{2n+2-2}{n+1}=\frac{2(n+1)-2}{n+1}=\frac{2(n+1)}{n+1}-\frac{2}{n+1}=2-\frac{2}{n+1}.$$

Это значит, в частности, что

$$\frac{2}{2}=2-\frac{2}{1+1};\quad \frac{4}{3}=2-\frac{2}{2+1};\quad \frac{6}{4}=2-\frac{2}{3+1};$$

$$\frac{8}{5}=2-\frac{2}{4+1};\quad \frac{10}{6}=2-\frac{2}{5+1}$$

и т.д., а потому заданную последовательность можно переписать так:

$$2-\frac{2}{2},\ 2-\frac{2}{3},\ 2-\frac{2}{4},\ 2-\frac{2}{5},\ 2-\frac{2}{6},\ \ldots,\ 2-\frac{2}{n+1},\ \ldots$$

Теперь ясно, что «точкой сгущения» является 2; иными словами, последовательность сходится к числу 2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2.$$

А теперь обсудим результаты, полученные в примерах 1—3, с геометрической точки зрения. Для этого построим графики последовательностей $y_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $y_n=\frac{2n}{n+1}$, т. е. графики функций: $y=\frac{1}{x}$, $x\in N$; $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x\in N$; $y=\frac{2x}{x+1}$, $x\in N$.

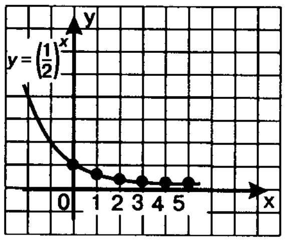


Рис. 102

График первой из этих трех функций изображен на рис. 97. Он состоит из точек с абсциссой 1, 2, 3, 4, ..., лежащих на ветви гиперболы $y=\frac{1}{x}$.

У второй функции аргумент x содержится в показателе степени, поэтому такую функцию называют *показательной*. На рис. 102 изображен график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x\in N$. Он состоит из точек с абсциссами 1, 2, 3, ..., лежащих на некоторой кривой, — ее называют *экспонентой*. Подробнее о показательной функции и ее графике речь пойдет в главе 7.

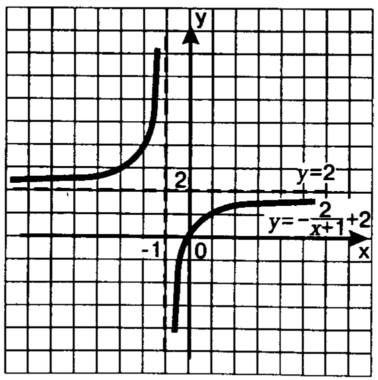


Рис. 103

Осталось рассмотреть третью функцию. Сначала надо построить график функции $y=\frac{2x}{x+1}$ или, что то же самое, $y=\frac{-2}{x+1}+2$.

Графиком этой функции является гипербола, которая получается из гиперболы $y=-\frac{2}{x}$ сдвигом на 1 влево по оси x и на 2 вверх по оси y (рис. 103).

Теперь мы имеем представление о графике последовательности $y_n=\frac{2n}{n+1}$. Он состоит из точек с абсциссами 1, 2, 3, 4, ..., лежащих на правой ветви гиперболы (рис. 104).

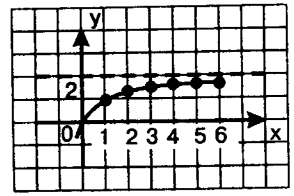


Рис. 104

Замечаете ли вы кое-что общее в характере трех построенных графиков последовательностей (см. рис. 97, 102 и 104)? Смотрите: на всех трех рисунках точки графика, по мере их ухода вправо, все ближе и ближе подходят к некоторой горизонтальной прямой: на рис. 97 — к прямой $y=0$, на рис. 102 — к прямой $y=0$, на рис. 104 — к прямой $y=2$. Каждую из этих прямых называют *горизонтальной асимптотой* графика.

Подведем итоги. Имеем:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ и прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=\frac{1}{n}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ и прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$ и прямая $y=2$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=\frac{2n}{n+1}$.

Вообще, *равенство* $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=b$ *означает, что прямая* $y=b$ *является горизонтальной асимптотой графика функции* $y=f(n)$ (рис. 105).

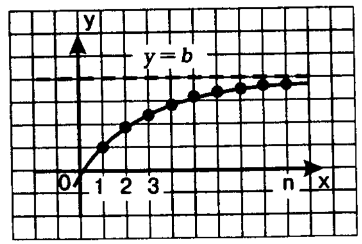


Рис. 105

На практике используется еще одно истолкование равенства

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=b,$$

связанное с приближенными вычислениями: *если последовательность* $y_n=f(n)$ *сходится к числу* b, *то выпол-*

няется приближенное равенство $f(n) \approx b$, причем это приближенное равенство тем точнее, чем больше n.

2. Свойства сходящихся последовательностей

Сходящиеся последовательности обладают рядом интересных свойств. Формальные доказательства этих свойств — прерогатива вузовского курса высшей математики. Основаны доказательства на формализованном варианте данного выше определения 2 (этот вариант определения — опять-таки прерогатива курса высшей математики). Мы дадим лишь формулировки свойств.

Свойство 1. *Если последовательность сходится, то только к одному пределу.*

Свойство 2. *Если последовательность сходится, то она ограниченна.*

Заметим, что обратное утверждение неверно: например, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ..., 1, 2, 3, ... — ограниченная последовательность, но она не сходится.

Оказывается, если последовательность не только ограниченна, но и монотонна (убывает или возрастает), то она обязательно сходится; это доказал в XIX в. немецкий математик Карл Вейерштрасс.

Свойство 3. *Если последовательность монотонна и ограниченна, то она сходится* (теорема Вейерштрасса).

Приведем классический пример из геометрии, в котором используется теорема Вейерштрасса. Возьмем окружность и будем последовательно вписывать в нее правильные многоугольники: 4-угольник, 8-угольник, 16-угольник и т.д. Последовательность площадей этих правильных многоугольников возрастает и ограниченна (снизу числом 0, а сверху, например, числом, выражающим площадь описанного около окружности квадрата). Значит, построенная последовательность сходится, ее предел принимается за площадь круга. Именно с помощью таких рассуждений и получена в математике формула площади круга $S = \pi r^2$ (установлено, что πr^2 — предел последовательности площадей вписанных в окружность радиуса r правильных многоугольников).

3. Вычисление пределов последовательностей

К установленным ранее двум важным результатам:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0; \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ если } |q|<1,$$

добавим еще один: $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

Иными словами, *предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности.*

Для вычисления пределов последовательностей в более сложных случаях используются указанные соотношения и следующая теорема.

Теорема. ***Если*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, ***то:***

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = bc;$$

3) предел частного равен частному от деления пределов:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{b}{c}$ *(но, разумеется, при дополнительных условиях: $c \neq 0$ и $y_n \neq 0$ для любого n);*

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(k\,x_n) = kb.$$

Пример 4. Найти пределы последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$; б) $y_n = \dfrac{1}{n^3}$; в) $z_n = \dfrac{k}{n^4}$; г) $t_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{5}{n^2} + 3$.

Решение. а) Имеем: $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n}$. Применив правило «предел произведения», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\cdot 0 = 0.$$

б) Рассуждая, как в п. а), получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = 0.$

в) Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{k}{n^4}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(k\cdot\dfrac{1}{n^4}\right) = k\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^4}\right) = k\cdot 0 = 0.$

Вообще, для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{n^m}\right) = 0.}$$

г) Применив правило «предел суммы», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

Пример 5. Даны числа b_1 и q, такие, что $b_1 \neq 0$, $|q| < 1$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Решение. Прежде всего воспользуемся тем, что постоянный множитель $\dfrac{b_1}{q-1}$ можно вынести за знак предела. Получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1}{q-1}(q^n-1) = \frac{b_1}{q-1} \cdot \lim_{n\to\infty}(q^n-1).$$

Далее воспользуемся тем, что $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty}(q^n-1) = 0-1 = -1$. Тогда:

$$\frac{b_1}{q-1} \cdot \lim_{n\to\infty}(q^n-1) = \frac{b_1}{q-1} \cdot (-1) = \frac{b_1}{1-q}.$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Пример 6. Вычислить $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2-4}$.

Решение. В подобных случаях применяют искусственный прием: делят и числитель, и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной n. В данном примере разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2. Получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} - \frac{4}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{4}{n^2}}.$$

Далее воспользуемся правилом «предел частного». Поскольку предел числителя равен $2+0=2$, а предел знаменателя равен $1-0=1$, то предел дроби равен $\frac{2}{1} = 2$.

Ответ: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2-4} = 2$.

4. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

Будем последовательно вычислять суммы двух, трех, четырех и т.д. членов прогрессии:

$$S_1 = b_1;$$
$$S_2 = b_1 + b_2;$$
$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3;$$
$$S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4;$$
$$\ldots$$
$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n.$$
$$\ldots$$

Получилась последовательность $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ Как всякая числовая последовательность, она может сходиться или расходиться. Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называют *суммой геометрической прогрессии* (обратите внимание: не суммой n членов геометрической прогрессии, а суммой геометрической прогрессии). Если же эта последовательность расходится, то о сумме геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме n членов геометрической прогрессии можно, разумеется, говорить и в этом случае.

Предположим, что знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q|<1$.

Напомним формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии: если $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$, то $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$.

В примере 5 мы установили, что $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$. Но $\lim_{n\to\infty} S_n$ мы назвали выше суммой геометрической прогрессии. Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Если знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) удовлетворяет неравенству $|q|<1$, то сумма S прогрессии вычисляется по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Пример 7. Найти сумму геометрической прогрессии:

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Решение. Имеем: $b_1 = 4, q = \frac{1}{2}$. Поскольку знаменатель прогрессии удовлетворяет неравенству $|q|<1$, мы имеем право воспользоваться только что полученной формулой $S = \frac{b_1}{1-q}$. Значит, $S = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$.

Ответ: $S = 8$.

Пример 8. Сумма геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов 40,5. Найти пятый член прогрессии.

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.* Дана геометрическая прогрессия: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ со знаменателем q ($|q|<1$), ее сумма вычисляется по формуле $\frac{b_1}{1-q}$. По условию эта сумма равна 9. Таким образом, получаем уравнение $\frac{b_1}{1-q} = 9$.

Последовательность $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \ldots, b_n^2, \ldots$ также является геометрической прогрессией: ее первый член равен b_1^2, знаменатель равен q^2, а сумма вычисляется по формуле $\frac{b_1^2}{1-q^2}$. По условию эта сумма равна 40,5. Таким образом, получаем уравнение $\frac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5$.

В итоге задача сводится к решению системы уравнений относительно переменных b_1 и q:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q}=9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2}=40{,}5. \end{cases}$$

<u>Второй этап.</u> ***Работа с составленной моделью.***

Для решения системы используем метод подстановки: выразим из первого уравнения переменную b_1. Получим $b_1=9\,(1-q)$. Подставим это выражение вместо b_1 во второе уравнение системы. Получим:

$$\frac{81(1-q)^2}{1-q^2}=40{,}5.$$

Далее последовательно находим:

$$\frac{2(1-q)}{1+q}=1; \qquad 2-2q=1+q; \qquad q=\frac{1}{3}.$$

$$b_1=9(1-q)=9\left(1-\frac{1}{3}\right)=6.$$

Итак, $\begin{cases} b_1=6, \\ q=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

<u>Третий этап.</u> ***Ответ на вопрос задачи.***

По условию требуется найти b_5. Имеем: $b_5=b_1q^4=6\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{2}{27}$.

Ответ: $b_5=\dfrac{2}{27}$.

§ 31. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Предел функции на бесконечности

В § 30 мы получили следующий результат: равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=b$ (1)

означает, что прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f\,(n)$ (рис. 105). Напомним, что аргумент n принимает только натуральные значения.

Пусть теперь дана функция $y=f\,(x)$, в области определения которой содержится луч $[a,+\infty)$, и пусть прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика (рис. 106) функции $y=f\,(x)$. Естественно, что математики в этом случае по аналогии с приведенным выше равенством (1) решили использовать запись:

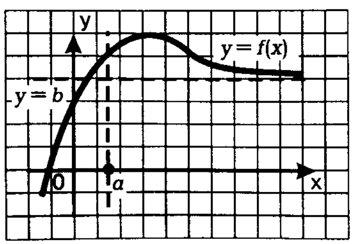


Рис. 106

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$$

(читают: предел функции $y=f(x)$ при стремлении x к плюс бесконечности равен b).

Если же дана функция $y=f\,(x)$, в области определения которой содержится луч $(-\infty,a]$, и прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ (рис. 107), то в этом случае используют запись:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

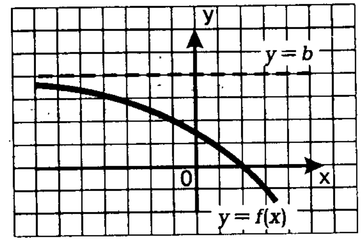


Рис. 107

(читают: предел функции $y=f(x)$ при стремлении x к минус бесконечности равен b).

Если одновременно выполняются два соотношения:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x)=b,$$

то можно объединить их одним соотношением: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$. Но условились использовать более экономную запись:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$$

(читают: *предел функции $y=f(x)$ при стремлении x к бесконечности равен b*).

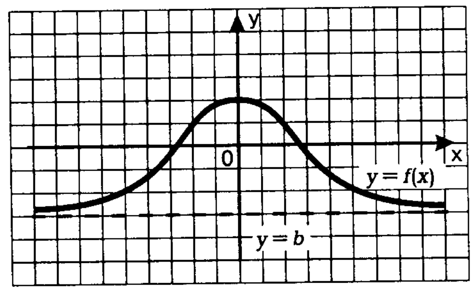


Рис. 108

В этом случае прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ как бы с двух сторон (рис. 108).

Вычисление предела функции на бесконечности осуществляется по тем же правилам, что и вычисление предела последовательности. Приведем их (с соответствующими изменениями).

1) *Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение*:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k}{x^m}\right)=0.}$$

2) *Если* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b, \quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=c$, *то*

а) *предел суммы равен сумме пределов:*

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x))=b+c;$$

б) *предел произведения равен произведению пределов:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=bc;$$

в) *предел частного равен частному от деления пределов (разумеется, при условии, что* $c\neq 0$):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c};$$

г) *постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\lim_{x\to\infty} kf(x)=kb.$$

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^2-4}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}.$$

Осталось воспользоваться правилом «предел частного». Поскольку предел числителя равен $2+0=2$, а предел знаменателя равен $1-0=1$, то предел дроби равен $\frac{2}{1}=2$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^2-4}=2$.

Замечание. Сравните только что решенный пример с примером 6 из § 30: все то же самое — та же идея, те же рассуждения. Отличие только одно: там переменная n принимала лишь натуральные значения, а здесь переменная x принимает любые действительные значения (кроме, разумеется, значений -2 и 2, которые обращают в нуль знаменатель дроби, содержащейся под знаком предела).

2. Предел функции в точке

Рассмотрим функции, графики которых изображены на рис. 109—111. Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, тем не менее это три разные функции, они отличаются друг

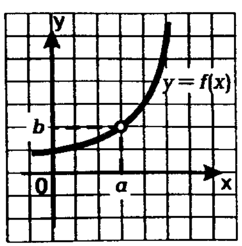


Рис. 109

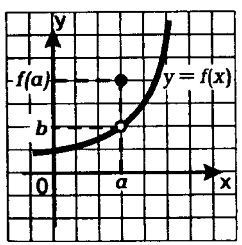


Рис. 110

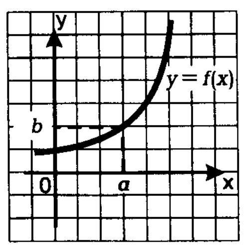


Рис. 111

от друга своим поведением в точке $x=a$. Для функции $y=f(x)$, график которой изображен на рис. 109, значение $f(a)$ не существует, функция в указанной точке не определена. Для функции $y=f(x)$, график которой изображен на рис. 110, значение $f(a)$ существует, но оно «неудачное», оно отлично, от, казалось бы, естественного значения b. Наконец, для функции $y=f(x)$, график которой изображен на рис. 111, значение $f(a)$ существует, и оно «удачное». Если же точку $x=a$ исключить из рассмотрения, то все три функции будут тождественными.

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

(читаем: *«предел функции $y=f(x)$ при стремлении x к a равен b»*).

Содержательный смысл приведенной выше записи заключается в следующем: если значения аргумента выбираются все ближе и ближе к значению $x=a$, то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения b. Можно сказать и так: *в достаточно малой окрестности точки a справедливо приближенное равенство*:

$$f(x)\approx b$$

(причем это приближенное равенство тем точнее, чем меньшая окрестность выбирается). При этом, подчеркнем еще раз, сама точка $x=a$ исключается из рассмотрения.

А теперь ответьте на вопрос: какую из рассмотренных трех функций естественно считать непрерывной в точке $x=a$? Ответ очевиден: непрерывной естественно считать третью функцию, которая удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

В каких случаях мы с вами до сих пор использовали понятие «непрерывная функция»? Мы говорили, что функция непрерывна, если видели, что ее график представляет собой сплошную линию, т.е. не имеет «проколов» и «скачков». На самом деле график функции изображают в виде сплошной линии (без «проколов» и «скачков») только тогда, когда установлена непрерывность функции. При этом функцию $y=f(x)$ называют **непрерывной в точке** $x=a$, если выполняется соотношение:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=f(a).}$$

Иными словами, функцию $y=f(x)$ называют *непрерывной в точке $x=a$*, если предел функции $y=f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x=a$.

Функцию $y=f(x)$ *называют* **непрерывной на промежутке** X, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

В курсе алгебры 7—9-го классов мы отмечали, что функции: $y=C$, $y=kx+m$, $y=ax^2+bx+c$, $y=|x|$, $y=x^n$, где n — натуральное число, — непрерывны на всей числовой прямой. Отмечали также, что функция $y=\sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0,+\infty)$, а функция $y=x^{-n}$ (n — натуральное число) непрерывна на промежутках $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$, но претерпевает разрыв в точке $x=0$. В главе 1, говоря о тригонометрических функциях, мы отмечали непрерывность функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ на всей числовой прямой, а также непрерывность функций $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$ в каждом промежутке из области их определения. До сих пор мы опирались на наглядные представления и интуицию. Математики доказали, опираясь на определение непрерывности, что все упомянутые утверждения верны. Так что теперь мы будем ими пользоваться на законных основаниях.

Между прочим, математики доказали более сильное утверждение:

Если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических выражений, то функция $y=f(x)$ непрерывна в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление пределов функций.

Пример 2. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-2x^2+5x+3)$.

Решение. Выражение x^3-2x^2+5x+3 определено в любой точке x, в частности, в точке $x=1$. Следовательно, функция $y=x^3-2x^2+5x+3$ непрерывна в точке $x=1$, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке $x=1$.

Имеем: $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-2x^2+5x+3)=1^3-2\cdot 1^2+5\cdot 1+3=7.$

Ответ: 7.

Пример 3. Вычислить: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\pi x}{\sqrt{x+4}}$.

Решение. Выражение $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{\sqrt{x+4}}$ определено в любой точке $x\geqslant 0$, в частности, в точке $x=2$. Следовательно, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=2$, а потому предел функции при стремлении x к 2 равен значению функции в точке $x=2$. Имеем: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\pi x}{\sqrt{x+4}}=\dfrac{\sin 2\pi}{\sqrt{2}+4}=\dfrac{0}{\sqrt{2}+4}=0.$

Ответ: 0.

Вы заметили, наверное, что в рассмотренных примерах вычисление пределов не составило значительных сложностей: достаточно было найти значение функции в точке, к которой стремится аргумент x. Но часты случаи, когда этот прием не срабатывает.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{4x+12}$.

Решение. Если подставить значение $x=-3$ в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0, а на 0 делить нельзя. Но заданную алгебраическую дробь можно сократить:

$$\frac{x^2-9}{4x+12}=\frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)}=\frac{x-3}{4}.$$

Значит, функции $y=\dfrac{x^2-9}{4x+12}$ и $y=\dfrac{x-3}{4}$ тождественны при условии $x\neq -3$. Но (внимание!) при вычислении предела функции при $x\to -3$ саму точку $x=-3$ можно исключить из рассмотрения, мы об этом говорили выше. Значит, $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{4x+12}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{-3-3}{4}=-1{,}5.$

Ответ: $-1{,}5$.

Вернемся снова к названию раздела математики, который мы начали изучать, — математический анализ. В начале главы 4 мы отметили: *анализируют* в этом разделе математики то, как ведет себя функция около конкретной точки. Теперь мы можем сказать точнее: *в окрестности* конкретной точки. Именно этим мы и занимались, делая выводы о функциях, графики которых изображены на рис. 109—111. Проведенный краткий анализ привел нас к понятию предела функции в точке и к понятию непрерывности функции в точке.

Важное замечание. Теория пределов — достаточно сложный раздел математического анализа, который изучается в вузах. Наше знакомство с понятием предела, как вы, наверное, заметили, поверхностное, основанное на интуиции и наглядных представлениях. Продолжая это «шапочное» знакомство, получим один очень существенный для высшей математики результат. При этом опять будем использовать не строгие рассуждения (нам пока это не по силам), а рассуждения, основанные на интуиции, наглядности, правдоподобии. Такие рассуждения математики часто называют рассуждениями «на пальцах».

Возьмем числовую окружность, выберем достаточно малое положительное значение t, отметим на окружности точку $M(t)$ и ее ординату, т.е. $\sin t$; t — это длина дуги AM, $\sin t$ — это длина перпендикуляра MP (рис. 112). Для достаточно малых значений t выполняется приближенное равенство $AM\approx MP$, т.е. $\sin t\approx t$, и, следовательно, $\dfrac{\sin t}{t}\approx 1$. Например, $\dfrac{\sin 1}{1}\approx 0{,}84147$; $\dfrac{\sin 0{,}1}{0{,}1}\approx 0{,}99833$; $\dfrac{\sin 0{,}01}{0{,}01}\approx 0{,}99998$. Естественно предположить, что

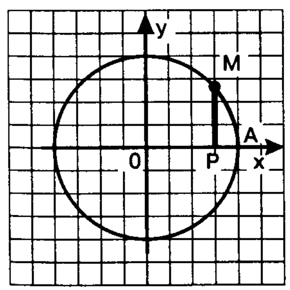


Рис. 112

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.}$$

В курсе математического анализа доказано, что это утверждение верно.

3. Приращение аргумента. Приращение функции

Изучая поведение функции $y=f(x)$ около конкретной точки x_0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используются понятия приращений аргумента и функции.

Определение 1. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность x_1-x_0 называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к x_1), а разность $f(x_1)-f(x_0)$ называют **приращением функции**.

Приращение аргумента обозначают Δx (читают: «дельта икс»; Δ — прописная буква греческого алфавита «дельта», а соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, $x_1-x_0=\Delta x$, значит, $x_1=x_0+\Delta x$

$f(x_1)-f(x_0)=\Delta y$ (или Δf), значит,

$$\boxed{\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).}$$

Пример 5. Найти приращение функции $y=x^2$ при переходе от точки $x_0=1$ к точкам: а) $x=1{,}1$; б) $x=0{,}98$.

Решение. а) $f(1)=1^2=1$; $f(1{,}1)=1{,}1^2=1{,}21$;

$$\Delta y=f(1{,}1)-f(1)=1{,}21-1=0{,}21.$$

б) $f(1)=1$; $f(0{,}98)=0{,}98^2=0{,}9604$;

$$\Delta y=f(0{,}98)-f(1)=0{,}9604-1=-0{,}0396.$$

Обратите внимание на полученный в примере 5 ответ: приращение функции (как, впрочем, и приращение аргумента) может быть и положительным, и отрицательным числом, так что не истолковывайте термин «приращение» как «прирост».

А теперь посмотрим на определение непрерывной функции с точки зрения приращений аргумента и функции. Определение непрерывности функции в точке $x=a$ выглядит так: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. Здесь $x\to a$, значит, $(x-a)\to 0$, т.е. $\Delta x\to 0$. При этом $f(x)\to f(a)$, значит, $(f(x)-f(a))\to 0$, т.е. $\Delta y\to 0$.

Получаем новое истолкование понятия непрерывности функции в точке.

Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, если в точке $x=a$ выполняется следующее условие:

если $\Delta x\to 0$, то $\Delta y\to 0$.

Пример 6. Для функции $y=kx+m$ найти:

а) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x+\Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение. а) Имеем:

$f(x)=kx+m$;

$f(x+\Delta x)=k(x+\Delta x)+m$;

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(k(x+\Delta x)+m)-(kx+m)=$

$=(kx+k\Delta x+m)-(kx+m)=k\cdot\Delta x.$

Итак, для заданной линейной функции $y=kx+m$ получили: $\Delta y=k\cdot\Delta x$.

б) Нужно вычислить $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}k=k.$$

Итак, для заданной линейной функции $y=kx+m$ получили:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=k.$$

На рис. 113 изображен график линейной функции $y=kx+m$, выделена фиксированная точка графика $M(x, f(x))$, отмечены приращения аргумента и функции при переходе от точки x к точке $x+\Delta x$. Чертеж подсказывает, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла между прямой $y=kx+m$ и положительным направлением оси x, а это — угловой коэффициент прямой. Значит, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=k$, что фактически и получено при решении примера 6, но с помощью формальных преобразований.

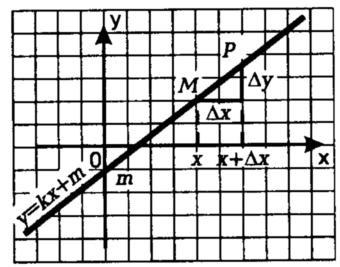


Рис. 113

Пример 7. Для функции $y=x^2$ найти:

а) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x+\Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение. а) Имеем:

$$f(x)=x^2;$$
$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2;$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=$$
$$=(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Итак, для функции $y=x^2$ получили: $\Delta y=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$.

б) Нужно вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Имеем: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$

При вычислении последнего предела мы учли, что x — фиксированная точка, т.е. постоянное число, а Δx — переменная: если $\Delta x \to 0$, то $(2x + \Delta x) \to 2x$.

Итак, для заданной функции $y = x^2$ получили: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$. ◀■

§ 32. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

1. Задачи, приводящие к понятию производной

Часто бывает так, что, решая задачи, очень далекие друг от друга по содержанию, мы приходим к одной и той же математической модели. Сила математики состоит в том, что она разрабатывает способы оперирования с той или иной математической моделью, которыми потом пользуются в других областях знаний. Вы умеете работать со многими математическими моделями — уравнениями, неравенствами, системами уравнений, системами неравенств и др. В этом параграфе речь пойдет о принципиально новой для вас математической модели. Сначала рассмотрим две различные задачи, физическую и геометрическую, процесс решения которых как раз и приводит к возникновению новой математической модели.

Задача 1 (*о скорости движения*). По прямой, на которой заданы начало отсчета, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка). Закон движения задан формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчета (в метрах). Найти скорость движения тела в момент времени t (в м/с).

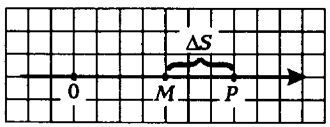


Рис. 114

Р е ш е н и е. Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке M (рис. 114), пройдя путь от начала движения $OM = s(t)$. Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим момент времени $t + \Delta t$. Координата материальной точки стала другой, тело в этот момент будет находиться в точке P: $OP = s(t + \Delta t)$.

Значит, за Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P, т.е. прошло путь MP. Имеем: $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Полученную разность мы назвали в § 31 приращением функции: $s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$. Итак, $MP = \Delta s$ (м).

Путь Δs (*м*) тело прошло за Δt секунд. Нетрудно найти среднюю скорость $v_{ср.}$ движения тела за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$:

$$v_{ср.} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ (м/с)}.$$

А что такое скорость $v(t)$ в момент времени t (ее называют иногда *мгновенной скоростью*)? Можно сказать так: это средняя скорость движения за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$ при условии, что Δt выбирается все меньше и меньше; иными словами, при условии, что $\Delta t \to 0$. Это значит, что $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср.}$

Подводя итог решению задачи 1, получаем:

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$

Прежде чем сформулировать вторую задачу и приступить к ее решению, обсудим вопрос, что следует понимать под *касательной* к плоской кривой. Термином «касательная» мы уже пользовались (на интуитивном уровне) в курсе алгебры 7—9-го классов. Например, мы говорили, что парабола $y = x^2$ *касается* оси x в точке $x = 0$ или, что то же самое, ось x является *касательной* к параболе $y = x^2$ в точке $x = 0$ (рис. 115). И дело не в том, что ось x и парабола имеют одну общую точку. Ведь ось y тоже имеет с параболой $y = x^2$ одну общую точку, однако у вас не возникнет желания назвать ось y касательной к параболе. Обычно касательную определяют следующим образом.

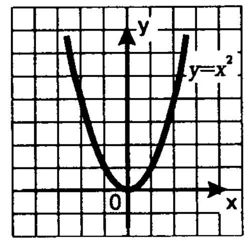


Рис. 115

Дана кривая L (рис. 116), на ней выбрана точка M. Возьмем еще одну точку на кривой, причем достаточно близкую к M, — точку P. Проведем секущую MP. Далее будем приближать точку P по кривой L к точке M. Секущая MP будет изменять свое положение, она как бы поворачивается вокруг точки M. Часто бывает так, что можно обнаружить в этом процессе прямую, представляющую собой некое предельное положение секущей; эту прямую — предельное положение секущей — называют касательной к кривой L в точке M.

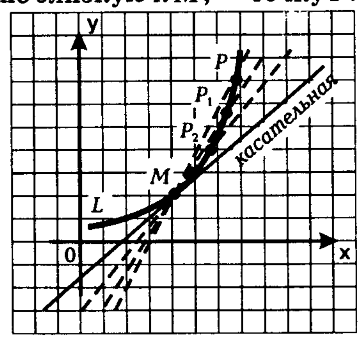


Рис. 116

Поставьте эксперимент: возьмите параболу $y = x^2$, проведите секущую OP, где O — вершина параболы, P — текущая точка. Возьмите точку P поближе к O, проведите вторую секущую. Возьмите точку P еще ближе к O, проведите третью секущую и т.д. Вы обнаружите, что предельным положением этих секущих будет ось x — это и есть касательная к параболе в ее вершине (что соответствует нашим интуитивным представлениям).

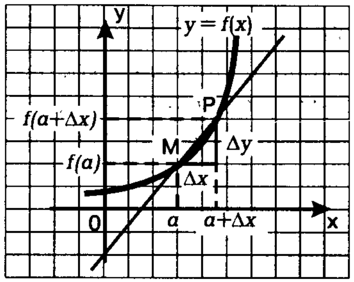


Рис. 117

Задача **2** (*о касательной к графику функции*). Дан график функции $y = f(x)$. На нем выбрана точка $M(a; f(a))$, в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной.

Решение. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике (рис. 117) точку P с абсциссой $a + \Delta x$. Ордината точки P равна $f(a + \Delta x)$. Угловой коэффициент секущей MP, т.е. тангенс угла между секущей и осью x, вычисляется по формуле $k_{\text{сек.}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если мы теперь устремим Δx к нулю, то точка P начнет приближаться по кривой к точке M. Касательную мы охарактеризовали как предельное положение секущей при этом приближении. Значит, естественно считать, что угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас.}}$ будет вычисляться по формуле $k_{\text{кас.}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек.}}$

Используя приведенную выше формулу для $k_{\text{сек.}}$, получаем:

$$\boxed{k_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

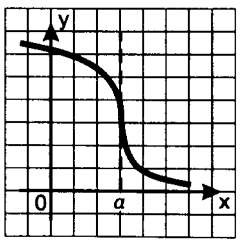


Рис. 118

Замечание. В приведенном решении задачи 2 упущен случай, когда касательная перпендикулярна оси абсцисс (см., например, рис. 118). Уравнение такой прямой имеет вид $x = a$, об угловом коэффициенте говорить в этом случае некорректно, поскольку он не существует.

Подведем итоги. Две различные задачи привели в процессе решения к одной и той же математической модели — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Многие задачи физики, химии, экономики и т.д. приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, эту математическую модель надо специально изучить, т.е.:

а) присвоить ей новый термин;

б) ввести для нее обозначение;

в) исследовать свойства новой модели.

Этим мы и займемся в следующем пункте.

2. Определение производной

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в конкретной точке x и в некоторой ее окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx, такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем соответствующее приращение функции Δy и составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при условии $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x** и обозначают $f'(x)$.

Итак,

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).}$$

Для обозначения производной часто используют символ y'.

Отметим, что $y' = f'(x)$ — это новая функция, но, естественно, связанная с функцией $y = f(x)$, определенная во всех таких точках x, в которых существует указанный выше предел. Эту функцию называют так: **производная функции $y = f(x)$**.

В примере 6 § 31 мы доказали, что для линейной функции $y = kx + m$ справедливо равенство: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k$.

Это означает, что $y' = k$ или, подробнее,

$$\boxed{(kx + m)' = k.}$$

В частности,

$$\boxed{(x)' = 1.}$$

В примере 7 § 31 мы доказали, что для функции $y = x^2$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$.

Это означает, что $y'=2x$ или, подробнее,

$$\boxed{(x^2)'=2x.}$$

Рассмотренные в п. 1 задачи 1 и 2 позволяют истолковать производную с физической и геометрической точек зрения.

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если $s(t)$ — закон прямолинейного движения тела, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент *времени* t:

$$\boxed{v=s'(t).}$$

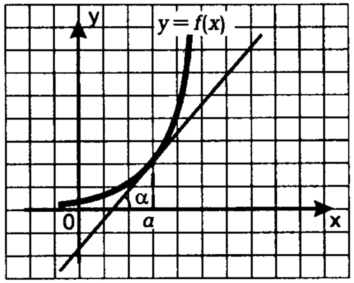


Рис. 119

На практике во многих отраслях науки используется обобщение полученного равенства: *если некоторый процесс протекает по закону $s=s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.*

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной (рис. 119):

$$\boxed{k=f'(a).}$$

Поскольку $k=\operatorname{tg}\alpha$, то верно равенство $f'(a)=\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 119).

А теперь истолкуем определение производной с точки зрения приближенных равенств. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в конкретной точке x:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).$$

Это означает, что в достаточно малой окрестности точки x выполняется приближенное равенство: $\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx f'(x)$ или $\Delta y\approx f'(x)\cdot\Delta x$.

Содержательный смысл полученного приближенного равенства заключается в следующем: *приращение функции «почти пропорционально» приращению аргумента, причем коэффициентом пропорциональности является значение производной (в заданной точке x).* Например, для функции $y=x^2$ справедливо приближенное равенство $\Delta y\approx 2x\Delta x$.

Если внимательно прочитать определение производной, то мы обнаружим, что в нем заложен алгоритм отыскания производной. Сформулируем его.

АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
(для функции $y=f(x)$)

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.

2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x+\Delta x$, найти $f(x+\Delta x)$.

3. Найти приращение функции: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример 1. Найти производную постоянной функции $y=C$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом отыскания производной.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x)=C$.

2) В точке $x+\Delta x$ имеем: $f(x+\Delta x)=C$.

3) $\Delta y=C-C=0$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$.

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$.

Ответ: $(C)'=0$.

Пример 2. Найти производную функции $y=\frac{1}{x}$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом отыскания производной.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы полагаем, что $x\neq 0$) имеем: $f(x)=\frac{1}{x}$.

2) В точке $x+\Delta x$ имеем: $f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x}$.

3) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x}=\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

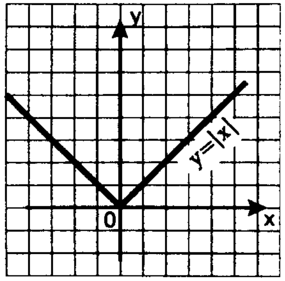


Рис. 120

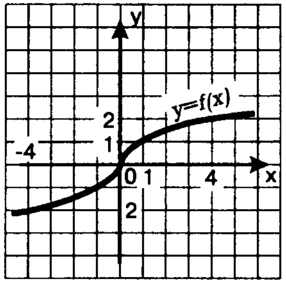


Рис. 121

Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x, то ее называют *дифференцируемой в точке* x. Процедуру отыскания производной функции $y=f(x)$ называют *дифференцированием функции* $y=f(x)$. Эти термины имеют глубокий математический смысл, но мы говорить о них не будем (нам не хватает теоретических знаний).

Обсудим такой вопрос: как связаны между собой те два достаточно тонких свойства функций, которые мы обсудили в этом и в предыдущем параграфах, — непрерывность и дифференцируемость функции в точке.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда к графику функции в точке $M(x, f(x))$ можно провести касательную, причем, напомним, угловой коэффициент касательной равен $f'(x)$. Но тогда график не может «разрываться» в точке M, т.е. функция обязана быть непрерывной в точке x.

Это были рассуждения «на пальцах». Приведем несколько более строгие рассуждения. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, то выполняется приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$. Если в этом равенстве Δx устремить к нулю, то и Δy будет стремиться к нулю, а это и есть условие непрерывности функции в точке (см. п. 3 в § 31).

Итак, *если функция дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке.*

Обратное утверждение неверно. Смотрите: функция $y=|x|$ непрерывна везде, в частности, в точке $x=0$ (рис. 120), но касательной к графику функции в «точке стыка» (0; 0) не существует. *Если в некоторой точке к графику функции нельзя провести касательную, то в этой точке не существует производной.*

А вот еще один пример. На рис. 121 изображен график кусочной функции $y=f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, \text{ если } x<0;\\ \sqrt{x}, \text{ если } x\geqslant 0.\end{cases}$$

Функция непрерывна на всей числовой прямой, в том числе в точке $x=0$. И касательная к графику функции существует в любой точке, в том числе в точке $x=0$. Но в точке $x=0$ касательная совпадает с осью y, т.е. перпендикулярна оси абсцисс, ее уравнение имеет вид $x=0$. Углового коэффициента у такой прямой нет, значит, не существует и $f'(0)$.

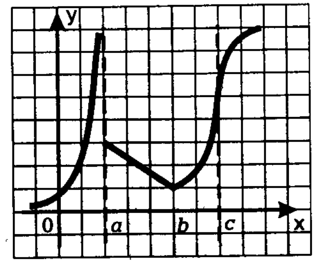


Рис. 122

Итак, мы познакомились с новым свойством функции — дифференцируемостью. Формальные определения тех или иных свойств функции — дело, конечно, хорошее, но у нас всегда были приемы «считывания информации» о наличии того или иного свойства функции по ее графику. Например, если график был сплошным, мы говорили, что функция непрерывна. А как по графику сделать вывод о дифференцируемости функции?

Ответ фактически получен выше. *Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция дифференцируема. Если в некоторой точке касательная к графику функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке функция недифференцируема.* Так, по графику функции, изображенному на рис. 122, можно сделать вывод: функция непрерывна всюду, кроме точки $x=a$; функция дифференцируема всюду, кроме точек $x=a, x=b$ — здесь касательная не существует, $x=c$ — здесь касательная параллельна оси y.

§ 33. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Формулы дифференцирования

Формулами дифференцирования обычно называют формулы для отыскания производных конкретных функций, например:

$$C'=0;$$
$$x'=1;$$
$$(kx+m)'=k;$$
$$(x^2)'=2x;$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

Вы, конечно, узнали эти формулы — они были получены нами в § 32.

Список формул дифференцирования будет постепенно пополняться. Здесь мы добавим три формулы, которые выводятся по алгоритму, приведенному в § 32. Определенные технические трудности при этом, естественно, возникают. Поступим так: сначала укажем новые формулы дифференцирования, потом разберем несколько примеров, а в конце п. 1 докажем новые формулы.

Итак, сообщаем три формулы дифференцирования:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$(\sin x)' = \cos x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Пример 1. Найти значение производной данной функции в данной точке:

а) $y = 3x + 5,\ x = 4$; б) $y = x^2,\ x = -1$; в) $y = \frac{1}{x},\ x = \frac{1}{2}$; г) $y = \sqrt{x},\ x = 4$;

д) $y = \sin x,\ x = 0$; е) $y = \cos x,\ x = \frac{\pi}{6}$.

Решение. а) Имеем: $(3x + 5)' = 3$, значит, производная равна 3 в любой точке x, в частности, в заданной точке $x = 4$.

Итак, производная функции $y = 3x + 5$ в точке $x = 4$ равна 3; на математическом языке это удобнее записывать так: $f'(4) = 3$.

б) Имеем: $(x^2)' = 2x$, значит, $f'(-1) = 2\cdot(-1) = -2$.

в) Имеем: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, значит, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.

г) Имеем: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, значит, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

д) Имеем: $(\sin x)' = \cos x$, значит, $f'(0) = \cos 0 = 1$.

е) Имеем: $(\cos x)' = -\sin x$, значит, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

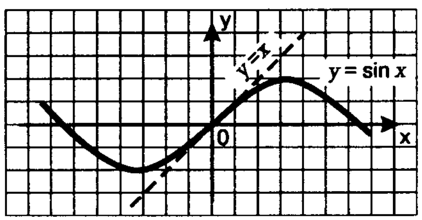


Рис. 123

Важное замечание. Когда в главе 1 мы строили график функции $y = \sin x$, то обратили ваше внимание на следующее обстоятельство: из начала координат синусоида выходит как бы под углом 45° (рис. 123). И там же сознались: почему это так, мы пока объяснить вам не можем, соответствующий разговор будет позднее. «Момент истины» наступил.

Мы только что видели, что для функции $y = \sin x$ выполняется равенство: $f'(0) = 1$. $f'(0)$ в данном случае — это угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$. Если угловой коэффициент прямой равен 1, то прямая образует с положительным направлением оси x угол 45°. Это обстоятельство и учитывается при построении графика функции $y = \sin x$.

Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$.

Решение. Уравнение касательной, как уравнение всякой прямой, имеет вид $y = kx + m$. Найдем сначала k — это угловой коэффициент касательной, который, как мы знаем, равен $f'(1)$.

Имеем: $(x^2)' = 2x$, значит, $f'(1) = 2\cdot 1 = 2$.

Итак, $k = 2$, т.е. уравнение касательной надо искать в виде $y = 2x + m$.

Осталось найти значение коэффициента m. Для этого воспользуемся тем, что касательная проходит через точку на параболе $y = x^2$ с абсциссой $x = 1$, т.е. через точку (1; 1). Имеем:

$$1 = 2\cdot 1 + m,$$
$$m = -1.$$

Итак, уравнение касательной имеет вид $y = 2x - 1$. На рис. 124 изображена парабола $y = x^2$ и построена прямая $y = 2x - 1$; чертеж наглядно демонстрирует, что эта прямая касается параболы в точке (1; 1).

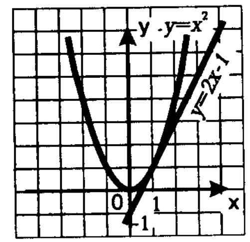


Рис. 124

Ответ: $y = 2x - 1$.

А теперь выполним данное выше обещание: выведем новые формулы дифференцирования.

Найдем производную функции $y = \sqrt{x}$.

Воспользуемся алгоритмом отыскания производной.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы полагаем, что $x > 0$) имеем: $f(x) = \sqrt{x}$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$.

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$. Здесь полезно применить искусственный прием: домножить и числитель, и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$. Что это даст? В числителе мы получим «разность квадратов»: $\left(\sqrt{x + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2$, т.е. $(x + \Delta x) - x$ или Δx, а сама дробь примет вид: $\frac{\Delta x}{\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)\cdot \Delta x}$, т.е. $\frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$.

Итак, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таким образом, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

В процессе рассуждений мы воспользовались тем, что если $\Delta x \to 0$, то $x + \Delta x \to x$ и $\sqrt{x + \Delta x} \to \sqrt{x}$

Найдем производную функции $y=\sin x$.

Воспользуемся алгоритмом отыскания производной.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x)=\sin x$.

2) В точке $x+\Delta x$ имеем: $f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$.

3) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x$. Преобразуем полученное выражение, воспользовавшись формулой «разность синусов» ($\sin s-\sin t=2\sin\frac{s-t}{2}\cos\frac{s+t}{2}$):

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{(x+\Delta x)-x}{2}\cos\frac{(x+\Delta x)+x}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$. В правой части полученного равенства — обратите внимание — три раза содержится выражение $\frac{\Delta x}{2}$. Есть смысл обозначить его буквой t. Получим: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin t\cos(x+t)}{t}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin t\cos(x+t)}{t}$.

А далее рассуждаем так: $\Delta x\to 0$, а $t=\frac{\Delta x}{2}$, значит, $t\to 0$ и под знаком предела вместо условия $\Delta x\to 0$ можно записать условие $t\to 0$.

Таким образом,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos(x+t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos(x+t).$$

Получили произведение пределов. Первый предел равен 1 (см. п. 2 § 31). А второй предел равен $\cos x$. В итоге получаем $\cos x$.

Итак,

$$(\sin x)'=\cos x.$$

●

Аналогично выводится формула

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

2. Правила дифференцирования

Здесь речь пойдет о правилах нахождения производных суммы, произведения, частного функций. Приведем эти правила.

Правило 1. *Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причем производная суммы равна сумме производных:*

$$\boxed{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).}$$

На практике это правило формулируют короче: *производная суммы равна сумме производных*. При этом речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций.

Например, $(x^2+\sin x)'=(x^2)'+(\sin x)'=2x+\cos x$.

Правило 2. *Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y=kf(x)$ имеет производную в точке x, причем:*

$$\boxed{(k f(x))'=k f'(x).}$$

На практике это правило формулируют короче: *постоянный множитель можно вынести за знак производной*.

Например,

$(5x^2)'=5(x^2)'=5\cdot 2x=10x$;

$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)'=-\frac{1}{3}(\cos x)'=-\frac{1}{3}(-\sin x)=\frac{1}{3}\sin x$.

Правило 3. *Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем:*

$$\boxed{(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).}$$

На практике это правило формулируют так: *производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых. Первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.*

Например: $((2x+3)\sin x)'=(2x+3)'\sin x+(2x+3)(\sin x)'=$
$=2\sin x+(2x+3)\cos x$.

Правило 4. *Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют производную в точке x, причем в этой точке $g(x)\neq 0$, то и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, причем:*

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.}$$

Например, $\left(\frac{x^2}{5-4x}\right)'=\frac{(x^2)'\cdot(5-4x)-x^2(5-4x)'}{(5-4x)^2}=$
$=\frac{2x(5-4x)-x^2(-4)}{(5-4x)^2}=\frac{10x-4x^2}{(5-4x)^2}$.

Дальнейший план изложения материала в этом пункте будет таким. Сначала мы выведем первые два правила дифференцирования — это сравнительно нетрудно. Затем рассмотрим ряд примеров на использование правил и формул дифференцирования, чтобы вы к ним привыкли. В самом конце пункта мы приведем доказательство третьего правила дифференцирования — для тех, кому это интересно.

Выведем правило дифференцирования функции $y = f(x) + g(x)$.

Воспользуемся алгоритмом отыскания производной.

1) Положим, ради удобства, $f(x) + g(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x) = f(x) + g(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - ((f(x) + g(x)) =$
$= (f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x)) = \Delta f + \Delta g$.

Итак, $\Delta y = \Delta f + \Delta g$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$.

Итак,

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

●

Выведем правило дифференцирования функции $y = k f(x)$.

Воспользуемся алгоритмом отыскания производной.

1) Положим, ради удобства, $k f(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x) = k f(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $h(x + \Delta x) = k f(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = k f(x + \Delta x) - k f(x) =$
$= k(f(x + \Delta x) - f(x)) = k \Delta f$.

Итак, $\Delta y = k \Delta f$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{k \Delta f}{\Delta x} = k \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = k \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = k f'(x)$.

Получим $(k f(x))' = k f'(x)$.

●

Пример 3. Найти производную функции $y = 3x^2 - 4x + 2$.

Решение. Имеем:

$$y' = (3x^2 - 4x + 2)' = (3x^2)' + (-4x + 2)' = 3(x^2)' + (-4) = 3 \cdot 2x - 4 = 6x - 4.$$

Мы воспользовались первым и вторым правилами, а также формулами дифференцирования линейной функции $y = -4x + 2$ и функции $y = x^2$.

Ответ: $y' = 6x - 4$.

Пример 4. Найти производные функций: а) $y = x^3$; б) $y = x^4$; в) $y = x^5$.

Решение. а) Представим x^3 в виде $x^2 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения. Получим:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

Итак,

$$(x^3)' = 3x^2.$$

б) Представим x^4 в виде $x^3 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения. Получим:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3.$$

Итак, $(x^4)' = 4x^3$.

в) Представим x^5 в виде $x^4 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения. Получим:

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot (x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4.$$

Итак, $(x^5)' = 5x^4$.

Ответ: а) $(x^3)' = 3x^2$; б) $(x^4)' = 4x^3$; в) $(x^5)' = 5x^4$.

А теперь сравним пять формул: две формулы, которые мы знали раньше, и те три формулы, которые мы вывели в примере 4. Смотрите:

$$x' = 1;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$(x^3)' = 3x^2;$$
$$(x^4)' = 4x^3;$$
$$(x^5)' = 5x^4.$$

Возникает естественная гипотеза: для любого натурального показателя n справедлива формула дифференцирования:

$$\boxed{(x^n)' = n x^{n-1}.} \qquad (1)$$

Важное замечание. «Естественная гипотеза» — это стилистический оборот из области интуиции. Интуиция хороша для открытия новых фактов, но не для их обоснования. Формулу (1) мы «прочувствовали», но строго не обосновали. Приведем (для интересующихся) строгое доказательство.

Мы знаем, что $x' = 1$. Эту формулу можно переписать в виде $(x^1)' = 1 \cdot x^0$. Значит, формула (1) верна для $n = 1$.

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа $n = k$, т.е. предположим, что верно равенство: $(x^k)' = k x^{k-1}$. Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа $n = k + 1$, т.е. докажем, что $(x^{k+1})' = (k+1) x^k$.

В самом деле имеем:

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = k x^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1) x^k.$$

Итак, для $n = 1$ формула (1) верна — это мы проверили. Далее, мы доказали, что если формула (1) верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$. Воспользуемся этим: формула (1) верна для $n = 1$, значит, она верна и для следующего числа $n=2$; так как она верна для $n=2$, то она верна и для следующего числа $n=3$ и т.д. Значит, формула (1) верна для любого натурального числа n. ●

Использованный здесь метод рассуждения носит в математике название *метод математической индукции*.

Пользуясь формулой (1) и соответствующими правилами дифференцирования, можно найти производную любого многочлена.

Пример 5. Найти точки, в которых касательная к графику функции $y=x^3-3x+2$ параллельна оси x.

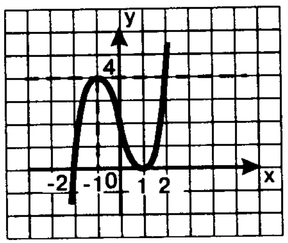


Рис. 125

Решение. Имеем: $y'=(x^3-3x+2)'=3x^2-3$. Если касательная параллельна оси x, то ее угловой коэффициент равен нулю. Но, с другой стороны, угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Значит, нам нужно найти точки, в которых производная обращается в нуль. Имеем: $3x^2-3=0$; находим: $x_1=1, x_2=-1$.

Далее, $f(1)=1^3-3\cdot1+2=0$;
$f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)+2=4$.

Итак, касательная, проведенная к графику функции $y=x^3-3x+2$ в точке $(1;0)$ или в точке $(-1;4)$, будет параллельна оси x. На рис. 125 дана геометрическая иллюстрация полученного результата — построен график функции $y=x^3-3x+2$. При этом мы учли, что $f(-2)=0$, т.е. график пересекает ось абсцисс в точке $x=-2$.

Пример 6. Найти производные функций: а) $y=\operatorname{tg}x$; б) $y=\operatorname{ctg}x$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, и правилом дифференцирования частного. Получим:

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом, мы вывели еще одну формулу дифференцирования:

$$\boxed{(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.}$$

Понятно, что эта формула справедлива лишь при допустимых значениях x, т.е. при $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$.

б) Рассуждая аналогично (советуем вам выполнить соответствующие рассуждения), получим:

$$\boxed{(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.}$$

В математике наряду с прямой задачей часто решают обратную. До сих пор мы говорили о том, как по функции найти ее производную. Но часто бывает так, что известна производная, а найти нужно саму функцию. Если, например, известно, что $f'(x)=\cos x$, то $f(x)=\sin x$; в самом деле, производная от $\sin x$ равна $\cos x$. Если известно, что $f'(x)=x^2$, то нетрудно догадаться, что $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$; в самом деле, $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}\cdot(x^3)'=\dfrac{1}{3}\cdot3x^2=x^2$.

Далее в § 37 мы подробнее поговорим о решении обратных задач, т.е. о том, как, зная производную функции, найти саму функцию.

Завершая этот пункт, выполним данное выше обещание, выведем правило дифференцирования произведения, т.е. функции $y=f(x)g(x)$.

Воспользуемся алгоритмом отыскания производной.

1) Положим, ради удобства, $f(x)g(x)=h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x)=f(x)g(x)$.

2) В точке $x+\Delta x$ имеем: $h(x+\Delta x)=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)=$
$=(f(x)+\Delta f)(g(x)+\Delta g)=f(x)g(x)+\Delta fg(x)+f(x)\Delta g+\Delta f\Delta g$.

3) $\Delta y=h(x+\Delta x)-h(x)=(f(x)g(x)+\Delta fg(x)+f(x)\Delta g+\Delta f\Delta g)-$
$-f(x)g(x)=\Delta f\,g(x)+f(x)\Delta g+\Delta f\,\Delta g$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta f\,g(x)+f(x)\Delta g+\Delta f\,\Delta g}{\Delta x}=\dfrac{\Delta f}{\Delta x}g(x)+\dfrac{\Delta g}{\Delta x}f(x)+\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\dfrac{\Delta g}{\Delta x}\Delta x$.

5) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}g(x)+\dfrac{\Delta g}{\Delta x}f(x)+\dfrac{\Delta f\,\Delta g}{\Delta x\,\Delta x}\Delta x\right)=$
$=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)+f'(x)g'(x)\cdot0=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

Итак,

$$(f(x)g(x))'=f'(x)\,g(x)+f(x)g'(x). \quad ●$$

3. Дифференцирование функции $y=f(kx+m)$

Мы знаем, чему равны производные функций: $y=x^n$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\sqrt{x}$. Нередко на практике приходится находить производные функций $y=\sin 2x$, $y=\cos\left(3-\dfrac{x}{2}\right)$ и т.д. Возникает вопрос: если мы знаем, чему равна производная функции $y=f(x)$, то как вычислить производную функции $y=f(kx+m)$?

С функцией $y=\sin 2x$ можно поступить так. Известно, что $\sin 2x=2\sin x\cos x$. Тогда:

$$(\sin 2x)'=(2\sin x\cos x)'=2((\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)')=$$
$$=2(\cos x\cos x+\sin x(-\sin x))=2(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos 2x.$$

Воспользовавшись правилом дифференцирования произведения и правилом вынесения постоянного множителя за знак производной, а также формулами синуса и косинуса двойного аргумента, мы доказали, что

$$(\sin 2x)'=2\cos 2x.$$

Хорошо, скажете вы, а как быть с производной функций $y=\sin 3x$, $y=\cos 4x$? Неужели каждый раз придется применять соответствующие формулы тригонометрии? Отвечаем: не придется. Обратите внимание на выведенную формулу. Чем она отличается от формулы дифференцирования функции $y=\sin x$? Только тем, что появился дополнительный множитель 2, да в роли аргумента выступает не x, а $2x$. Точно так же будет обстоять дело и в других аналогичных случаях: используется известная формула дифференцирования и появляется дополнительный множитель, равный коэффициенту при x. Например, справедливы следующие формулы:

$$(\cos 4x)'=-4\cdot\sin 4x;$$
$$(\sin 3x)'=3\cdot\cos 3x;$$
$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}};$$
$$\left((2x+1)^5\right)'=2\cdot 5(2x+1)^4=10(2x+1)^4.$$

Вообще, справедливо следующее утверждение.

Теорема. ***Производная функции $y=f(kx+m)$ вычисляется по формуле***

$$\boxed{(f(kx+m))'=kf'(kx+m).}$$

Доказательство теоремы приведем после решения примера.

Пример 7. Найти значение производной функции $y=f(x)$, где $f(x)=\sqrt{7-2{,}16x}$, в точке $x=1$.

Решение. Сначала найдем производную в произвольной точке x. Известно, что $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. По этой формуле найдем интересующую нас производную, но при этом учтем два обстоятельства: 1) под знаком корня напишем не x, а $7-2{,}16x$; 2) укажем дополнительный множитель, равный $-2{,}16$, — это коэффициент при x. Таким образом,

$$(\sqrt{7-2{,}16x})'=-2{,}16\cdot\frac{1}{2\sqrt{7-2{,}16x}}.$$

Чтобы вычислить $f'(1)$, в полученное выражение подставим $x=1$:

$$f'(1)=-2{,}16\cdot\frac{1}{2\sqrt{7-2{,}16}}=-2{,}16\cdot\frac{1}{2\sqrt{4{,}84}}=-\frac{2{,}16}{4{,}4}=-\frac{27}{55}.$$

Ответ: $f'(1)=-\frac{27}{55}$.

Завершая этот параграф, докажем сформулированную выше теорему.

Введем обозначение $t=kx+m$ и заметим, что если аргументу x придать приращение Δx, то переменная t получит приращение $k\cdot\Delta x$. В самом деле,

$$t(x)=kx+m,\quad t(x+\Delta x)=k(x+\Delta x)+m,$$
$$\Delta t=(k(x+\Delta x)+m)-(kx+m)=k\cdot\Delta x.$$

А теперь применим известный алгоритм из пяти шагов для отыскания производной.

1) Положим, ради удобства, $f(kx+m)=h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x)=f(kx+m)=f(t)$.

2) В точке $x+\Delta x$ имеем: $h(x+\Delta x)=f(k(x+\Delta x)+m)=$ $=f(kx+m+k\cdot\Delta x)=f(t+\Delta t)$.

3) $\Delta y=h(x+\Delta x)-h(x)=f(t+\Delta t)-f(t)$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta x}=\frac{k(f(t+\Delta t)-f(t))}{k\cdot\Delta x}=\frac{k(f(t+\Delta t)-f(t))}{\Delta t}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}k\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=kf'(t)=kf'(kx+m)$.

Итак, $(f(kx+m))'=kf'(kx+m)$. ●

§ 34. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

В § 32 говорилось о том, что если точка $M\ (a;\ f(a))$ принадлежит графику функции $y=f(x)$ и если в этой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную к оси абсцисс, то угловой коэффициент касательной равен $f'(a)$. Мы этим уже несколько раз пользовались. Например, в § 33 было установлено, что график функции $y=\sin x$ (синусоида) в начале координат образует с осью абсцисс угол 45° (точнее, касательная к графику в начале координат составляет с положительным направлением оси x угол 45°), а в примере 5 § 33 были найдены точки на графике заданной функции, в которых касательная параллельна оси абсцисс. В примере 2 § 33 было составлено уравнение касательной к графику функции $y=x^2$ в точке $x=1$ (точнее, в точке (1; 1), но чаще указывают только значение абсциссы, полагая, что если значение абсциссы известно, то значение ординаты можно найти из уравнения $y=f(x)$). В этом параграфе мы выработаем алгоритм составления уравнения касательной к графику любой функции.

Пусть даны функция $y=f(x)$ и точка $M\ (a;\ f(a))$, а также известно, что существует $f'(a)$. Составим уравнение касательной к графику заданной функции в заданной точке. Это уравнение, как уравнение любой прямой, не параллельной оси ординат, имеет вид $y=kx+m$, поэтому задача состоит в отыскании значений коэффициентов k и m.

С угловым коэффициентом k проблем нет: мы знаем, что $k=f'(a)$. Для вычисления значения m воспользуемся тем, что искомая прямая проходит через точку $M(a;\ f(a))$. Это значит, что, если подставить координаты точки M в уравнение прямой, получим верное равенство: $f(a)=ka+m$, откуда находим, что $m=f(a)-ka$.

Осталось подставить найденные значения коэффициентов k и m в уравнение прямой:

$$y=kx+m;$$
$$y=kx+(f(a)-ka);$$
$$y=f(a)+k(x-a);$$
$$\boxed{y=f(a)+f'(a)\ \ (x\pm a).} \qquad (1)$$

Нами получено *уравнение касательной к графику функции* $y=f(x)$ *в точке* $x=a$.

Если, скажем, $y=x^2$ и $x=1$ (т.е. $a=1$), то $f(a)=f(1)=1^2=1$; $f'(x)=2x$, значит, $f'(a)=f'(1)=2\cdot1=2$.

Подставив в уравнение (1) найденные значения $a=1$, $f(a)=1$ $f'(a)=2$, получим: $y=1+2(x-1)$, т.е. $y=2x-1$.

Сравните этот результат с тем, что был получен в примере 2 из § 33. Естественно, получилось то же самое.

Составим уравнение касательной к графику функции $y=\operatorname{tg} x$ в начале координат. Имеем: $a=0$, $f(0)=\operatorname{tg} 0=0$; $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, значит, $f'(0)=1$. Подставив в уравнение (1) найденные значения $a=0$, $f(a)=0$, $f'(a)=1$, получим: $y=x$.

Именно поэтому мы и провели тангенсоиду в § 15 (см. рис. 62) через начало координат под углом 45° к оси абсцисс.

Решая эти достаточно простые примеры, мы фактически пользовались определенным алгоритмом, который заложен в формуле (1). Сделаем этот алгоритм явным.

АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $y=f(x)$

1) *Обозначить абсциссу точки касания буквой* a.

2) *Вычислить* $f(a)$.

3) *Найти* $f'(x)$ *и вычислить* $f'(a)$.

4) *Подставить найденные числа* a, $f(a)$, $f'(a)$ *в формулу* (1).

Пример 1. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{1}{x}$ в точке $x=1$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом, учитывая, что в данном примере $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

1) $a=1$.

2) $f(a)=f(1)=\dfrac{1}{1}=1$.

3) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$; $f'(a)=f'(1)=-\dfrac{1}{1^2}=-1$.

4) Подставим найденные три числа: $a=1$, $f(a)=1$, $f'(a)=-1$ в формулу (1). Получим:

$$y=1-(x-1),\quad y=2-x.$$

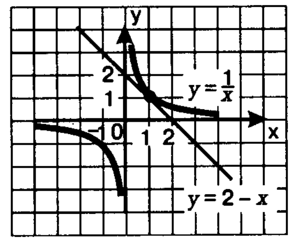


Рис. 126

На рис. 126 изображена гипербола $y=\dfrac{1}{x}$, построена прямая $y=2-x$. Чертеж подтверждает приведенные выкладки: действительно, прямая $y=2-x$ касается гиперболы в точке (1; 1).

Ответ: $y=2-x$.

Пример 2. К графику функции $y=\dfrac{x^3}{3}$ провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y=4x-5$.

Решение. Уточним формулировку задачи. Требование «провести касательную» обычно означает «составить уравнение касательной». Это логично, ибо если человек смог составить уравнение касательной, то вряд ли он будет испытывать затруднения с построением на координатной плоскости прямой по ее уравнению.

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$. Но в отличие от предыдущего примера здесь имеется неясность: не указана явно абсцисса точки касания.

Начнем рассуждать так. Искомая касательная должна быть параллельна прямой $y=4x-5$. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты. Значит, угловой коэффициент касательной должен быть равен угловому коэффициенту заданной прямой:

$k_{кас.}=4$. Но $k_{кас.}=f'(a)$. Таким образом, значение a мы можем найти из уравнения $f'(a)=4$.

Имеем: $f'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$; $f'(a)=a^2$.

Из уравнения $f'(a)=4$, т.е. $a^2=4$ находим $a_1=2$, $a_2=-2$. Значит, имеются две касательные, удовлетворяющие условию задачи: одна в точке с абсциссой 2, другая в точке с абсциссой −2.

Теперь можно действовать по алгоритму.

1) $a_1=2$, $a_2=-2$.

2) $f(a_1)=\dfrac{2^3}{3}=\dfrac{8}{3}$; $f(a_2)=\dfrac{(-2)^3}{3}=-\dfrac{8}{3}$.

3) $f'(a_1)=f'(a_2)=4$.

4) Подставив значения $a_1=2$, $f(a_1)=\dfrac{8}{3}$, $f'(a_1)=4$ в формулу (1), получим: $y=\dfrac{8}{3}+4(x-2)$, $y=4x-\dfrac{16}{3}$.

Подставив значения $a_2=2$, $f(a_2)=-\dfrac{8}{3}$, $f'(a_2)=4$ в формулу (1), получим: $y=-\dfrac{8}{3}+4(x+2)$, $y=4x+\dfrac{16}{3}$.

Ответ: $y=4x-\dfrac{16}{3}$, $y=4x+\dfrac{16}{3}$.

Пример 3. Из точки (0; 1) провести касательную к графику функции $y=\sqrt{x}$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере $f(x)=\sqrt{x}$. Заметим, что и здесь, как в примере 2, не указана явно абсцисса точки касания. Тем не менее действуем по алгоритму.

1) Пусть $x=a$ — абсцисса точки касания; ясно, что $a>0$.

2) $f(a)=\sqrt{a}$.

3) $f'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

4) Подставив значения a, $f(a)=\sqrt{a}$, $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ в формулу (1), получим:

$$y=\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a);$$

$$y=\frac{x}{2\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{2}. \qquad (2)$$

По условию касательная проходит через точку (0; 1). Подставив в уравнение (2) значения $x=0$, $y=1$, получим: $1=\dfrac{\sqrt{a}}{2}$, и далее $\sqrt{a}=2$, $a=4$.

Как видите, в этом примере только на четвертом шаге алгоритма нам удалось найти абсциссу точки касания. Подставив значение $a=4$ в уравнение (2), получим:

$$y=\frac{x}{4}+1.$$

На рис. 127 представлена геометрическая иллюстрация рассмотренного примера: построен график функции $y=\sqrt{x}$, проведена прямая $y=\dfrac{x}{4}+1$, выделена точка касания (4; 2).

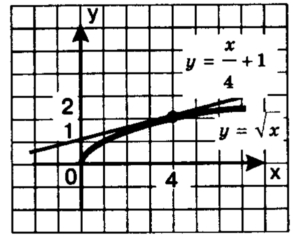


Рис.127

Ответ: $y=\dfrac{x}{4}+1$.

В § 32 мы отметили, что для функции $y=f(x)$, имеющей производную в фиксированной точке x, справедливо приближенное равенство:

$$\Delta y\approx f'(x)\,\Delta x,$$

или, подробнее,

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x.$$

Для удобства дальнейших рассуждений изменим обозначения: вместо x будем писать a, вместо $x+\Delta x$ будем писать x и соответственно вместо Δx будем писать $x-a$. Тогда написанное выше приближенное равенство примет вид:

$$f(x)-f(a)\approx f'(a)(x-a)$$

или

$$\boxed{f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a).} \qquad (3)$$

А теперь взгляните на рис. 128. К графику функции $y=f(x)$ проведена касательная в точке $M(a;f(a))$. Отмечена точка x на оси абсцисс близко от a. Ясно, что $f(x)$ — ордината графика функции в указанной точке x. А что такое $f(a)+f'(a)(x-a)$? Это ордината касательной, соответствующая той же точке x — см. формулу (1). В чем же смысл приближенного равенства (3)? В том, что для вычисления приближенного значения функции берут значение ординаты касательной.

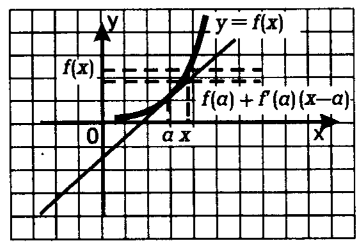


Рис. 128

Пример 4. Найти приближенное значение числового выражения $1{,}02^7$.

Решение. Речь идет об отыскании значения функции $y=x^7$ в точке $x=1{,}02$. Воспользуемся формулой (3), учтя, что в данном примере $f(x)=x^7$, $a=1$, $f(a)=f(1)=1$; $x=1{,}02$, $f'(x)=7x^6$ и, следовательно, $f'(a)=f'(1)=7\cdot 1^6=7$.

В итоге получаем:

$$1{,}02^7\approx 1+7\cdot 0{,}02, \quad \text{т.е.} \quad 1{,}02^7\approx 1{,}14.$$

Если мы воспользуемся калькулятором, то получим:

$$1{,}02^7=1{,}148685667\ldots$$

Как видите, точность приближения вполне приемлема.

Ответ: $1{,}02^7\approx 1{,}14$.

§ 35. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ

1. Исследование функций на монотонность

На рис. 129 представлен график некоторой возрастающей дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведем касательные к графику в точках $x = x_1$ и $x = x_2$. Что общего у построенных прямых? Общее то, что обе они составляют с осью x острый угол, а значит, у обеих прямых положительный угловой коэффициент. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, $f'(x_1) > 0$ и $f'(x_2) > 0$. А в точке $x = x_3$ касательная параллельна оси x, в этой точке выполняется равенство $f'(x_3) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения *возрастающей* дифференцируемой функции выполняется неравенство

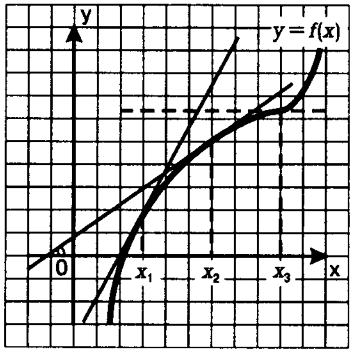


Рис. 129

$$f'(x) \geqslant 0.$$

На рис. 130 представлен график некоторой убывающей дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведем касательные к графику в точках $x = x_1$ и $x = x_2$. Что общего у построенных прямых? Общее то, что обе они составляют с осью x тупой угол, а значит, у обеих прямых отрицательный угловой коэффициент. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, $f'(x_1) < 0$ и $f'(x_2) < 0$. А в точке $x = x_3$ касательная параллельна оси x, в этой точке выполняется равенство $f'(x_3) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения *убывающей* дифференцируемой функции выполняется неравенство

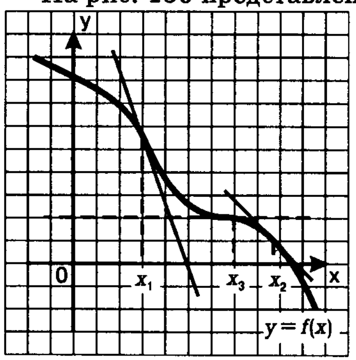


Рис. 130

$$f'(x) \leqslant 0.$$

Эти рассуждения показывают, что между характером монотонности функции и знаком ее производной есть определенная связь:

если функция возрастает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неотрицательна; если функция убывает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неположительна.

Для практики гораздо важнее то, что верны и обратные теоремы, показывающие, как по знаку производной можно установить характер монотонности функции на промежутке. При этом, во избежание недоразумений, берут только открытые промежутки, т.е. интервалы или открытые лучи. Дело в том, что для функции, определенной на отрезке $[a, b]$, не очень корректно ставить вопрос о существовании и о значении производной в концевой точке (в точке $x = a$ или в точке $x = b$), поскольку в точке $x = a$ приращение аргумента может быть только положительным, а в точке $x = b$ — только отрицательным. В определении производной такие ограничения не предусмотрены.

Теорема 1. ***Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$ (причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет лишь конечное множество корней), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.***

Теорема 2. ***Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$ (причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет лишь конечное множество корней), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.***

Доказательства этих теорем проводят обычно в курсе высшей математики. Мы ограничимся проведенными выше рассуждениями «на пальцах» и для вящей убедительности дадим еще физическое истолкование сформулированных теорем.

Пусть по прямой движется материальная точка, $s = s(t)$ — закон движения. Если скорость все время положительна, то точка постоянно удаляется от начала отсчета, т.е. функция $s = s(t)$ возрастает. Если же скорость все время отрицательна, то точка постоянно приближается к началу отсчета, т.е. функция $s = s(t)$ убывает. Если скорость движения была положительна, затем в какой-то отдельный момент времени обратилась в нуль, а потом снова стала положительной, то движущееся тело в указанный момент времени как бы притормаживает, но все равно продолжает удаляться от начальной точки. Так что и в этом случае функция $s = s(t)$ возрастает. А что такое скорость? Это производная пути по времени. Значит, от знака производной (скорости) зависит характер монотонности функции — в данном случае функции $s = s(t)$. Об этом как раз и говорят обе сформулированные теоремы.

Пример 1. Доказать, что функция $y=x^5+2x^3-4$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$f'(x)=5x^4+6x^2.$$

Очевидно, что при всех x выполняется неравенство $5x^4+6x^2\geqslant 0$. Значит, по теореме 1, функция возрастает на всей числовой прямой.

Пример 2. а) Доказать, что функция $y=5\cos x+\sin 4x-10x$ убывает на всей числовой прямой;

б) решить уравнение $5\cos x+\sin 4x-10x=x^3+5$.

Решение. а) Найдем производную заданной функции:

$$f'(x)=-5\sin x+4\cos 4x-10.$$

Полученное выражение всегда отрицательно. В самом деле, для всех значений x выполняются неравенства:

$$\begin{array}{c} -5\sin x\leqslant 5 \\ + \\ 4\cos 4x\leqslant 4 \\ \hline -5\sin x+4\cos 4x\leqslant 9. \end{array}$$

Значит, $-5\sin x+4\cos 4x-10\leqslant -1$.

Тем более $-5\sin x+4\cos 4x-10<0$. Это неравенство выполняется при всех значениях x. Значит, по теореме 2, функция убывает на всей числовой прямой.

б) Рассмотрим уравнение $5\cos x+\sin 4x-10x=x^3+5$.

Как было установлено только что, $y=5\cos x+\sin 4x-10x$ — убывающая функция. В то же время $y=x^3+5$ — возрастающая функция. Имеет место следующее утверждение: *если одна из функций $y=f(x)$ или $y=g(x)$ возрастает, а другая убывает и если уравнение $f(x)=g(x)$ имеет корень, то только один* (рис. 131 наглядно иллюстрирует это утверждение). Корень заданного уравнения подобрать нетрудно — это число $x=0$ (при этом значении уравнение обращается в верное числовое равенство $5=5$).

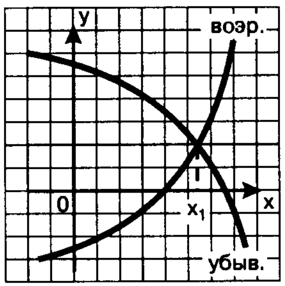


Рис. 131

Итак, $x=0$ — единственный корень заданного уравнения.

Пример 3. а) Исследовать на монотонность функцию $y=2x^3+3x^2-1$;

б) построить график этой функции.

Решение. а) Исследовать функцию на монотонность — это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких убывает. Согласно теоремам 1 и 2 это связано со знаком производной.

Найдем производную данной функции: $f'(x)=6x^2+6x$ и далее $f'(x)=6x(x+1)$.

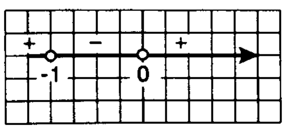


Рис. 132

На рис. 132 схематически указаны знаки производной по промежуткам области определения: на луче $(-\infty,-1)$ производная положительна, на интервале $(-1,0)$ — отрицательна, на луче $(0,+\infty)$ — положительна. Значит, на первом из указанных промежутков функция возрастает, на втором убывает, на третьем возрастает.

Обычно, если функция непрерывна не только на открытом промежутке, но и в его концевых точках, эти концевые точки включают в промежуток монотонности функции.

Таким образом, заданная функция возрастает на луче $(-\infty,-1]$, возрастает на луче $[0,+\infty)$, убывает на отрезке $[-1,0]$.

б) Графики функций строят «по точкам». Для этого надо составить таблицу значений функции $y=2x^3+3x^2-1$, куда обязательно следует включить значения функции в концевых точках промежутков монотонности $x=-1$ и $x=0$ и еще пару-тройку значений:

x	-1	0	1	-2
y	0	-1	4	-5

Отметим эти точки на координатной плоскости. Учтем найденные в п. а) промежутки возрастания и убывания функции, а также то, что в точках $x=-1$ и $x=0$ производная функции равна нулю, т.е. касательная к графику функции в указанных точках параллельна оси абсцисс, более того, в точке $(-1;\ 0)$ она даже совпадает с осью абсцисс. Учтем, наконец, то, что функция непрерывна, т.е. ее графиком является сплошная линия. График заданной в условии функции изображен на рис. 133.

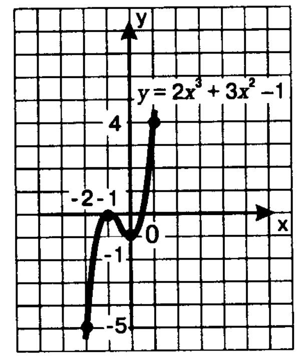


Рис. 133

Завершая рассуждения по исследованию функций на монотонность, обратим внимание на одно обстоятельство. Мы видели, что если на промежутке X выполняется неравенство $f'(x)>0$, то функция $y=f(x)$ возрастает на промежутке X; если же на промежутке X выполняется неравенство $f'(x)<0$, то функция убывает на этом промежутке. А что будет, если на всем промежутке выполняется тождество $f'(x)=0$? Видимо, функция не должна ни возрастать, ни убывать. Что же это за функция? Ответ очевиден — это постоянная функция $y=C$ (буква C — первая буква слова *constanta*, что означает «постоянная»). Справедлива следующая теорема, формальное доказательство которой мы не приводим, ограничиваясь приведенными выше правдоподобными рассуждениями.

Теорема 3. ***Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x)=0$, то функция $y=f(x)$ постоянна на промежутке X.***

В дальнейшем эта теорема будет нами востребована, т.е. в ее пользе для математики мы сумеем убедиться. А сейчас приведем (для наиболее любознательных) пример использования теоремы 3 (из разряда математических развлечений). Мы приведем новый способ доказательства хорошо вам известного тождества $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, где $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$. Найдем ее производную:

$$f'(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)'=(\sin x\sin x)'+(\cos x\cos x)'=$$
$$=(\cos x\sin x+\sin x\cos x)+(-\sin x\cos x+\cos x(-\sin x))=$$
$$=2\sin x\cos x-2\sin x\cos x=0.$$

Итак, для всех x выполняется равенство $f'(x)=0$, значит, $f(x)=C$. Чтобы найти значение C, достаточно вычислить значение функции в любой точке x, например, $x=0$. Имеем:

$$f(0)=\sin^2 0+\cos^2 0=0+1=1.$$

Таким образом, $C=1$, т.е. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

2. Точки экстремума функции и их отыскание

Вернемся к графику функции $y=2x^3+3x^2-1$ (рис. 133). На графике есть две уникальные точки, определяющие его структуру, — это точки $(-1; 0)$ и $(0; -1)$. В этих точках:

1) происходит изменение характера монотонности функции (слева от точки $x=-1$ функция возрастает, справа от нее, но только до точки $x=0$, функция убывает; слева от точки $x=0$ функция убывает, справа от нее возрастает);

2) касательная к графику функции параллельна оси x, т.е. производная функции в каждой из указанных точек равна нулю;

3) $f(-1)$ — наибольшее значение функции, но не во всей области определения, а в локальном смысле, т.е. по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x=-1$. Точно так же $f(0)$ — наименьшее значение функции, но не во всей области определения, а в локальном смысле, т.е. по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x=0$.

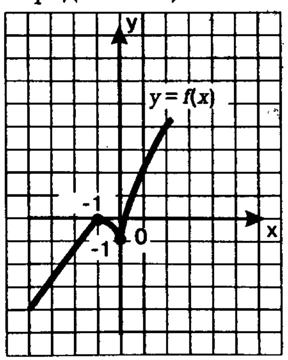


Рис. 134

А теперь взгляните на рис. 134, где изображен график другой функции. Не правда ли, он похож на предыдущий график? На нем те же две уникальные точки, но одна из указанных выше трех особенностей этих точек изменилась: теперь касательные к графику в этих точках не параллельны оси x. В точке $x=-1$ касательная вообще не существует, а в точке $x=0$ она перпендикулярна оси x (точнее, она совпадает с осью y).

Дальнейший ход рассуждений вам уже известен: если появляется новая математическая модель или новая особенность математической модели, ее надо специально изучить, т.е. ввести новый термин, новые обозначения, сформулировать новые свойства.

Определение 1. Точку $x=x_0$ называют **точкой минимума функции** $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x=x_0$) выполняется неравенство:

$$f(x)>f(x_0).$$

Так, функции, графики которых изображены на рис. 133 и 134, имеют точку минимума $x=0$. Почему? Потому что у этой точки существует окрестность, например, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ или $(-0{,}2, 0{,}2)$, для всех точек которой, кроме точки $x=0$, выполняется неравенство $f(x)>f(0)$. Это верно для обеих функций.

Значение функции в точке минимума обычно обозначают $y_{\min}$. Не путайте это значение (наименьшее, но в локальном смысле) с $y_{\text{наим.}}$, т.е. с наименьшим значением функции во всей рассматриваемой области определения (в глобальном смысле). Посмотрите еще раз на рис. 133 и 134. Вы видите, что наименьшего значения нет ни у той, ни у другой функции, а $y_{\min}$ существует.

Определение 2. Точку $x=x_0$ называют точкой **максимума функции** $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой, кроме самой точки $x=x_0$, выполняется неравенство:

$$f(x)<f(x_0).$$

Так, функции, графики которых изображены на рис. 133 и 134, имеют точку максимума $x=-1$. Почему? Потому что у этой точки существует окрестность, например, $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, для всех точек которой, кроме $x=-1$, выполняется неравенство $f(x)<f(-1)$. Это верно для обеих функций.

Значение функции в точке максимума обычно обозначают $y_{\max}$. Не путайте это значение (наибольшее, но в локальном смысле) с $y_{\text{наиб.}}$, т.е. с наибольшим значением функции во всей рассматриваемой области определения (в глобальном смысле). Посмотрите еще раз на рис. 133 и 134. Вы видите, что наибольшего значения нет ни у той, ни у другой функции, а $y_{\max}$ существует.

Точки минимума и максимума функции объединяют общим термином — **точки экстремума** (от латинского слова *extremum* — «крайний»).

Как искать точки экстремума функции? Ответ на этот вопрос мы сможем найти, еще раз проанализировав графические модели, представленные на рис. 133 и 134.

Обратите внимание: для функции, график которой изображен на рис. 133, в обеих точках экстремума производная обращается в нуль (касательные параллельны оси x). А для функции, график которой изображен на рис. 134, в обеих точках экстремума производная не существует. Это не случайно, поскольку, как доказано в курсе математического анализа, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. ***Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.***

Для удобства условимся внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называть *стационарными*, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная функции не существует, — *критическими*.

Пример 4. Построить график функции $y = 2x^2 - 6x + 3$.

Решение. Вам известно, что графиком заданной квадратичной функции является парабола, причем ветви параболы направлены вверх, поскольку коэффициент при x^2 положителен. Но в таком случае вершина параболы является точкой минимума функции, касательная к параболе в ее вершине параллельна оси x, значит, в вершине параболы должно выполняться условие $y' = 0$.

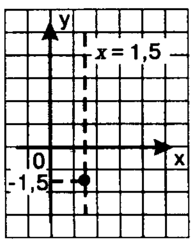


Рис. 135

Имеем: $y' = (2x^2 - 6x + 3)' = 4x - 6$.

Приравняв производную нулю, получим: $4x - 6 = 0$; $x = 1,5$.

Подставив найденное значение x в уравнение параболы, получим:

$$y = 2 \cdot 1,5^2 - 6 \cdot 1,5 + 3 = -1,5.$$

Итак, вершиной параболы служит точка $(1,5; -1,5)$, а осью параболы — прямая $x = 1,5$ (рис. 135). В качестве контрольных точек удобно взять точку (0; 3) и симметричную ей относительно оси параболы точку (3; 3). На рис. 136 по найденным трем точкам построена парабола — график заданной квадратичной функции. ◀■

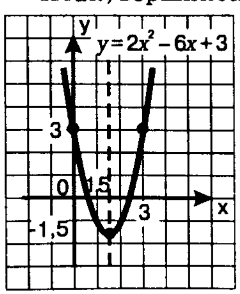


Рис. 136

Помните ли вы, как мы строили график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ в 8—9-м классах? Практически так же, лишь ось параболы находили не с помощью производной, а по формуле $x = -\frac{b}{2a}$, которую приходилось запоминать. Решение, показанное в примере 4, освобождает вас от необходимости помнить эту формулу. Чтобы найти абсциссу вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ или уравнение ее оси симметрии, достаточно приравнять нулю производную квадратичной функции.

А теперь вернемся к теореме 4, которая говорит, что если в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то $x = x_0$ — стационарная или критическая точка функции. Возникает естественный вопрос: верна ли обратная теорема, т.е. верно ли, что если $x = x_0$ — стационарная или критическая точка, то в этой точке функция имеет экстремум? Отвечаем: нет, неверно. Посмотрите на рис. 137, где изображен график возрастающей функции, не имеющей точек экстремума. У этой функции есть стационарная точка $x = x_1$, в которой производная обращается в нуль (в этой точке график функции имеет касательную, параллельную оси x), но это не точка экстремума, а *точка перегиба*, и есть критическая точка $x = x_2$, в которой производная не существует, но это также не точка экстремума, а *точка излома графика*. Поэтому скажем так: теорема 4 дает только *необходимое условие экстремума* (справедлива прямая теорема), но оно не является *достаточным условием* (обратная теорема не выполняется).

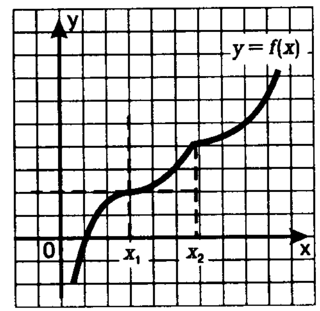


Рис. 137

А как же быть с достаточным условием? Как узнать, есть ли в стационарной или в критической точке экстремум? Для ответа на этот вопрос снова рассмотрим графики функций, представленные на рис. 133, 134, 136 и 137.

Замечаем, что при переходе через точку максимума (речь идет о точке $x = -1$ на рис. 133 и 134) изменяется характер монотонности функции: слева от точки максимума функция возрастает, справа убывает. Соответственно изменяются знаки производной: слева от точки максимума производная положительна, справа отрицательна.

Замечаем, что при переходе через точку минимума (речь идет о точке $x = 0$ на рис. 133 и 134 и о точке $x = 1,5$ на рис. 136) также изменяется характер монотонности функции: слева от точки минимума функция убывает, справа возрастает. Соответственно изменяются знаки производной: слева от точки минимума производная отрицательна, справа положительна.

Если же и слева, и справа от стационарной или критической точки производная имеет один и тот же знак, то в этой точке экстремума нет, именно так обстоит дело с функцией, график которой изображен на рис. 137.

Наши рассуждения могут служить подтверждением (но, конечно, не доказательством — строгие доказательства проводятся в курсе математического анализа) справедливости следующей теоремы.

Теорема 5 (достаточные условия экстремума). ***Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:***

а) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева, и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке $x = x_0$ экстремума нет.

Пример 5. а) Найти точки экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11;$$

б) построить график этой функции.

Решение. а) Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 48x$$

и далее

$$f'(x) = 12x(x^2 - 4x + 4);$$

$$f'(x) = 12x(x-2)^2.$$

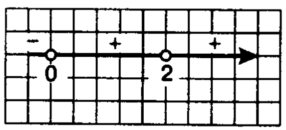


Рис. 138

Производная обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 2$ — это две стационарные точки заданной функции. На рис. 138 схематически указаны знаки производной по промежуткам области определения: на промежутке $(-\infty, 0)$ производная отрицательна, на промежутке $(0, 2)$ — положительна, на промежутке $(2, +\infty)$ — положительна. Значит, $x = 0$ — точка минимума функции, а $x = 2$ точкой экстремума не является. На первом из указанных выше промежутков функция убывает, на втором и третьем возрастает.

В точке минимума $x = 0$ имеем $f(0) = -11$ (подставили значение $x = 0$ в аналитическое задание функции), значит, $y_{min} = -11$.

б) Чтобы построить график функции, нужно знать особо важные точки графика. К таковым относятся:

— найденная точка минимума $(0; -11)$;

— стационарная точка $x = 2$; в этой точке $f(2) = 3 \cdot 2^4 - 16 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2^2 - 11 = 5$;

— точки пересечения с осями координат; в данном примере это уже найденная точка $(0; -11)$ — точка пересечения графика с осью y. И еще: можно догадаться, что $f(1) = 0$, значит, найдена точка пересечения графика с осью x — это точка $(1; 0)$.

Итак, мы имеем точку минимума $(0; -11)$, точку пересечения графика с осью x — точку $(1; 0)$ и стационарную точку $(2; 5)$. В этой точке касательная к графику функции горизонтальна, но это не точка экстремума, а точка перегиба.

График функции схематически изображен на рис. 139. Заметим, что есть еще одна точка пересечения графика с осью абсцисс, но найти ее нам не удалось. ◼

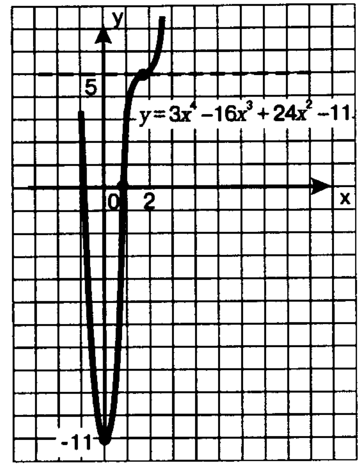


Рис. 139

Завершая этот пункт, заметим, что мы фактически выработали

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ НА МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ

1. *Найти производную $f'(x)$.*

2. *Найти стационарные и критические точки.*

3. *Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.*

4. *Опираясь на теоремы из § 35, сделать выводы* о *монотонности функции и* о *ее точках экстремума.*

Заметим, что если заданная функция имеет вид $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, то *полюсы функции*, т.е. точки, в которых знаменатель $q(x)$ обращается в нуль, тоже отмечают на числовой прямой, причем делают это до определения знаков производной. Но, разумеется, полюсы не могут быть точками экстремума.

Пример 6. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^4 + 16}{x^2}$ на монотонность и экстремумы.

Решение. Заметим, что функция всюду непрерывна, кроме точки $x = 0$. Воспользуемся указанным выше алгоритмом.

1) Найдем производную заданной функции:

$$f'(x)=\frac{(x^4+16)'\cdot x^2-(x^2)'(x^4+16)}{(x^2)^2}=\frac{4x^3\cdot x^2-2x(x^4+16)}{x^4}=\frac{2x^5-32x}{x^4}=$$
$$=\frac{2x(x^4-16)}{x^4}=\frac{2(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x^2}.$$

2) Производная обращается в нуль в точках $x=2$ и $x=-2$ — это стационарные точки. Производная не существует в точке $x=0$, но это не критическая точка, это точка разрыва функции (полюс).

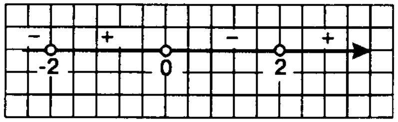


Рис. 140

3) Отметим точки −2, 0 и 2 на числовой прямой и расставим знаки производной на получившихся промежутках (рис. 140).

4) Делаем выводы: на луче $(-\infty, -2]$ функция убывает, на полуинтервале $[-2, 0)$ функция возрастает, на полуинтервале $(0, 2]$ функция убывает, на луче $[2, +\infty)$ функция возрастает.

Далее, $x=-2$ — точка минимума, причем $y_{\min}=8$ $\left(\text{подставили значение } x=-2 \text{ в формулу } y=\frac{x^4+16}{x^2}\right)$.

Аналогично устанавливаем, что и $x=2$ — точка минимума, причем $y_{\min}=8$. ◀

3. Построение графиков функций

За годы изучения курса алгебры в школе вы накопили достаточно большой опыт построения графиков функций. В основном вы строили графики «по точкам», т.е. для заданной функции $y=f(x)$ находили контрольные точки $(x_1;\ f(x_1))$, $(x_2;\ f(x_2))$, $(x_3;\ f(x_3))$, $(x_4;\ f(x_4))$ и т.д., отмечали их на координатной плоскости и, полагаясь на интуицию, соединяли найденные точки плавной кривой. Как выбирали эти контрольные точки? Иногда обдуманно, например, строили вершину параболы $y=ax^2+bx+c$ или специально искали точки пересечения графика с осями координат. Но чаще выбор контрольных точек был случайным, «по наитию».

Графики любых функций строят по точкам. Но в тех случаях, когда вид графика заранее неизвестен, эти точки надо выбирать со смыслом — уметь выделять особо важные точки графика, которые определяют его структуру. Об этом мы уже говорили выше, когда строили графики функций $y=2x^3+3x^2-1$ (см. рис. 133) и $y=3x^4-16x^3+24x^2-11$ (см. рис. 139). К особо важным точкам графика функции $y=f(x)$ относят:

— стационарные и критические точки;

— точки экстремума;

— точки пересечения графика с осями координат;

— точки разрыва функции.

В тех случаях, когда речь идет о построении графика незнакомой функции, когда заранее невозможно представить вид графика, полезно применять определенную схему исследования свойств функции, которая помогает составить представление о ее графике. Когда такое представление составится, можно приступить к построению графика по точкам.

В курсе математического анализа разработана универсальная схема исследования свойств функции и построения графика функции, позволяющая строить весьма сложные графики. Для наших нужд будут достаточны упрощенные варианты указанной схемы.

1) Если функция $y=f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, то достаточно найти стационарные и критические точки, точки экстремума, промежутки монотонности, точки пересечения графика с осями координат и при необходимости выбрать еще несколько контрольных точек. Именно так мы действовали в этом параграфе, когда строили графики следующих функций:

$$y=2x^2-6x+3 \quad \text{(рис. 136)};$$
$$y=2x^3+3x^2-1 \quad \text{(рис. 133)};$$
$$y=3x^4-16x^3+24x^2-11 \quad \text{(рис. 139)}.$$

2) Если функция $y=f(x)$ определена не на всей числовой прямой, то начинать следует с отыскания области определения функции (если, конечно, она не задана) и с указания ее точек разрыва.

3) Полезно исследовать функцию на четность, поскольку графики четной или нечетной функции обладают симметрией (соответственно относительно оси y или относительно начала координат), и, следовательно, можно сначала построить только ветвь графика при $x\geqslant 0$, а затем достроить симметричную ветвь.

4) Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, то, как известно (см. § 31), прямая $y=b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$. Асимптоту следует строить на координатной плоскости, она дает своеобразный ориентир для графика.

5) Горизонтальная асимптота характеризуется условием: если $x\to\infty$, то $y\to b$. При условии: если $x\to a$, то $y\to\infty$, — прямая $x=a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$. Например, для функции $y=\frac{1}{x-1}$ — ее график (гипербола) изображен на рис. 141 — вертикальной асимптотой является прямая $x=1$. Если $x\to 1$, то знаменатель данной дроби становится (по модулю)

все меньше и меньше, точнее: $(x-1) \to 0$; соответственно сама дробь становится (по модулю) все больше и больше, точнее: $\frac{1}{x-1} \to \infty$.

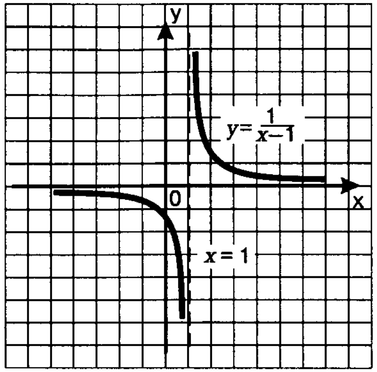


Рис. 141

Самый распространенный *признак существования вертикальной асимптоты* заключается в следующем:

если $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ *и при* $x=a$ *знаменатель обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, то* $x=a$ *— вертикальная асимптота графика функции* $y=f(x)$.

В следующих примерах учтем все вышеуказанные обстоятельства и построим графики функций, придерживаясь определенной схемы.

Пример 7. Построить график функции $y=\frac{x}{1+x^2}$.

Решение. 1. Найдем область определения функции: $D(f)=(-\infty,+\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность: $f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{1+x^2}=-f(x)$.

Значит, заданная функция нечетна, ее график симметричен относительно начала координат, а потому можно изначально ограничиться построением ветви графика при $x \geqslant 0$.

3. Найдем асимптоты. Вертикальной асимптоты нет. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{0}{0+1}=0.$$

Значит, $y=0$ — горизонтальная асимптота графика функции.

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции. Имеем:

$$y'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{(x)'(1+x^2)-x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения $y'=0$. Получаем $1-x^2=0$, откуда находим, что $x=1$ или $x=-1$. Поскольку мы договорились рассматривать лишь случай, когда $x \geqslant 0$, выберем значение $x=1$. При $x<1$ имеем $y'>0$, а при $x>1$ имеем $y'<0$. Значит, $x=1$ — точка максимума функции, причем $y_{\max}=f(1)=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}$.

На промежутке $[0,\ 1]$ функция возрастает, на промежутке $[1,\ +\infty)$ функция убывает.

5. Составим таблицу значений функции $y=\frac{x}{1+x^2}$ при $x \geqslant 0$:

x	0	1	2	3
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

6. Отметив найденные точки на координатной плоскости, соединив их плавной кривой и учтя при этом, что $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ точка максимума и что $y=0$ — горизонтальная асимптота, построим ветвь искомого графика при $x \geqslant 0$ (рис. 142). Добавив ветвь, симметричную построенной относительно начала координат, получим весь график (рис. 143). ◼

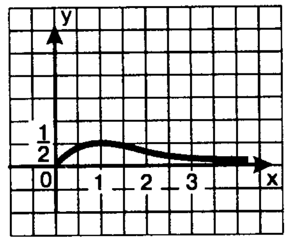


Рис. 142

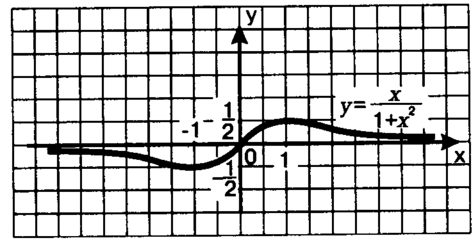


Рис. 143

Пример 8. Построить график функции $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Решение. 1. Найдем область определения функции. Она задается условиями: $x \neq 1, x \neq -1$ (при значениях $x=1$, $x=-1$ знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

$$D(f)=(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty).$$

2. Исследуем функцию на четность:

$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\frac{x^2+1}{x^2-1}=f(x)$. Значит, заданная функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при $x \geqslant 0$.

3. Найдем асимптоты. Вертикальной асимптотой является прямая $x=1$, поскольку при этом значении x знаменатель дроби обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

Значит, $y=1$ — горизонтальная асимптота графика функции.

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции. Имеем:

$$y'=\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=\frac{(x^2+1)'\cdot(x^2-1)-(x^2+1)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=$$
$$=\frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Производная существует всюду в области определения функции, значит, критических точек у функции нет.

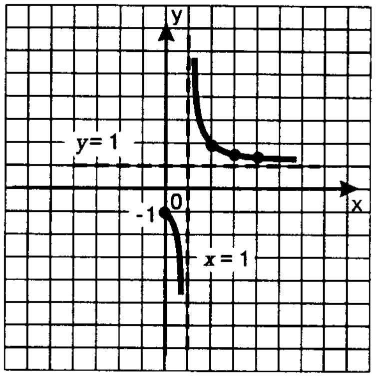


Рис. 144

Стационарные точки найдем из соотношения $y'=0$. Получаем $-4x=0$, откуда находим, что $x=0$. При $x<0$ имеем $y'>0$, а при $x>0$ имеем $y'<0$. Значит, $x=0$ — точка максимума функции, причем $y_{\max}=f(0)=\frac{0^2+1}{0^2-1}=-1.$

При $x>0$ имеем $y'<0$, но следует учесть наличие точки разрыва $x=1$. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутке $[0, 1)$ функция убывает, на промежутке $(1, +\infty)$ функция также убывает.

5. Составим таблицу значений функции $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ при $x\geqslant 0$:

x	0	$\frac{1}{2}$	2	3	4
y	-1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{15}$

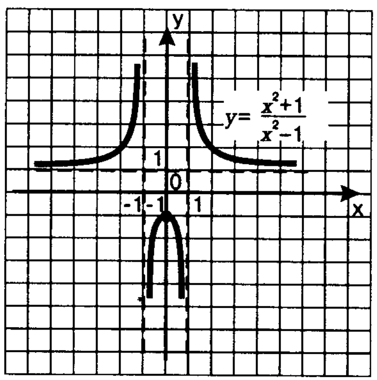


Рис. 145

6. Отметив найденные точки на координатной плоскости, соединив их плавными кривыми, учтя при этом, что $(0; -1)$ — точка максимума, что $y=1$ — горизонтальная асимптота, что $x=1$ — вертикальная асимптота, построим ветви искомого графика при $x\geqslant 0$ (рис. 144). Добавив ветви, симметричные построенным относительно оси ординат, получим весь график (рис. 145). ◁■

§ 36. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН

1. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке

Вы уже накопили некоторый опыт отыскания наибольшего и наименьшего значений функции. Чаще всего мы использовали для этого график функции. Пусть, например, дана функция $y=\frac{x}{1+x^2}$.

Построив ее график (см. рис. 143), легко сделать вывод о том, что $y_{\text{наим.}}=-\frac{1}{2}$, а $y_{\text{наиб.}}=\frac{1}{2}$.

В некоторых случаях мы могли найти наибольшее и наименьшее значения функции и без помощи графика. Например, для функции $y=\sqrt{9-x^2}$ можно рассуждать так: ясно, что $9-x^2\leqslant 9$, значит, $y_{\text{наиб.}}=3$ (это значение достигается функцией в точке $x=0$). С другой стороны, ясно, что $\sqrt{9-x^2}\geqslant 0$, значит, $y_{\text{наим.}}=0$ (это значение достигается функцией при $x=3$ или при $x=-3$).

В более сложных случаях для отыскания наибольшего и наименьшего значений используется производная.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ — несколько графиков таких функций представлено на рис. 146—148. Анализируя указанные геометрические модели, можно прийти к следующим выводам.

1. *Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значений.*

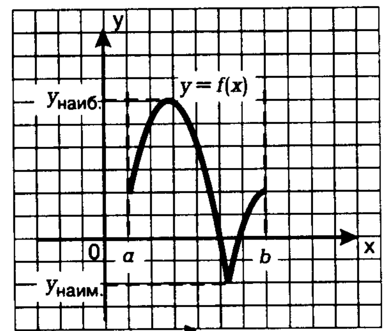


Рис. 146

Это — весьма солидная теорема курса математического анализа, доказательство ее требует достаточной продвинутости в изучении курса.

2. *Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.*

Здесь возможны варианты — некоторые из них представлены на рис. 146—148. Смотрите: на рис. 146 и наибольшее, и наименьшее значения достигаются внутри отрезка. На рис. 147 наименьшее

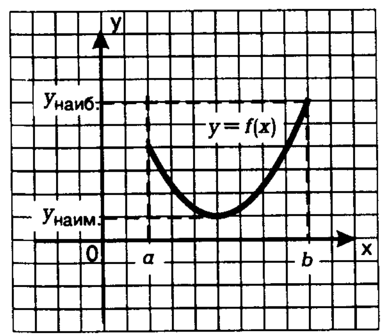


Рис. 147

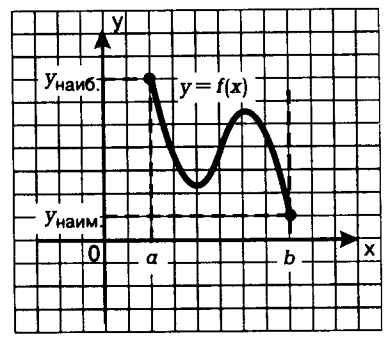


Рис. 148

значение достигается внутри отрезка, а наибольшее — в концевой точке. На рис. 148 и наибольшее, и наименьшее значения достигаются в концевых точках.

3. Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

В этом нет ничего удивительного, поскольку в этом случае наибольшее (или наименьшее) значение функции одновременно является экстремумом, а экстремум достигается только в стационарной или критической точке.

Подводя итог сказанному, нетрудно составить

АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ НАИМЕНЬШЕГО И НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ $y=f(x)$ НА ОТРЕЗКЕ $[a, b]$

1. *Найти производную* $f'(x)$.
2. *Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка* $[a, b]$.
3. *Вычислить значения функции* $y=f(x)$ *в точках, отобранных на втором шаге* (п. 2), *и в точках* a *и* b; *выбрать среди этих значений наименьшее* (это и будет $y_{\text{наим.}}$) *и наибольшее* (это и будет $y_{\text{наиб.}}$).

Алгоритм, как видите, сравнительно простой, для его иллюстрации достаточно одного примера. Мы приводим два примера, из которых второй — для тех, кому интересны математические «изюминки».

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^3-3x^2-45x+1$:

а) на отрезке $[-4, 6]$; б) на отрезке $[0, 6]$; в) на отрезке $[-2, 2]$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом.

1) Имеем $y'=3x^2-6x-45$.

2) Производная существует при всех x, значит, критических точек у функции нет, а стационарные найдем из условия $y'=0$. Имеем:

$$3x^2-6x-45=0;$$
$$x^2-2x-15=0;$$
$$x_1=-3,\ x_2=5.$$

Дальнейшие рассуждения зависят от условий задачи.

а) Обе стационарные точки (и $x=-3$, и $x=5$) принадлежат заданному отрезку $[-4, 6]$. Значит, на третьем шаге алгоритма мы составим такую таблицу значений функции $y=x^3-3x^2-45x+1$:

x	-4	-3	5	6
y	69	82	-174	-161

Таким образом, $y_{\text{наим.}}=-174$ (достигается в точке $x=5$);
$y_{\text{наиб.}}=82$ (достигается в точке $x=-3$).

б) Отрезку $[0, 6]$ принадлежит лишь одна из двух найденных стационарных точек, а именно точка $x=5$. Значит, на третьем шаге мы составим такую таблицу значений функции $y=x^3-3x^2-45x+1$:

x	0	5	6
y	1	-174	-161

Таким образом, $y_{\text{наим.}}=-174$ (достигается в точке $x=5$);
$y_{\text{наиб.}}=1$ (достигается в точке $x=0$).

в) Отрезку $[-2, 2]$ не принадлежит ни одна из найденных стационарных точек, значит, достаточно вычислить значения функции в концевых точках: $f(-2)=71$, $f(2)=-93$.

Таким образом, в этом случае $y_{\text{наим.}}=-93$, $y_{\text{наиб.}}=71$.

Пример 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=5x^3-x|x-1|$ на отрезке $[0, 2]$.

Решение. Если $x\geqslant 1$, то $|x-1|=x-1$, и функция принимает вид: $y=5x^3-x^2+x$; если $x<1$, то $|x-1|=1-x$, и функция принимает вид $y=5x^3+x^2-x$. Таким образом, речь идет о кусочной функции $y=f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}5x^3-x^2+x, & \text{где } x\geqslant 1;\\ 5x^3+x^2-x, & \text{где } x<1.\end{cases}$$

1) Вычисляя $f'(x)$, мы должны учесть, что при $x>1$ следует пользоваться формулой $f(x)=5x^3-x^2+x$. Получим: $f'(x)=15x^2-2x+1$.

При $x<1$ следует пользоваться формулой $f(x)=5x^3+x^2-x$. Получим $f'(x)=15x^2+2x-1$.

В «точке стыка» $x=1$ производная не существует, это — критическая точка функции.

Итак, $f'(x)=\begin{cases}15x^2-2x+1, \text{ если } x>1;\\ 15x^3+2x-1, \text{ если } x<1.\end{cases}$

2) Критическую точку мы уже нашли — это точка $x=1$. Найдем стационарные точки, решив уравнение $f'(x)=0$.

Если $x>1$, то $f'(x)=15x^2-2x+1$; уравнение $15x^2-2x+1=0$ не имеет корней.

Если $x<1$, то $f'(x)=15x^2+2x-1$; из уравнения $15x^2+2x-1=0$ находим: $x_1=\frac{1}{5}$, $x_2=-\frac{1}{3}$. Из этих двух значений заданному отрезку $[0, 2]$ принадлежит только точка $x=\frac{1}{5}$.

3) Составим таблицу значений функции $y=5x^3-x|x-1|$, включив в нее точки $x=0$, $x=2$, $x=1$, $x=\frac{1}{5}$ — концы заданного отрезка и лежащие внутри отрезка критическую и стационарную точки.

x	0	$\frac{1}{5}$	1	2
y	0	$-\frac{3}{25}$	5	38

Из имеющихся в таблице значений наименьшим является $-\frac{3}{25}$, наибольшим 38.

Ответ: $y_{\text{наим.}} = -\frac{3}{25}$; $y_{\text{наиб.}} = 38$.

А как быть, если речь идет об отыскании наибольшего или наименьшего значения функции, непрерывной на незамкнутом промежутке, например, на интервале? Можно построить график функции и снять информацию с полученной графической модели. Но чаще оказывается более удобным использовать следующую теорему.

Теорема. ***Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:***

а) если $x = x_0$ — точка максимума, то $y_{\text{наиб.}} = f(x_0)$;

б) если $x = x_0$ — точка минимума, то $y_{\text{наим.}} = f(x_0)$.

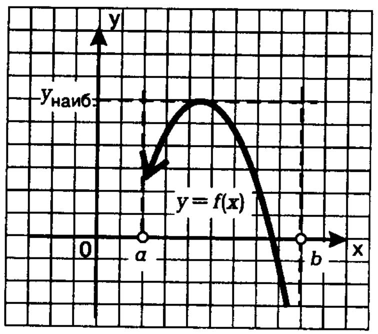


Рис. 149

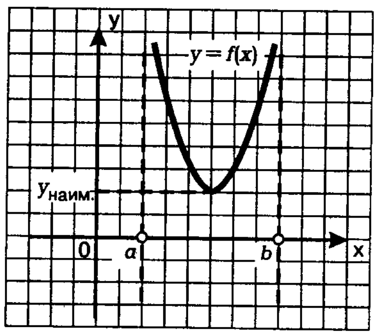


Рис. 150

На рис. 149 и 150 приведены соответствующие геометрические иллюстрации.

Пример 3. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ на луче $[0, +\infty)$.

Решение. $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ (см. пример 7 из § 35).

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем: $1 - x^2 = 0$, откуда находим, что $x = 1$ или $x = -1$. Заданному лучу $[0, +\infty)$ принадлежит лишь точка $x = 1$. При $x < 1$ имеем $y' > 0$, а при $x > 1$ имеем $y' < 0$. Значит, $x = 1$ — точка максимума функции, причем $y_{\max} = f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$.

Поскольку $x = 1$ — единственная точка экстремума функции на заданном промежутке, причем точка максимума, то, по теореме 1,

$$y_{\text{наиб.}} = y_{\max} = f(1) = \frac{1}{2}.$$

Ранее (см. рис. 143) был построен график функции на заданном луче — он хорошо иллюстрирует полученный результат.

Ответ: $y_{\text{наиб.}} = \frac{1}{2}$.

2. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин

Российский математик XIX в. П.Л. Чебышев говорил, что «особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды». С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям самых разных специальностей: инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции; конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей; экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными, и т.д.

Задачи подобного рода носят общее название — *задачи на оптимизацию* (от латинского слова *optimum* — «наилучший»). В самых простых задачах на оптимизацию мы имеем дело с двумя величинами, одна из которых зависит от другой, причем надо найти такое значение второй величины, при котором первая принимает свое наименьшее или наибольшее (наилучшее в данных условиях) значение.

Задачи на оптимизацию решают по обычной схеме из трех этапов математического моделирования: 1) составление математической модели; 2) работа с моделью; 3) ответ на вопрос задачи. Прежде чем переходить к конкретным примерам решения задач на оптимизацию, предлагаем некоторые рекомендации методического плана.

Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Проанализировав условия задачи, выделите *оптимизируемую величину* (сокращенно: О.В.), т.е. величину, о наибольшем

или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее буквой y (или S, V, R, t — в зависимости от фабулы).

2) Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить О.В., примите за *независимую переменную* (сокращенно: Н.П.) и обозначьте ее буквой x (или какой-либо иной буквой). Установите *реальные границы* изменения Н.П. (в соответствии с условиями задачи).

3) Исходя из условий задачи, выразите y через x. Математическая модель задачи представляет собой функцию $y = f(x)$ с областью определения X, которую нашли на втором шаге.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $y = f(x)$, $x \in X$ найдите $y_{\text{наим.}}$ или $y_{\text{наиб.}}$ в зависимости от того, что требуется в условии задачи. При этом используются теоретические установки, которые мы получили в п. 1 данного параграфа.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Здесь следует получить конкретный ответ на вопрос задачи, опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

Пример 4. Прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна произведению ее ширины на квадрат высоты. Какое сечение должна иметь балка, вытесанная из цилиндрического бревна радиуса R, чтобы ее прочность была наибольшей?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

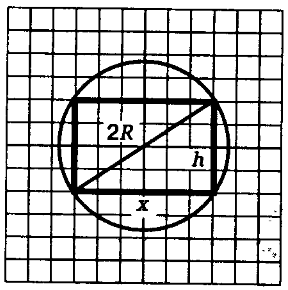


Рис. 151

1) Оптимизируемая величина (О.В.) — прочность балки, поскольку в задаче требуется выяснить, когда прочность балки будет наибольшей. Обозначим О.В. буквой y.

2) Прочность зависит от ширины и высоты прямоугольника, служащего осевым сечением балки. Объявим независимой переменной (Н.П.) ширину балки, обозначим ее буквой x. Поскольку осевое сечение представляет собой прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R (рис. 151), то $0 \leqslant x \leqslant 2R$ (при $x = 0$ и при $x = 2R$ прямоугольник «вырождается» в отрезок, равный диаметру окружности) — таковы реальные границы изменения независимой переменной.

3) Высота h прямоугольника связана с его шириной соотношением $x^2 + h^2 = 4R^2$ (по теореме Пифагора). Значит, $h^2 = 4R^2 - x^2$.

А прочность балки y пропорциональна произведению xh^2, т.е. $y = kxh^2$ (где коэффициент k — некоторое положительное число). Значит, $y = kx(4R^2 - x^2)$, где $x \in [0, 2R]$.

Математическая модель задачи составлена.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $y = kx(4R^2 - x^2)$, $x \in [0, 2R]$ надо найти $y_{\text{наиб.}}$. Воспользуемся алгоритмом из п.1.

Имеем:

$$y = 4kR^2x - kx^3;$$

$$y' = 4kR^2 - 3kx^2.$$

Приравняв производную нулю, получим:

$$4kR^2 - 3kx^2 = 0;$$

$$x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Заданному отрезку $[0, 2R]$ принадлежит лишь точка $x = x_1$.

Осталось вычислить значения функции $y = kR^2x - kx^3$ в точке x_1 и на концах отрезка, т.е. в точках 0 и $2R$.

Имеем: $f(0) = 0$, $f(2R) = 0$, $f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) > 0$. Значит, $y_{\text{наиб.}} = f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, какое сечение должна иметь балка наибольшей прочности. Мы выяснили, что ширина x прямоугольника, служащего осевым сечением наиболее прочной балки, равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Найдем высоту:

$$h^2 = 4R^2 - x^2, \text{ т.е. } h^2 = 4R^2 - \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2}{3}.$$

Значит, $h = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, а потому $\frac{h}{x} = \sqrt{2}$.

Ответ: Сечением балки должен служить прямоугольник, у которого отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$.

Замечание. Квалифицированные мастера приходят к такому же результату, опираясь на свой опыт, но, разумеется, они принимают указанное отношение равным 1,4 (приближенное значение иррационального числа $\sqrt{2}$ как раз равно 1,4).

Пример 5. Бак, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать V литров жидкости. При какой стороне основания площадь поверхности бака (без крышки) будет наименьшей?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина (О.В.) — площадь поверхности бака, поскольку в задаче требуется выяснить, когда эта площадь будет наименьшей. Обозначим О.В. буквой S.

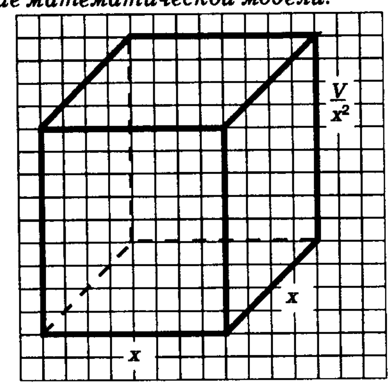


Рис. 152

2) Площадь поверхности зависит от измерений прямоугольного параллелепипеда. Объявим независимой переменной (Н.П.) сторону квадрата, служащего основанием бака; обозначим ее буквой x. Ясно, что $x > 0$. Других ограничений нет, значит, $0 < x < +\infty$. Таковы реальные границы изменения независимой переменной.

3) Если h — высота бака, то $V = x^2h$, откуда находим $h = \frac{V}{x^2}$.

На рис. 152 изображен прямоугольный параллелепипед, указаны его измерения. Поверхность бака состоит из квадрата со стороной x и четырех прямоугольников со сторонами x и $\frac{V}{x^2}$. Значит,

$$S = x^2 + 4 \cdot \frac{V}{x^2} \cdot x = x^2 + \frac{4V}{x}.$$

Итак, $S = x^2 + 4 \cdot \frac{V}{x}$, где $x \in (0, +\infty)$.

Математическая модель задачи составлена.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $S = x^2 + 4 \cdot \frac{V}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ надо найти $y_{\text{наим.}}$. Для этого нужна производная функции.

Имеем:

$$S' = 2x - 4 \cdot \frac{V}{x^2},$$

$$S' = \frac{2(x^3 - 2V)}{x^2}.$$

На промежутке $(0, +\infty)$ критических точек нет, а стационарная точка только одна: $S' = 0$ при $x = \sqrt[3]{2V}$.

Заметим, что при $x < \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство $S' < 0$, а при $x > \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство $S' > 0$. Значит, $x = \sqrt[3]{2V}$ — единственная точка экстремума функции на заданном промежутке, а потому согласно теореме из п. 1, в этой точке функция достигает своего наименьшего значения.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, какой должна быть сторона основания, чтобы бак имел наименьшую поверхность. Мы выяснили, что сторона квадрата, служащего основанием такого бака, равна $\sqrt[3]{2V}$.

Ответ: $\sqrt[3]{2V}$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой главе вы познакомились с новыми *терминами* математического языка:

числовая последовательность;

монотонная (возрастающая или убывающая) последовательность;

ограниченная (сверху, снизу) последовательность;

предел последовательности;

сходящаяся последовательность, расходящаяся последовательность;

окрестность точки, радиус окрестности;

сумма бесконечной геометрической прогрессии;

предел функции на бесконечности;

предел функции в точке;

приращение аргумента, приращение функции;

производная;

дифференцируемая функция;

касательная к графику функции;

точка экстремума (максимума, минимума) функции;

стационарная точка, критическая точка функции.

Вы познакомились с новыми *обозначениями* — новыми символами математического языка:

$\lim\limits_{n \to \infty} y_n$ — предел последовательности;

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ — предел функции на бесконечности (при $x \to \infty$);

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ — предел функции в точке (при $x \to a$);

Δx — приращение аргумента;

Δy — приращение функции;

$f'(x)$ — производная.

Мы вывели *формулы и правила:*

для вычисления пределов последовательностей и функций;

для отыскания производных.

Мы сформулировали *алгоритмы:*

отыскания производной;

составления уравнения касательной к графику функции;

исследования функций на монотонность и экстремумы;

отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке.

Глава

5 ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 37. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Первообразная

В предыдущих параграфах мы по заданной функции, руководствуясь различными формулами и правилами, находили ее производную. Мы убедились в том, что производная имеет многочисленные применения: производная — это скорость движения (или, обобщая, скорость протекания любого процесса); производная — это угловой коэффициент касательной к графику функции; с помощью производной можно исследовать функцию на монотонность и экстремумы; производная помогает решать задачи на оптимизацию.

Но в реальной жизни приходится решать и обратные задачи: например, наряду с задачей об отыскании скорости по известному закону движения встречается и задача о восстановлении закона движения по известной скорости. Рассмотрим одну из таких задач.

Пример 1. По прямой движется материальная точка, скорость ее движения в момент времени t задается формулой $v = gt$. Найти закон движения.

Решение. Пусть $s = s(t)$ — искомый закон движения. Известно, что $s'(t) = v(t)$. Значит, для решения задачи нужно подобрать функцию $s = s(t)$, производная которой равна gt. Нетрудно догадаться, что $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. В самом деле, $s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}(t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt$.

Ответ: $s = \frac{gt^2}{2}$.

Сразу заметим, что пример решен верно, но неполно. Мы получили, что $s = \frac{gt^2}{2}$. На самом деле, задача имеет бесконечно много решений: любая функция вида $s = \frac{gt^2}{2} + C$, где C — произвольная константа, может служить законом движения, поскольку

$$\left(\frac{gt^2}{2} + C\right)' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' + C' = gt + 0 = gt.$$

Чтобы задача стала более определенной, нам надо было зафиксировать исходную ситуацию: указать координату движущейся точки в какой-либо момент времени, например, при $t = 0$. Если, скажем, $s(0) = s_0$, то из равенства $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C$ получаем $s(0) = 0 + C$, т.е. $s_0 = C$. Теперь закон движения определен однозначно: $s = \frac{gt^2}{2} + s_0$.

В математике взаимно обратным операциям присваивают разные названия, придумывают специальные обозначения: например, возведение в квадрат (x^2) и извлечение квадратного корня ($\sqrt{x}$); синус ($\sin x$) и арксинус ($\arcsin x$) и т.д. Процесс отыскания производной по заданной функции называют *дифференцированием*, а обратную операцию, т.е. процесс отыскания функции по заданной производной — *интегрированием*.

Сам термин «производная» можно обосновать «по-житейски»: функция $y = f(x)$ «производит на свет» новую функцию $y' = f'(x)$. Функция $y = f(x)$ выступает как бы в качестве «родителя», но математики, естественно, не называют ее «родителем» или «производителем», они говорят, что это, по отношению к функции $y' = f'(x)$, *первичный образ*, или, короче, *первообразная*.

Определение 1. Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной для функции $y = f(x)$** *на заданном промежутке* X, если для всех x из X выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

На практике промежуток X обычно не указывают, но подразумевают (в качестве естественной области определения функции).

Приведем примеры:

1) Функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^2)' = 2x$.

2) Функция $y = x^3$ является первообразной для функции $y = 3x^2$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^3)' = 3x^2$.

3) Функция $y = \sin x$ является первообразной для функции $y = \cos x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(\sin x)' = \cos x$.

4) Функция $y = \sqrt{x}$ является первообразной для функции $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $(0, +\infty)$, поскольку для всех $x > 0$ справедливо равенство $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Вообще, зная формулы для отыскания производных, нетрудно составить таблицу формул для отыскания первообразных.

Функция $y=f(x)$	Первообразная $y=F(x)$
0	C
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
$x^n\ (n\in N)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$ (при $x>0$)
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$

Надеемся, вы поняли, как составлена эта таблица: производная функции, которая записана во втором столбце, равна той функции, которая записана в соответствующей строке первого столбца (проверьте, не поленитесь, это очень полезно). Например, для функции $y=x^5$ первообразной, как вы установите, служит функция $y=\frac{x^6}{6}$ (см. четвертую строку таблицы).

Замечания: 1. Ниже мы докажем теорему о том, что если $y=F(x)$ — первообразная для функции $y=f(x)$, то у функции $y=f(x)$ бесконечно много первообразных и все они имеют вид $y=F(x)+C$. Поэтому правильней было бы во втором столбце таблицы всюду добавить слагаемое C, где C — произвольное действительное число.

2. Ради краткости иногда вместо фразы «функция $y=F(x)$ является первообразной для функции $y=f(x)$», говорят «$F(x)$ — первообразная для $f(x)$».

2. Правила отыскания первообразных

При отыскании первообразных, как и при отыскании производных, используются не только формулы (они указаны в таблице на с. 196), но и некоторые правила. Они непосредственно связаны с соответствующими правилами вычисления производных.

Мы знаем, что производная суммы равна сумме производных. Это правило порождает соответствующее правило отыскания первообразных.

Правило 1. *Первообразная суммы равна сумме первообразных.*

Обращаем ваше внимание на некоторую «легковесность» этой формулировки. На самом деле следовало бы сформулировать теорему: *если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют на промежутке X первообразные, соответственно $y=F(x)$ и $y=G(x)$, то и сумма функций $y=f(x)+g(x)$ имеет на промежутке X первообразную, причем этой первообразной является функция $y=F(x)+G(x)$.* Но обычно, формулируя правила (а не теоремы), оставляют только ключевые слова — так удобнее для применения правила на практике.

Пример 2. Найти первообразную для функции $y=2x+\cos x$.

Решение. Первообразной для $2x$ служит x^2; первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$. Значит, первообразной для функции $y=2x+\cos x$ будет служить функция $y=x^2+\sin x$ (и вообще любая функция вида $y=x^2+\sin x+C$). ◀

Мы знаем, что постоянный множитель можно вынести за знак производной. Это правило порождает соответствующее правило отыскания первообразных.

Правило 2. *Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.*

Пример 3. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y=5\sin x$; б) $y=-\frac{\cos x}{3}$; в) $y=12x^3+8x-1$.

Решение. а) Первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$; значит, для функции $y=5\sin x$ первообразной будет функция $y=-5\cos x$.

б) Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$; значит, для функции $y=-\frac{1}{3}\cos x$ первообразной будет функция $y=-\frac{1}{3}\sin x$.

в) Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$; первообразной для x служит $\frac{x^2}{2}$; первообразной для функции $y=1$ служит функция $y=x$. Используя первое и второе правила отыскания первообразных, получим, что первообразной для функции $y=12x^3+8x-1$ служит функция $y=12\cdot\frac{x^4}{4}+8\cdot\frac{x^2}{2}-x$, т.е. $y=3x^4+4x^2-x$. ◀

Замечание. Как известно, производная произведения не равна произведению производных (правило дифференцирования произведения более сложное) и производная частного не равна частному от производных. Поэтому нет и правил для отыскания первообразной от произведения или первообразной от частного двух функций. Будьте внимательны!

Получим еще одно правило отыскания первообразных. Мы знаем, что производная функции $y=f(kx+m)$ вычисляется по формуле

$$(f(kx+m))'=kf'(kx+m).$$

Это правило порождает соответствующее правило отыскания первообразных.

Правило 3. *Если $y=F(x)$ — первообразная для функции $y=f(x)$, то первообразной для функции $y=f(kx+m)$ служит функция $y=\frac{1}{k}F(kx+m)$.*

В самом деле,

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+m)\right)'=\frac{kF'(kx+m)}{k}=f(kx+m).$$

Это и означает, что $y=\frac{1}{k}F(kx+m)$ является первообразной для функции $y=f(kx+m)$. ●

Смысл третьего правила заключается в следующем. Если вы знаете, что первообразной для функции $y=f(x)$ является функция $y=F(x)$, а вам нужно найти первообразную функции $y=f(kx+m)$, то действуйте так: берите ту же самую функцию F, но вместо аргумента x подставьте выражение $kx+m$; кроме того, не забудьте перед знаком функции записать «поправочный множитель» $\frac{1}{k}$.

Пример 4. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y=\sin 2x$; б) $y=\cos\frac{x}{3}$; в) $y=(4-5x)^7$.

Решение. а) Первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$; значит, для функции $y=\sin 2x$ первообразной будет функция $y=\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x)$, т.е. функция $y=-\frac{\cos 2x}{2}$.

б) Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$; значит, для функции $y=\cos\frac{x}{3}$ первообразной будет функция $y=3\sin\frac{x}{3}$; здесь $k=\frac{1}{3}$, значит, $\frac{1}{k}=3$.

в) Первообразной для x^7 служит $\frac{x^8}{8}$; значит, для функции $y=(4-5x)^7$ первообразной будет функция $y=-\frac{1}{5}\cdot\frac{(4-5x)^8}{8}$, т.е. функция $y=-\frac{1}{40}\cdot(4-5x)^8$. ◀

3. Неопределенный интеграл

Выше мы уже отмечали, что задача отыскания первообразной для заданной функции $y=f(x)$ имеет не одно решение. Обсудим этот вопрос более детально.

Теорема. ***Если $y=F(x)$ — первообразная для функции $y=f(x)$ на промежутке X, то у функции $y=f(x)$ бесконечно много первообразных и все они имеют вид $y=F(x)+C$.***

Доказательство. 1. Пусть $y=F(x)$ — первообразная для функции $y=f(x)$ на промежутке X. Это значит, что для всех x из X выполняется равенство $F'(x)=f(x)$. Найдем производную любой функции вида $y=F(x)+C$:

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x).$$

Итак, $(F(x)+C)'=f(x)$. Это значит, что $y=F(x)+C$ является первообразной для функции $y=f(x)$.

Таким образом, мы доказали, что если у функции $y=f(x)$ есть первообразная $y=F(x)$, то у функции $y=f(x)$ бесконечно много первообразных, например, любая функция вида $y=F(x)+C$ является первообразной.

2. Докажем теперь, что указанным видом функций исчерпывается все множество первообразных.

Пусть $y=F_1(x)$ и $y=F(x)$ — две первообразные для функции $y=f(x)$ на промежутке X. Это значит, что для всех x из промежутка X выполняются соотношения: $F_1'(x)=f(x)$; $F'(x)=f(x)$.

Рассмотрим функцию $y=F_1(x)-F(x)$ и найдем ее производную:

$$(F_1(x)-F(x))'=F_1'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Известно, что если производная функции на промежутке X тождественно равна нулю, то функция постоянна на промежутке X (см. теорему 3 из § 35). Значит, $F_1(x)-F(x)=C$, т.е. $F_1(x)=F(x)+C$.

Теорема доказана. ●

Пример 5. Задан закон изменения скорости от времени $v=-5\sin 2t$. Найти закон движения $s=s(t)$, если известно, что в момент времени $t=0$ координата точки равнялась числу 1,5 (т.е. $s(0)=1{,}5$).

Решение. Так как скорость — производная координаты как функции от времени, то нам прежде всего нужно найти первообразную от скорости, т.е. первообразную для функции $v=-5\sin 2t$. Одной из таких первообразных является функция $s=-5\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2t)$, т.е. $s=2{,}5\cos 2t$, а множество всех первообразных имеет вид:

$$s=2{,}5\cos 2t+C. \qquad (1)$$

Чтобы найти конкретное значение постоянной C, воспользуемся начальными условиями, согласно которым, $s(0)=1{,}5$. Подставив в формулу (1) значения $t=0$, $s=1{,}5$, получим:

$$1{,}5=2{,}5\cdot\cos 0+C,$$
$$1{,}5=2{,}5+C,$$
$$C=-1.$$

Подставив найденное значение C в формулу (1), получим интересующий нас закон движения:

$$s=2{,}5\cos 2t-1.$$

Определение 2. Если функция $y=f(x)$ имеет на промежутке X первообразную $y=F(x)$, то множество всех первообразных, т.е. множество функций вида $y=F(x)+C$, называют **неопределенным интегралом от функции $y=f(x)$** и обозначают:

$$\int f(x)dx$$

(читают: «неопределенный интеграл эф от икс дэ икс»).

В следующем параграфе мы выясним, в чем состоит скрытый смысл указанного обозначения.

Опираясь на имеющуюся в этом параграфе таблицу первообразных, составим таблицу основных неопределенных интегралов:

$\int dx=x+C.$
$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, (n\in N).$
$\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C.$
$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C.$
$\int\sin x\,dx=-\cos x+C.$
$\int\cos x\,dx=\sin x+C.$
$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}\,x+C.$
$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x+C.$

Опираясь на приведенные выше три правила отыскания первообразных, мы можем сформулировать соответствующие правила интегрирования.

Правило 1. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций:*

$$\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$$

Правило 2. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx.$$

Правило 3. *Если* $\int f(x)dx=F(x)+C$, *то*

$$\int f(kx+m)dx=\frac{F(kx+m)}{k}+C.$$

Пример 6. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)}$; в) $\int\sin^2 x\,dx$.

Решение. а) Воспользовавшись первым и вторым правилами интегрирования, получим: $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}\right)dx=3\int\frac{dx}{\sqrt{x}}-5\int\frac{dx}{x^2}$.

Теперь воспользуемся 3-й и 4-й формулами интегрирования:

$$3\int\frac{dx}{\sqrt{x}}-5\int\frac{dx}{x^2}=3\cdot 2\sqrt{x}-5\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)+C.$$

В итоге получаем:

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}\right)dx=6\sqrt{x}+\frac{5}{x}+C.$$

б) Воспользовавшись третьим правилом интегрирования и формулой 8, получим:

$$\int\frac{dx}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\mathrm{tg}\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+C.$$

в) Для непосредственного нахождения заданного интеграла у нас нет ни соответствующей формулы, ни соответствующего правила. В подобных случаях иногда помогают предварительно выполненные тождественные преобразования выражения, содержащегося под знаком интеграла.

Воспользуемся тригонометрической формулой понижения степени: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$.

Тогда последовательно находим:

$$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\cdot\int dx-\frac{1}{2}\cdot\int\cos 2x\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

§ 38. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Задача 1 (*о вычислении площади криволинейной трапеции*).

В декартовой прямоугольной системе координат $x0y$ дана фигура (рис. 153), ограниченная осью x, прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции $y=f(x)$; назовем эту фигуру *криволинейной трапецией*. Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции.

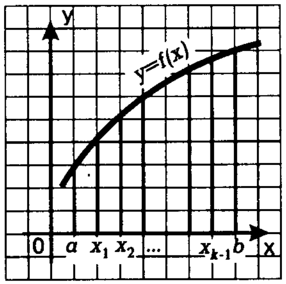


Рис. 153

Решение. Геометрия дает нам рецепты для вычисления площадей многоугольников и некоторых частей круга (сектор, сегмент). Используя геометрические соображения, мы сумеем найти лишь приближенное значение искомой площади, рассуждая следующим образом.

Разобьем отрезок $[a, b]$ (основание криволинейной трапеции) на n равных частей; это разбиение осуществим с помощью точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots x_{n-1}$. Проведем соответствующие ординаты. Тогда заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей — на n узеньких столбиков. Площадь всей трапеции равна сумме площадей столбиков.

Рассмотрим отдельно k-тый столбик, т.е. криволинейную трапецию, основанием которой служит отрезок $[x_k, x_{k+1}]$. Заменим его прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной $f(x_k)$ (рис. 154). Площадь прямоугольника равна $f(x_k)\cdot\Delta x_k$, где Δx_k — длина отрезка $[x_k, x_{k+1}]$; естественно считать составленное произведение приближенным значением площади k-го столбика.

Если теперь сделать то же самое со всеми остальными столбиками, то придем к следующему результату: площадь S заданной криволинейной трапеции приближенно равна площади S_n ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников (рис. 155). Имеем:

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

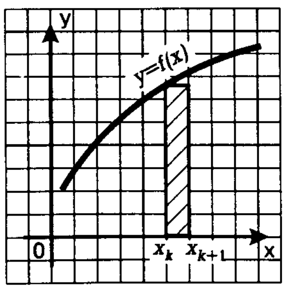


Рис. 154

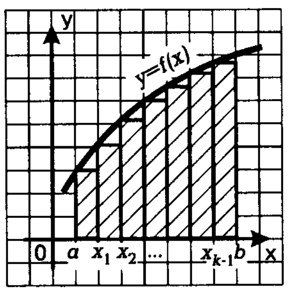


Рис. 155

Здесь ради единообразия обозначений мы считаем, что $a=x_0$, $b=x_n$; Δx_0 — длина отрезка $[x_0, x_1]$, Δx_1 — длина отрезка $[x_1, x_2]$ и т.д.

Итак, $S \approx S_n$, причем это приближенное равенство тем точнее, чем больше n.

Принято считать, что *искомая площадь есть предел последовательности* (S_n):

$$\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n.}$$

Задача 2 (*о вычислении массы стержня*).

Дан прямолинейный неоднородный стержень (рис. 156), плотность в точке x вычисляется по формуле $p=p(x)$. Найти массу стержня.

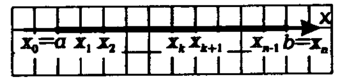


Рис. 156

Решение. Масса тела, как известно из курса физики, равна произведению плотности на объем (вместо объема берут площадь — если речь идет о плоской пластине; вместо объема берут длину — если речь идет о прямолинейном стержне без учета его толщины). Но этот закон действует только для однородных тел, т.е. в тех случаях, когда плотность постоянна. Для неоднородного стержня используется тот же метод, что был применен при решении задачи 1.

1) Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей.

2) Рассмотрим k-тый участок $[x_k, x_{k+1}]$ и будем считать, что плотность во всех точках этого участка постоянна, а именно такая, как, например, в точке x_k. Итак, мы считаем, что $p=p(x_k)$.

3) Найдем приближенное значение массы m_k k-го участка:

$$m_k \approx p(x_k)\Delta x_k,$$

где Δx_k, как и в предыдущей задаче, — длина отрезка $[x_k, x_{k+1}]$.

4) Найдем приближенное значение массы m стержня:

$$m \approx S_n,$$

где $S_n = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_k + \ldots + m_{n-1} =$

$$= p(x_0)\Delta x_0 + p(x_1)\Delta x_1 + p(x_2)\Delta x_2 + \ldots + p(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

5) Точное значение массы стержня вычисляется по формуле

$$\boxed{m = \lim_{n\to\infty} S_n.}$$

Задача 3 (*о перемещении точки*).

По прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $v = v(t)$; пусть для определенности $v(t) > 0$. Найти перемещение точки за промежуток времени $[a, b]$.

Решение. Если бы движение было равномерным, то задача решалась бы очень просто: $s = vt$, т.е. $s = v\,(b - a)$. Для неравномерного движения приходится использовать те же идеи, на которых было основано решение двух предыдущих задач.

1) Разделим промежуток времени $[a, b]$ на n равных частей.

2) Рассмотрим промежуток времени $[t_k, t_{k+1}]$ и будем считать, что в этот промежуток времени скорость была постоянной, такой, как в момент времени t_k. Итак, мы считаем, что $v = v\,(t_k)$.

3) Найдем приближенное значение перемещения точки s_k за промежуток времени $[t_k, t_{k+1}]$:

$$s_k \approx v(t_k)\Delta t_k.$$

4) Найдем приближенное значение перемещения s:

$$s \approx S_n,$$

где $S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_k + \ldots + s_{n-1} =$

$= v(t_0)\Delta t_0 + v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1}$.

5) Точное значение перемещения вычисляется по формуле

$$\boxed{s = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Подведем итоги. Три различные задачи привели при их решении к одной и той же математической модели. Многие задачи из различных областей науки и техники приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, данную математическую модель надо специально изучить, т.е.:

а) присвоить ей новый термин,

б) ввести для нее обозначение,

в) научиться с ней работать.

Этим и займемся.

2. Понятие определенного интеграла

Дадим математическое описание той модели, которая была построена в трех рассмотренных задачах для функции $y = f(x)$, непрерывной (но необязательно неотрицательной, как это предполагалось в рассмотренных задачах) на отрезке $[a, b]$:

1) разбивают отрезок $[a, b]$ на n равных частей;

2) составляют сумму:

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1};$$

3) вычисляют $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

В курсе математического анализа доказано, что при указанных условиях этот предел существует. Его называют **определенным интегралом от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a, b]$** и обозначают так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

(читают: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс»). Числа a и b называют **пределами интегрирования** (соответственно *нижним* и *верхним*).

Замечание. Приведем правдоподобную версию происхождения указанного обозначения и термина: $\int$ — стилизованная буква S (*summa*); $f(x)dx$ — напоминание о слагаемых вида $f(x_k)\Delta x_k$, из которых состоит сумма S_n. Само слово *интеграл* происходит от латинского слова *integer* — «целый». Употребление этого термина вполне оправданно: вспомните, какой смысл вкладывается в русском языке в слово *интеграция* — восстановление, восполнение, воссоединение; подробнее — это процесс, ведущий к состоянию связанности отдельных частей в целое. В построенной математической модели речь фактически идет о воссоединении целого по отдельным частям (например, о нахождении всей площади — по площадям столбиков, как было в задаче 1).

Вернемся к трем рассмотренным выше задачам. Результат, полученный в задаче 1, теперь можно переписать следующим образом:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx;}$$

здесь S — площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 153. В этом состоит *геометрический смысл определенного интеграла*.

Из решения задачи 2 следует, что масса m неоднородного стержня с плотностью $p(x)$ вычисляется по формуле

$$m = \int_a^b p(x)\,dx.$$

В этом состоит *физический смысл определенного интеграла*.

Из решения задачи 3 следует, что перемещение s точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t)\,dt.$$

Это — еще одно физическое истолкование определенного интеграла.

3. Формула Ньютона—Лейбница

После внимательного изучения предыдущего параграфа у вас, наверное, возник вопрос: почему в названии построенной математической модели содержится слово «интеграл», ведь в § 37 это слово ассоциировалось у нас с термином «первообразная». Есть ли какая-либо связь между определенным интегралом и первообразной?

Ключ к разгадке дает задача 3. С одной стороны, перемещение s точки, движущейся по прямой со скоростью $v=v(t)$, за промежуток времени от $t=a$ до $t=b$ вычисляется по формуле

$$s=\int_a^b v(t)\,dt.$$

С другой стороны, координата движущейся точки есть первообразная для скорости — обозначим ее $s(t)$; значит, перемещение s выражается формулой $s=s(b)-s(a)$. В итоге получаем:

$$\int_a^b v(t)\,dt=s(b)-s(a),$$

где $s(t)$ — первообразная для $v(t)$.

Вернемся к задаче 1 — о вычислении площади криволинейной трапеции (см. рис. 153). Мы установили, что

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Сейчас мы покажем другое решение этой задачи, которое приведет нас к формуле

$$S=F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Будем считать для упрощения, что $y=f(x)$ — возрастающая функция на отрезке $[a, b]$.

Выберем между a и b на оси абсцисс фиксированную точку x и рассмотрим криволинейную трапецию $aAMx$ (рис. 157), обозначим ее площадь через $S(x)$. Каждому x из отрезка $[a, b]$ соответствует вполне определенное значение $S(x)$, т.е. можно говорить о функции $u=S(x)$. Эта функция определена на отрезке $[a, b]$, она неотрицательна и возрастает (чем больше x, тем большую площадь имеет криволинейная трапеция $aAMx$).

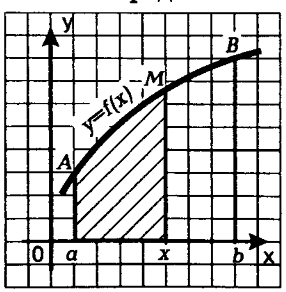


Рис. 157

Особо отметим значения функции на концах отрезка $[a, b]$:

если $x=a$, то трапеция $aAMx$ «вырождается» в отрезок aA, его площадь равна нулю, т.е. $S(a)=0$;

если $a=b$, то трапеция $aAMx$ совпадает с трапецией $aABb$, площадь S которой нам как раз и надо вычислить, т.е. $S(b)=S$.

Вся подготовительная работа закончена, приступим к решению задачи о вычислении площади криволинейной трапеции $aABb$. Осуществим это решение в два этапа.

Первый этап. Найдем производную функции $u=S(x)$, применив выработанный в § 32 алгоритм.

1) Для фиксированного значения x имеем: $S(x)=S_{aAMx}$.

2) Дадим аргументу приращение Δx (пусть для определенности выполняется неравенство $\Delta x>0$). Для значения $p=x+\Delta x$ имеем (рис. 158)

$$S(x+\Delta x)=S_{aAPp}.$$

3) $\Delta u=S(x+\Delta x)-S(x)=S_{xMPp}$ — площадь узенького столбика $xMPp$ на рис. 158.

4) Функция $y=f(x)$ возрастает на отрезке $[x, x+\Delta x]$, значит, $f(x)$ — наименьшее значение функции на указанном отрезке, а $f(x+\Delta x)$ — наибольшее значение функции на указанном отрезке. Но тогда $f(x)\Delta x<S_{xMPp}<f(x+\Delta x)\Delta x$, а потому

$$f(x)<\frac{\Delta u}{\Delta x}<f(x+\Delta x). \qquad (2)$$

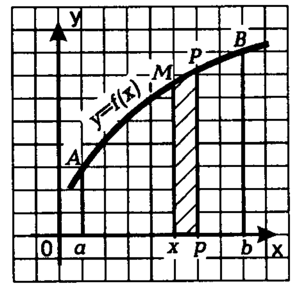


Рис. 158

5) Если $\Delta x\to 0$, то $f(x+\Delta x)\to f(x)$. Анализируя неравенство (2), логично предположить, что тогда и $\frac{\Delta u}{\Delta x}\to f(x)$, — в курсе математического анализа доказано, что это верно. Но, как известно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'=S'(x)$. Таким образом,

$$S'(x)=f(x).$$

Иными словами, $S(x)$ — *первообразная для* $f(x)$.

Второй этап. Имеем: $S(b)=S$; $S(a)=0$, значит,

$$S=S(b)-S(a).$$

Приступая к решению задачи, мы для функции $f(x)$ выбрали первообразную $F(x)$. Значит, теперь у нас есть две первообразные для $f(x)$: $F(x)$ и $S(x)$. Они, как известно, отличаются друг от друга на постоянную величину, т.е.

$$S(x)=F(x)+C.$$

Далее имеем:

$$-\begin{array}{l} S(b)=F(b)+C, \\ S(a)=F(a)+C. \end{array}$$

$$S(b)-S(a)=F(b)-F(a)$$

или $\qquad S=F(b)-F(a).$

Сопоставив этот результат с формулой (1), получим:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Вообще, в курсе математического анализа доказана следующая теорема.

Теорема. ***Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула***

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

Приведенную формулу обычно называют ***формулой Ньютона—Лейбница*** в честь английского физика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646—1716), получивших ее независимо друг от друга и практически одновременно.

Замечание. То, что математическую формулу вывели философ и физик, никого не удивляет, ведь математика — язык, на котором говорит сама природа.

На практике вместо записи $F(b)-F(a)$ используют запись $F(x)\Big|_a^b$ (ее называют иногда *двойной подстановкой*) и соответственно переписывают формулу Ньютона—Лейбница в виде:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b.$$

Вычисляя определенный интеграл, сначала находят первообразную, а затем осуществляют двойную подстановку.

Пример 1. Вычислить $\int_{-1}^3 x^3\,dx$.

Решение. Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$. Значит,

$$\int_{-1}^3 x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^3=\frac{3^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=20.$$

Пример 2. Вычислить $\int_1^2 \frac{3x^4+x^3+2x^2+1}{x^2}\,dx$.

Решение. Здесь для отыскания первообразной удобнее воспользоваться знаком неопределенного интеграла, при этом полезно числитель дроби, содержащейся под знаком интеграла, разделить почленно на ее знаменатель:

$$\int\frac{3x^4+x^3+2x^2+1}{x^2}dx=\int\left(3x^2+x+2+\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

$$=3\int x^2dx+\int x\,dx+2\int dx+\int\frac{1}{x^2}dx=3\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+C=$$

$$=x^3+\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+C.$$

Теперь вычислим определенный интеграл:

$$\int_1^2\frac{3x^4+x^3+2x^2+1}{x^2}dx=\left(x^3+\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\left(2^3+\frac{2^2}{2}+2\cdot2-\frac{1}{2}\right)-\left(1^3+\frac{1^2}{2}+2\cdot1-\frac{1}{1}\right)=$$

$$=\left(8+2+4-\frac{1}{2}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+2-1\right)=13{,}5-2{,}5=11.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y=\sin x$ и осью абсцисс.

Решение. Можно взять полуволну синусоиды от точки $x=0$ до точки $x=\pi$ (рис. 159) и воспользоваться формулой (1) при следующих условиях: $a=0$, $b=\pi$, $f(x)=\sin x$. Получим:

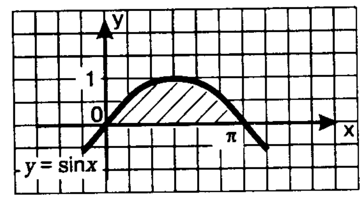


Рис. 159

$$S=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=-(\cos\pi-\cos0)=-(-1-1)=2$$

(в процессе вычислений мы учли, что первообразной для $\sin x$ является $-\cos x$).

Ответ: $S=2$.

Опираясь на формулу Ньютона—Лейбница, нетрудно обосновать некоторые свойства определенного интеграла.

Свойство 1. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов*:

$$\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ — первообразная для $f(x)+g(x)$. Тогда:

$$\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)dx=\left(F(x)+G(x)\right)\Big|_a^b=\left(F(b)+G(b)\right)-\left(F(a)+G(a)\right)=$$

$$=\left(F(b)-F(a)\right)+\left(G(b)-G(a)\right)=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 3. Если $a < c < b$, то

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(*аддитивное свойство интеграла*).

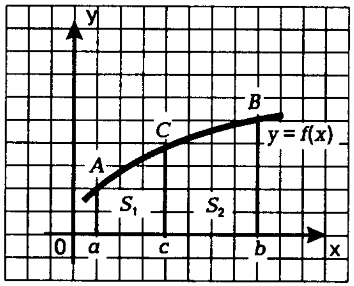


Рис. 160

Доказательство.

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

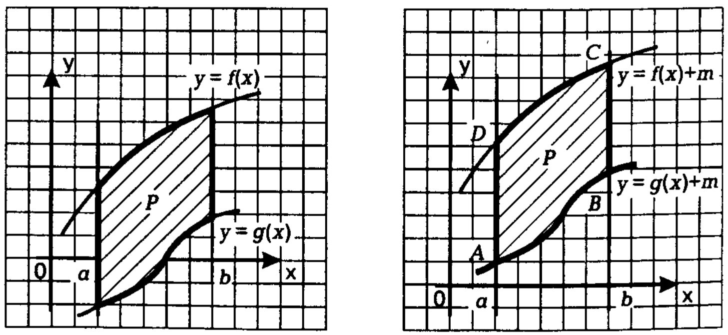
$$= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \quad \bullet$$

Геометрический смысл аддитивного свойства интеграла заключается в том, что (см. рис. 160) площадь криволинейной трапеции равна сумме площадей криволинейных трапеций, из которых она составлена: $S_{aABb} = S_{aACc} + S_{cCBb}$.

4. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

С помощью интеграла можно вычислить площади не только криволинейных трапеций того вида, который представлен на рис. 160, но и плоских фигур более сложного вида, например, такого, который представлен на рис. 161. Фигура P (рис. 161*а*) ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, причем на отрез-



а *б*

Рис. 161

ке $[a, b]$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant f(x)$. Для вычисления площади такой фигуры будем рассуждать следующим образом.

Выполним параллельный перенос фигуры P на m единиц вверх ($m > 0$) так, чтобы фигура P оказалась расположенной в координатной плоскости выше оси абсцисс (рис. 161 *б*). Теперь она ограничена сверху и снизу графиками функций $y = f(x) + m$, $y = g(x) + m$, причем обе функции непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a, b]$. Имеем:

$$S_P = S_{ABCD} = S_{aDCb} - S_{aABb} = \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)dx =$$

$$= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Итак, *площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и таких, что $g(x) \leqslant f(x)$ для всех x из отрезка $[a, b]$, вычисляется по формуле*

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.} \qquad (3)$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 5 - x$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение. Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рис. 162. Воспользовавшись формулой (3), получим:

$$S = \int_1^2 ((5 - x) - x)dx =$$

$$= \int_1^2 (5 - 2x)dx = (5x - x^2)\Big|_1^2 =$$

$$= (5 \cdot 2 - 2^2) - (5 \cdot 1 - 1^2) = 2.$$

Ответ: $S = 2$.

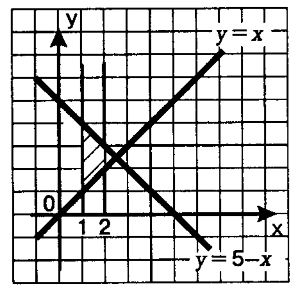


Рис. 162

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x - 2$ и параболой $y = x^2 - 4x + 2$.

Решение. Прямую $y = x - 2$ можно построить по точкам (2; 0) и (0; −2) (рис. 163). Абсциссу вершины параболы найдем из условия $y' = 0$. Имеем:

$$y' = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4;$$

$$2x - 4 = 0;$$

$$x = 2.$$

Если $x = 2$, то $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = -2$. Значит, вершиной параболы служит точка (2; −2), а осью параболы — прямая $x = 2$. Возьмем две пары точек,

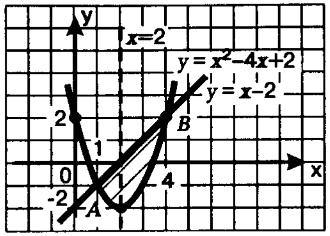


Рис. 163

симметричных относительно оси параболы: (1; −1) и (3; −1), (0; 2) и (4; 2) и построим параболу по пяти точкам (рис. 163). Парабола и прямая пересекаются в двух точках A и B, для отыскания абсцисс этих точек надо решить уравнение

$$x^2-4x+2=x-2.$$

Находим последовательно:

$$x^2-5x+4=0;$$

$$x_1=1;\ x_2=4.$$

Фигура, площадь которой надо найти, ограничена линиями $y=x^2-4x+2$ (снизу) и $y=x-2$ (сверху). Можно считать, что с боков эта фигура ограничена прямыми $x=1$ и $x=4$. Значит, для вычисления площади фигуры можно применить формулу (3).

$$S=\int_1^4((x-2)-(x^2-4x+2))dx=\int_1^4(5x-x^2-4)dx=\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\left(5\cdot\frac{4^2}{2}-\frac{4^3}{3}-4\cdot4\right)-\left(5\cdot\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}-4\cdot1\right)=4{,}5.$$

Ответ: $S=4{,}5$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой главе вы познакомились с новыми *терминами* математического языка:

первообразная;

неопределенный интеграл;

определенный интеграл.

Вы познакомились с новыми *обозначениями* — новыми символами математического языка:

$\int f(x)dx$ — неопределенный интеграл;

$\int_a^b f(x)dx$ — определенный интеграл.

Мы вывели *формулы и правила*:

для отыскания первообразной и неопределенного интеграла;

для вычисления определенного интеграла (формула Ньютона—Лейбница);

для вычисления площади криволинейной трапеции.

Глава

СТЕПЕНИ И КОРНИ. СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 39. ПОНЯТИЕ КОРНЯ n-й СТЕПЕНИ ИЗ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Рассмотрим уравнение $x^4=1$ и решим его графически. Для этого в одной системе координат построим график функции $y=x^4$ и прямую $y=1$ (рис. 164 *а*). Они пересекаются в двух точках: $A(-1;\ 1)$ и $B(1;\ 1)$. Абсциссы точек A и B, т.е. $x_1=-1$, $x_2=1$, являются корнями уравнения $x^4=1$.

Рассуждая точно так же, находим корни уравнения $x^4=16$: $x_1=-2$, $x_2=2$.

А теперь попробуем решить уравнение $x^4=5$; геометрическая иллюстрация представлена на рис. 164 *б*. Ясно, что уравнение имеет два корня x_1 и x_2, причем эти числа, как и в двух предыдущих случаях, взаимно противоположны. Но для первых двух уравнений корни были найдены без труда (их можно было найти и не пользуясь графиками), а с уравнением $x^4=5$ имеются проблемы: по чертежу мы не можем указать значения корней, а можем только установить, что один корень располагается левее точки −1, а второй — правее точки 1.

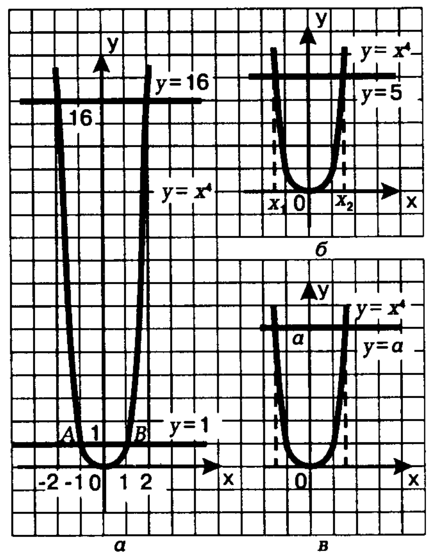


Рис. 164

Можно доказать (примерно так же, как это сделано в нашем учебнике «Алгебра-8» для числа $\sqrt{5}$), что x_1 и x_2 — иррациональные числа (т.е. бесконечные непериодические десятичные дроби).

Встретившись впервые с подобной ситуацией, математики поняли, что надо придумать способ ее описания на математическом языке. Они ввели в рассмотрение новый символ $\sqrt[4]{\ }$, который назвали *корнем четвертой степени*, и с помощью этого символа корни уравнения $x^4 = 5$ записали так: $x_1 = -\sqrt[4]{5}$, $x_2 = \sqrt[4]{5}$ (читается: «корень четвертой степени из пяти»).

Замечание 1. Сравните эти рассуждения с аналогичными рассуждениями, проведенными в § 17, 32 и 38. Новые термины и новые обозначения в математике появляются тогда, когда они необходимы для описания новой математической модели. Это — отражение особенности математического языка: его основная функция не коммуникативная — для общения, а организующая — для организации успешной работы с математическими моделями в разных областях знаний.

Мы говорили об уравнении $x^4 = a$, где $a > 0$. С равным успехом мы могли говорить и об уравнении $x^n = a$, где $a > 0$, а n — любое натуральное число. Например, решая графически уравнение $x^5 = 1$, находим $x = 1$ (рис. 165); решая уравнение $x^5 = 7$, устанавливаем, что уравнение имеет один корень x_1, который располагается на оси x чуть правее точки 1 (см. рис. 165). Для числа x_1 введем обозначение $\sqrt[5]{7}$.

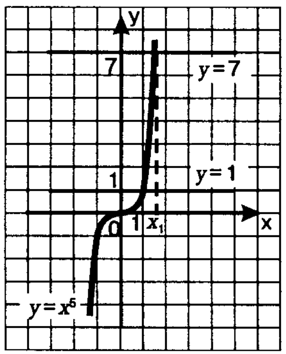


Рис. 165

Вообще, решая уравнение $x^n = a$, где $a > 0$, $n \in N$, $n > 1$, получаем в случае четного n два корня: $-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}$ (рис. 164, *в*); в случае нечетного n — один корень $\sqrt[n]{a}$ (читается: «корень n-й степени из числа a»). Решая уравнение $x^n = 0$, получаем единственный корень $x = 0$.

Замечание 2. В математическом языке, как и в обыденном языке, бывает так, что один и тот же термин применяется к разным понятиям; так, в предыдущем предложении слово «корень» употреблено в двух смыслах: как корень уравнения (к такому толкованию вы давно привыкли) и как корень n-й степени из числа (новое толкование). Обычно из контекста бывает ясно, какое толкование термина имеется в виду.

Теперь мы готовы дать точное определение.

Определение 1. Корнем n-й степени из неотрицательного числа a ($n = 2, 3, 4, 5, \ldots$) называют такое неотрицательное число, которое при возведении в степень n дает в результате число a.

Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$, число a при этом называют **подкоренным числом**, а число n — **показателем корня**.

Если $n = 2$, то обычно не говорят «корень второй степени», а говорят «корень квадратный». В этом случае не пишут $\sqrt[2]{a}$, а пишут $\sqrt{a}$. Это тот частный случай, который вы специально изучали в курсе алгебры 8-го класса.

Если $n = 3$, то вместо «корень третьей степени» часто говорят «корень кубический». Первое знакомство с кубическим корнем у вас также состоялось в курсе алгебры 8-го класса. Мы использовали кубический корень в § 36 при решении примера **6**.

Итак,

$$\boxed{\text{если } a \geq 0, n = 2, 3, 4, 5, \ldots, \text{ то: 1) } \sqrt[n]{a} \geq 0; \text{ 2) } (\sqrt[n]{a})^n = a.}$$

Вообще, $\sqrt[n]{a} = b$ и $b^n = a$ — одна и та же математическая модель (одна и та же зависимость между неотрицательными числами a и b), но только вторая описана более простым языком (использует более простые символы), чем первая.

Операцию нахождения корня из неотрицательного числа называют обычно *извлечением корня*. Эта операция является обратной по отношению к возведению в соответствующую степень. Сравните:

Возведение в степень	Извлечение корня
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$
$0{,}3^4 = 0{,}0081$	$\sqrt[4]{0{,}0081} = 0{,}3$

Еще раз обратите внимание: в таблице фигурируют только положительные числа, поскольку это оговорено в определении 1. И хотя, например, $(-6)^2 = 36$ — верное равенство, перейти от него к записи с использованием квадратного корня, т.е. написать, что $\sqrt{36} = -6$, нельзя. По определению $\sqrt{36}$ — положительное число, значит, $\sqrt{36} = 6$ (а не -6). Точно так же, хотя и $2^4 = 16$, и $(-2)^4 = 16$, переходя к знакам корней, мы должны написать $\sqrt[4]{16} = 2$ (и в то же время $\sqrt[4]{16} \neq -2$).

Иногда выражение $\sqrt[n]{a}$ называют *радикалом* (от латинского слова *radix* — «корень»). В русском языке термин *радикальный* используется довольно часто, например, «радикальные изменения» — это значит «коренные изменения». Между прочим, и само обозначение корня напоминает о слове *radix*: символ $\sqrt{\ }$ — это стилизованная буква r.

Пример 1. Вычислить: а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt[3]{0{,}125}$; в) $\sqrt[7]{0}$; г) $\sqrt[4]{17}$.

Решение. а) $\sqrt{49} = 7$, так как $7 > 0$ и $7^2 = 49$.

б) $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$, так как $0{,}5 > 0$ и $0{,}5^3 = 0{,}125$.

в) $\sqrt[7]{0} = 0$.

г) В отличие от предыдущих примеров мы не можем указать точное значение числа $\sqrt[4]{17}$. Ясно лишь, что оно больше, чем 2, но меньше, чем 3, поскольку $2^4=16$ (это меньше, чем 17), а $3^4 = 81$ (это больше, чем 17). Замечаем, что 2^4 намного ближе к 17, чем 3^4, так что есть основания использовать знак приближенного равенства: $\sqrt[4]{17} \approx 2$.

Впрочем, более точное приближенное значение числа $\sqrt[4]{17}$ можно найти с помощью калькулятора, который содержит операцию извлечения корня, оно равно приближенно 2,03, т.е. $\sqrt[4]{17} \approx 2{,}03$ (с точностью до 0,01).

Операцию извлечения корня определяют и для отрицательного подкоренного числа, но только в случае **нечетного** показателя корня. Иными словами, равенство $(-2)^5=-32$ можно переписать в эквивалентной форме как $\sqrt[5]{-32}=-2$. При этом используется следующее определение.

Определение 2. Корнем нечетной степени n из отрицательного числа a ($n = 3, 5, \ldots$) называют такое отрицательное число, которое, будучи возведено в степень n, дает в результате число a.

Это число, как и в определении 1, обозначают $\sqrt[n]{a}$, число a — *подкоренное число*, число n — *показатель корня*.

Итак,

$$\boxed{\text{если } a<0, n=3,5,7,\ldots, \text{ то: } 1)\ \sqrt[n]{a}<0;\ \ 2)\ (\sqrt[n]{a})^n=a.}$$

Таким образом, *корень четной степени имеет смысл (т.е. определен) только для неотрицательного подкоренного выражения; корень нечетной степени имеет смысл для любого подкоренного выражения.*

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{3x+4}=-2$; б) $\sqrt[4]{3x-2}=1$; в) $\sqrt[4]{2-5x}=-4$; г) $\sqrt[6]{x^2-5x+68}=2$.

Решение. а) Если $\sqrt[3]{y}=-2$, то $y=-8$. Фактически обе части заданного уравнения мы должны возвести в куб. Получим:

$$3x+4=-8;$$
$$3x=-12;$$
$$x=-4.$$

б) Рассуждая, как в примере а), возведем обе части уравнения в четвертую степень. Получим:

$$3x-2=1;$$
$$3x=3;$$
$$x=1.$$

в) Здесь не надо возводить в четвертую степень, это уравнение не имеет решений. Почему? Потому, что согласно определению 1 корень четной степени — неотрицательное число.

г) Возведя обе части уравнения в шестую степень, получим:

$$x^2-5x+68=64;$$
$$x^2-5x+4=0;$$
$$x_1=1, \quad x_2=4.$$

§ 40. ФУНКЦИИ $y=\sqrt[n]{x}$, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

В предыдущем параграфе мы ввели понятие корня n-й степени из действительного числа, отметили, что из любого неотрицательного числа можно извлечь корень любой степени (второй, третьей, четвертой и т.д.), а из отрицательного числа можно извлечь корень любой нечетной степени. Но тогда следует подумать и о функции вида $y=\sqrt[n]{x}$, о ее графике, о ее свойствах. Этим мы и займемся в настоящем параграфе. Сначала поговорим о функции $y=\sqrt[n]{x}$ в случае неотрицательных значений аргумента.

Начнем с известного вам случая, когда $n=2$, т.е. с функции $y=\sqrt{x}$. На рис. 166 изображен график функции $y=\sqrt{x}$ и график функции $y=x^2$, $x \geqslant 0$. Оба графика представляют собой одну и ту же кривую — ветвь параболы, только по-разному расположенную на координатной плоскости. Уточним: *эти графики симметричны относительно прямой $y=x$*, поскольку состоят из точек, симметричных друг другу относительно указанной прямой. Смотрите: на рассматриваемой ветви параболы $y=x^2$ есть точки (0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9), (4; 16), а на графике функции $y=\sqrt{x}$ — точки (0; 0), (1; 1), (4; 2), (9; 3), (16; 4).

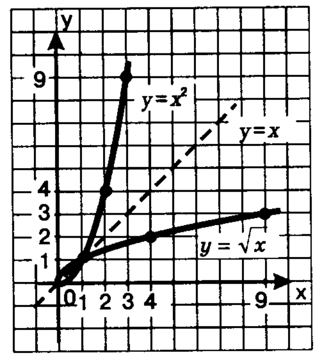


Рис. 166

Точки (2; 4) и (4; 2), (3; 9) и (9; 3), (4; 16) и (16; 4) симметричны относительно прямой $y = x$, (а точки (0; 0) и (1; 1) лежат на этой прямой). И вообще, для любой точки $(a;\ a^2)$ на графике функции $y=x^2$ есть симметричная ей относительно прямой $y=x$ точка $(a^2;\ a)$ на графике функции $y=\sqrt{x}$ и обратно. Справедлива следующая теорема.

Теорема. ***Точки $M\ (a; b)$ и $P\ (b; a)$ симметричны относительно прямой $y=x$.***

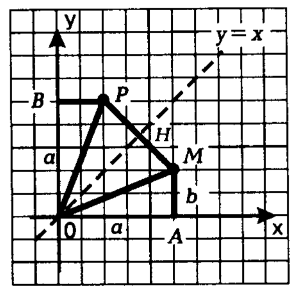


Рис. 167

Доказательство. Будем считать для определенности, что a и b — положительные числа. Рассмотрим треугольники OAM и OBP (рис. 167). Они равны, значит, $OP=OM$ и $\angle MOA = \angle BOP$. Но тогда и $\angle POH = \angle HOM$, поскольку прямая $y=x$ — биссектриса угла AOB. Итак, треугольник POM — равнобедренный, OH — его биссектриса, а значит, и ось симметрии. Точки M и P симметричны относительно прямой OH, что и требовалось доказать. ●

Итак, график функции $y=\sqrt{x}$ можно получить из графика функции $y=x^2$, $x\geqslant 0$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y=x$. Аналогично график функции $y=\sqrt[3]{x}$, $x\geqslant 0$ можно получить из графика функции $y=x^3$, $x\geqslant 0$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y=x$; график функции $y=\sqrt[4]{x}$ можно получить из графика функции $y=x^4$, $x\geqslant 0$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y=x$ и т.д. Напомним, что график функции $y=x^n$, где $x\geqslant 0$, $n=3, 4, 5, \dots$, напоминает по виду ветвь параболы $y=x^2$, $x\geqslant 0$. Чем больше n, тем круче эта ветвь устремляется вверх на промежутке $(0, +\infty)$ и тем ближе подходит к оси x в окрестности точки $x=0$ (рис. 168).

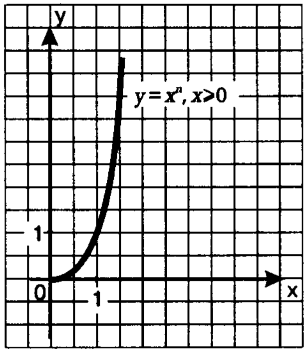


Рис. 168

Сформулируем общий вывод: *график функции* $y=\sqrt[n]{x}$, $x\geqslant 0$ *симметричен графику функции* $y=x^n$, $x\geqslant 0$, *относительно прямой* $y=x$ (рис. 169).

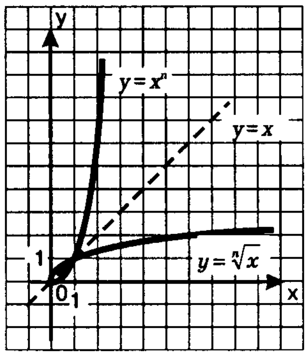


Рис. 169

Свойства функции $y=\sqrt[n]{x}$, $x\geqslant 0$:

1) $D(f)=[0, +\infty)$;

2) *функция не является ни четной, ни нечетной;*

3) *возрастает на* $[0, +\infty)$;

4) *не ограничена сверху, ограничена снизу;*

5) *не имеет наибольшего значения;* $y_{\text{наим.}}=0$;

6) *непрерывна;*

7) $E(f)=[0, +\infty)$.

Обратите внимание на одно любопытное обстоятельство. Рассмотрим две функции, графики которых изображены на рис. 169: $y=\sqrt[n]{x}$, $x\geqslant 0$ и $y=x^n$, $x\geqslant 0$. Только что мы перечислили семь свойств для первой функции, но абсолютно теми же свойствами обладает и вторая функция. Словесные «портреты» двух различных функций одинаковы. Но, уточним, пока одинаковы. Математики не смогли вынести такой несправедливости, когда разные функции, имеющие разные графики, словесно описываются одинаково, и ввели понятия *выпуклости вверх* и *выпуклости вниз*. График функции $y=\sqrt[n]{x}$ обращен *выпуклостью вверх*, тогда как график функции $y=x^n$ обращен *выпуклостью вниз*.

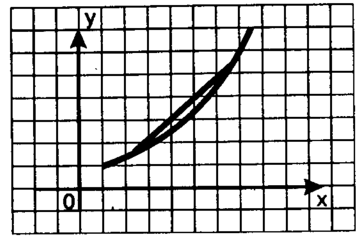


Рис. 170

Обычно говорят, что непрерывная функция *выпукла вниз*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка (рис. 170); непрерывная функция *выпукла вверх*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка (рис. 171).

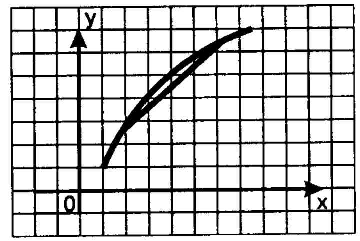


Рис. 171

Свойство выпуклости мы будем в дальнейшем включать в процедуру чтения графика. Отметим его (продолжив нумерацию описанных ранее свойств) для рассматриваемой функции:

8) *функция* $y=\sqrt[n]{x}$ *выпукла вверх на луче* $[0, +\infty)$.

В предыдущей главе мы познакомились еще с одним свойством функции — дифференцируемостью, видели, что функция $y=x^n$ дифференцируема в любой точке, ее производная равна nx^{n-1}. Геометрически это означает, что в любой точке графика функции $y=x^n$ к нему можно провести касательную. Этим же свойством обладает и график функции $y=\sqrt[n]{x}$: в любой его точке к графику можно провести касательную. Таким образом, мы можем отметить еще одно свойство функции $y=\sqrt[n]{x}$:

9) *функция* $y=\sqrt[n]{x}$ *дифференцируема в любой точке* $x>0$.

Обратите внимание: о дифференцируемости функции в точке $x=0$ речь не идет — в этой точке касательная к графику функции совпадает с осью y, т.е. перпендикулярна оси абсцисс.

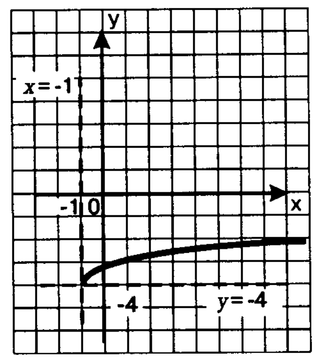


Рис. 172

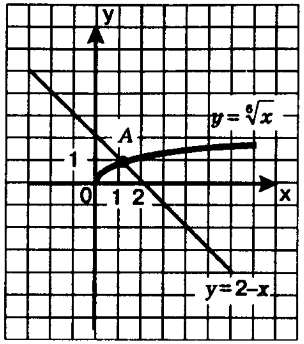


Рис. 173

Пример 1. Построить график функции $y=\sqrt[4]{x+1}-4$.

Решение. 1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; -4)$ — пунктирные прямые $x=-1$ и $y=-4$ на рис. 172.

2) «Привяжем» функцию $y=\sqrt[4]{x}$ к новой системе координат. Это и будет требуемый график.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[6]{x}=2-x$.

Решение. *Первый способ.*

1) Введем в рассмотрение две функции $y=\sqrt[6]{x}$ и $y=2-x$.

2) Построим график функции $y=\sqrt[6]{x}$ (рис. 173).

3) Построим график линейной функции $y=2-x$ (см. рис. 173).

4) Построенные графики пересекаются в одной точке A, причем по графику можно сделать предположение, что координаты точки A таковы: (1; 1). Проверка показывает, что на самом деле точка (1; 1) принадлежит и графику функции $y=\sqrt[6]{x}$, и графику функции $y=2-x$. Значит, наше уравнение имеет один корень: $x=1$ — абсцисса точки A.

Второй способ.

Геометрическая модель, представленная на рис. 173, наглядно иллюстрирует следующее утверждение, которое иногда позволяет очень изящно решить уравнение (и которым мы уже воспользовались в § 35 при решении примера 2):

Если функция $y=f(x)$ возрастает, а функция $y=g(x)$ убывает и если уравнение $f(x)=g(x)$ имеет корень, то только один.

Вот как, опираясь на это утверждение, мы можем решить заданное уравнение:

1) заметим, что при $x=1$ выполняется равенство $\sqrt[6]{1}=2-1$, значит, $x=1$ — корень уравнения (этот корень мы угадали);

2) функция $y=2-x$ убывает, а функция $y=\sqrt[6]{x}$ возрастает; значит, корень у заданного уравнения только один, и этим корнем является найденное выше значение $x=1$.

Ответ: $x=1$.

До сих пор мы говорили о функции $y=\sqrt[n]{x}$ только для неотрицательных значений аргумента. Но ведь если n — нечетное число, выражение $\sqrt[n]{x}$ имеет смысл и для $x<0$. Значит, есть смысл поговорить о функции $y=\sqrt[n]{x}$ в случае нечетного n для любых значений x.

Собственно говоря, к перечисленным добавится только одно свойство:

если n — нечетное число ($n=3, 5, 7, ...$), то $y=\sqrt[n]{x}$ — нечетная функция.

В самом деле, пусть $f(x)=\sqrt[n]{x}$. Тогда $f(-x)=\sqrt[n]{-x}=-\sqrt[n]{x}=-f(x)$ — для нечетного показателя n такие преобразования верны. Итак, $f(-x)=-f(x)$, а это и означает нечетность функции.

Как же выглядит график функции $y=\sqrt[n]{x}$ в случае нечетного показателя n? При $x\geq 0$ так, как показано на рис. 169, — это ветвь искомого графика. Добавив к ней ветвь, симметричную ей относительно начала координат (что, напомним, характерно для любой нечетной функции), получим график функции $y=\sqrt[n]{x}$ (рис. 174). Обратите внимание: ось y является касательной к графику в точке $x=0$.

Итак, повторим еще раз:

если n — четное число, то график функции $y=\sqrt[n]{x}$ имеет вид, представленный на рис. 169;

если n — нечетное число, то график функции $y=\sqrt[n]{x}$ имеет вид, представленный на рис. 174.

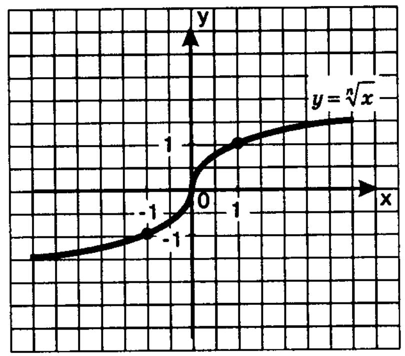


Рис. 174

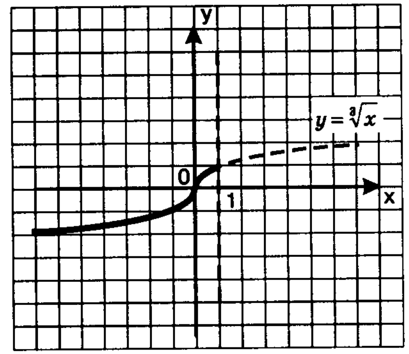


Рис. 175

Пример 3. Построить и прочитать график функции $y=f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, \text{ если } x\leq 1;\\ \dfrac{1}{x^2}, \text{ если } x>1.\end{cases}$$

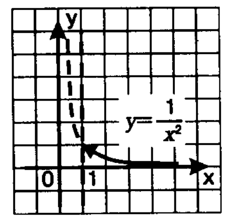


Рис. 176

Решение. Сначала построим график функции $y=\sqrt[3]{x}$ и выделим его часть на луче $(-\infty, 1]$ (рис. 175). Затем построим график функции $y=\dfrac{1}{x^2}$ и выделим его часть на открытом луче $(1, +\infty)$ (рис. 176). Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции $y=f(x)$ (рис. 177).

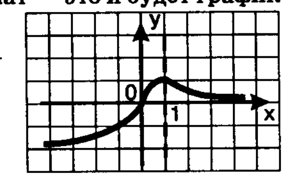


Рис. 177

Перечислим (опираясь на построенный график) свойства функции $y=f(x)$:

1) $D(f)=(-\infty, +\infty)$;

2) ни четна, ни нечетна;

3) убывает на луче $[1, +\infty)$, возрастает на луче $(-\infty, 1]$;

4) не ограничена снизу, ограничена сверху;

5) нет наименьшего значения, а $y_{\text{наиб.}}=1$ (достигается в точке $x=1$);

6) непрерывна;

7) $E(f)=(-\infty, 1]$;

8) выпукла вниз при $x\leqslant 0$, выпукла вверх на отрезке $[0, 1]$, выпукла вниз при $x\geqslant 1$;

9) функция дифференцируема всюду, кроме точек $x=0$ и $x=1$.

10) график функции имеет горизонтальную асимптоту $y=0$ при $x\to+\infty$; это означает, напомним, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Пример 4. Найти область определения функции:

а) $y=\sqrt[4]{4x-8}$; б) $y=\sqrt[3]{x^2-9}$;

в) $y=\sqrt{2x+2}+\sqrt[6]{16-x^2}$.

Решение. а) Под знаком корня четной степени должно находиться неотрицательное число, значит, задача сводится к решению неравенства $4x-8\geqslant 0$. Получаем $x\geqslant 2$. Значит, $D(f)=[2, +\infty)$.

б) Под знаком корня нечетной степени может находиться любое число, значит, здесь на x не накладывается никаких ограничений, т.е. $D(f)=R$.

в) Выражение $\sqrt{2x+2}$ имеет смысл при условии $2x+2\geqslant 0$, а выражение $\sqrt[6]{16-x^2}$ — при условии $16-x^2\geqslant 0$. Значит, должны одновременно выполняться два неравенства: $2x+2\geqslant 0$ и $16-x^2\geqslant 0$, т.е. задача сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x+2\geqslant 0, \\ 16-x^2\geqslant 0. \end{cases}$$

Решая неравенство $2x+2\geqslant 0$, находим $x\geqslant -1$.

Решим неравенство $16-x^2\geqslant 0$. Разложим левую часть неравенства на множители: $(4-x)(4+x)\geqslant 0$. Левая часть неравенства обращается в 0 в точках -4 и 4. Отметим эти точки на числовой прямой (рис. 178). Числовая прямая разбивается указанными точками на три промежутка, причем на каждом промежутке выражение $p(x)=(4-x)(4+x)$ сохраняет постоянный знак (знаки указаны на рис. 178). Промежуток, на котором выполняется неравенство $p(x)>0$, заштрихован на рис. 178. По условию задачи нас интересуют и те точки x, в которых выполняется равенство $p(x)=0$. Таких точек две: $x=-4$, $x=4$ — они отмечены на рис. 178 темными кружочками. Таким образом, на рис. 178 представлена геометрическая модель решения второго неравенства системы.

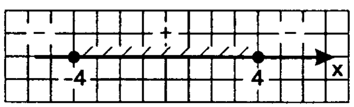


Рис. 178

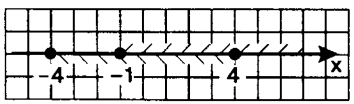


Рис. 179

Отметим найденные решения первого и второго неравенств системы на одной координатной прямой, использовав для первого — верхнюю, а для второго — нижнюю штриховку (рис. 179). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы, т.е. промежуток, на котором обе штриховки совпали. Таким промежутком является отрезок $[-1, 4]$.

Ответ. $D(f)=[-1, 4]$.

§ 41. СВОЙСТВА КОРНЯ n-Й СТЕПЕНИ

Чтобы успешно использовать на практике операцию извлечения корня, нужно познакомиться со свойствами этой операции, что мы и сделаем в настоящем параграфе.

Все свойства формулируются и доказываются только для неотрицательных значений переменных, содержащихся под знаками корней.

Теорема 1. ***Корень n-й степени (n = 2, 3, 4, ...) из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n-й степени из этих чисел:***

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\sqrt[n]{ab}=x$, $\sqrt[n]{a}=y$, $\sqrt[n]{b}=z$. Нам надо доказать, что для неотрицательных чисел x, y, z выполняется равенство $x=yz$.

Так как $\sqrt[n]{ab}=x$, то $x^n=ab$. Так как $\sqrt[n]{a}=y$, то $y^n=a$. Так как $\sqrt[n]{b}=z$, то $z^n=b$.

Итак, $x^n=ab$, $y^n=a$, $z^n=b$, а тогда $x^n=y^n z^n$, т.е. $x^n=(yz)^n$. Но если степени двух неотрицательных чисел равны и показатели степеней равны, то равны и основания степеней; значит, из равенства $x^n=(yz)^n$ следует, что $x=yz$, а это и требовалось доказать. ●

Приведем краткую запись доказательства теоремы.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\sqrt[n]{ab}=x$	$x^n=ab$	$x^n=y^n z^n$
$\sqrt[n]{a}=y$	$y^n=a$	$x^n=(yz)^n$
$\sqrt[n]{b}=z$	$z^n=b$	$x=yz$
Доказать: $x=yz$		

Замечания: 1. Теорема 1 остается справедливой и для случая, когда подкоренное выражение представляет собой произведение более чем двух неотрицательных чисел.

2. Теорему 1 можно сформулировать, используя конструкцию «если...то» (как это принято для теорем в математике). Приведем соответствующую формулировку: *если a и b — неотрицательные числа, то справедливо равенство* $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$. Следующую теорему мы именно так и оформим.

Теорема 2. ***Если $a \geqslant 0$, $b > 0$ и n — натуральное число, большее 1, то справедливо равенство***

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Краткая (хотя и неточная) формулировка, которую удобнее использовать на практике: *корень из дроби равен дроби от корней.*

Доказательство. Приведем краткую запись доказательства теоремы 2, а вы попробуйте сделать соответствующие комментарии, аналогичные тем, что были приведены при доказательстве теоремы 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x$	$x^n = \frac{a}{b}$	$x^n = \frac{y^n}{z^n}$
$\sqrt[n]{a} = y$	$y^n = a$	$x^n = \left(\frac{y}{z}\right)^n$
$\sqrt[n]{b} = z$	$z^n = b$	$x = \frac{y}{z}$
Доказать: $x = \frac{y}{z}$		●

√ Вы, конечно, обратили внимание на то, что доказанные два свойства корней n-й степени представляют собой обобщение известных вам из курса алгебры 8-го класса свойств квадратных корней. И если бы других свойств корней n-й степени не было, то как бы все было просто (и не очень интересно). На самом деле есть еще несколько интересных и важных свойств, которые мы обсудим в этом параграфе. Но сначала рассмотрим несколько примеров на использование теорем 1 и 2.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27}$.

Решение. Воспользовавшись первым свойством корней (теорема 1), получим:

$$\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$ ◀■

Замечание 3. Можно, конечно, этот пример решить по-другому, особенно если у вас под рукой есть микрокалькулятор: перемножить числа 125, 64 и 27, а затем извлечь кубический корень из полученного произведения. Но, согласитесь, предложенное решение «интеллигентнее».

Пример 2. Вычислить $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

Решение. Обратим смешанное число $5\frac{1}{16}$ в неправильную дробь. Имеем $5\frac{1}{16} = 5 + \frac{1}{16} = \frac{81}{16}$. Воспользовавшись вторым свойством корней (теорема 2), получим:

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$ ◀■

Пример 3. Вычислить: а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{13}$.

Решение. Любая формула в алгебре, как вам хорошо известно, используется не только «слева направо», но и «справа налево». Так, первое свойство корней означает, что $\sqrt[3]{ab}$ можно представить в виде $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ и, наоборот, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ можно заменить выражением $\sqrt[3]{ab}$. То же относится и ко второму свойству корней. Учитывая это, выполним вычисления:

а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$;

б) $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{96 : 3} = \sqrt[5]{32} = 2.$ ◀■

Пример 4. Выполнить действия: а) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b}$; б) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.

Решение. а) Имеем: $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a \cdot b \cdot b} = \sqrt[4]{ab^2}$.

б) Теорема 1 позволяет нам перемножать только корни одинаковой степени, т.е. только корни с одинаковым показателем. Здесь же предлагается умножить корень 2-й степени из числа a на корень 3-й степени из того же числа. Как это делать, мы пока не знаем. Вернемся к этой проблеме позднее. ◀■

Продолжим изучение свойств радикалов.

Теорема 3. ***Если $a \geqslant 0$, k — натуральное число и n — натуральное число, большее 1, то справедливо равенство***

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Иными словами, *чтобы возвести корень в натуральную степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение.*

Это — следствие теоремы 1. В самом деле, например, для $k = 3$ получаем: $(\sqrt[n]{a})^3 = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a} = \sqrt[n]{a^3}$. Точно так же можно рассуждать в случае любого другого натурального значения показателя k.

Теорема 4. ***Если $a \geqslant 0$ и n, k — натуральные числа, большие 1, то справедливо равенство***

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Иными словами, *чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели корней.*

Например, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$; $\sqrt[5]{\sqrt{a}} = \sqrt[10]{a}$; $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.

Доказательство. Как и в теореме 2, приведем краткую запись доказательства, а вы попробуйте самостоятельно сделать соответствующие комментарии, аналогичные тем, что были приведены при доказательстве теоремы 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = x;$ $\sqrt[nk]{a} = y$	$x^n = \sqrt[k]{a};$ $((x)^n)^k = a;$ $y^{nk} = a$	$((x)^n)^k = y^{nk}$ $x^{nk} = y^{nk}$ $x = y$ ●
Доказать: $x = y$		

Замечание 4. Давайте переведем дух. Чему мы научились благодаря доказанным теоремам? Мы узнали, что над корнями можно осуществлять четыре операции: умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня (из корня). А как же обстоит дело со сложением и вычитанием корней? Никак. Об этом мы говорили еще в 8-м классе по поводу операции извлечения квадратного корня.

Например, вместо $\sqrt[3]{8+27}$ нельзя написать $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}$. В самом деле, $\sqrt[3]{8+27}=\sqrt[3]{35}$, а $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}=2+3=5$. Но ведь очевидно, что $\sqrt[3]{35}\neq 5$. Будьте внимательны!

Самое, пожалуй, интересное свойство корней — это то, о котором пойдет речь в следующей теореме. Учитывая особую значимость этого свойства, мы позволим себе нарушить определенный стиль формулировок и доказательств, выработанный в этом параграфе, с тем чтобы формулировка теоремы 5 была немного «мягче», а ее доказательство — понятнее.

Теорема 5. ***Если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится, т.е.***

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Например:

$\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 4);

$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 3);

$\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[10]{a^4}$ (показатели корня и подкоренного выражения умножили на 2).

Доказательство. Обозначим левую часть доказываемого равенства буквой x: $\sqrt[np]{a^{kp}} = x$. Тогда по определению корня должно выполняться равенство

$$x^{np} = a^{kp}. \qquad (1)$$

Обозначим правую часть доказываемого тождества буквой y:

$$\sqrt[n]{a^k} = y.$$

Тогда по определению корня должно выполняться равенство $y^n = a^k$.

Возведем обе части последнего равенства в одну и ту же степень p; получим:

$$y^{np} = a^{kp}. \qquad (2)$$

Итак (см. равенства (1) и (2)),

$$x^{np} = a^{kp}, \quad y^{np} = a^{kp}.$$

Сопоставляя эти два равенства, приходим к выводу, что $x^{np} = y^{np}$, а значит, $x = y$, что и требовалось доказать. ●

Доказанная теорема позволит нам решить ту проблему, с которой мы столкнулись выше при решении примера 5, где требовалось выполнить умножение корней с разными показателями:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}.$$

Вот как обычно рассуждают в подобных случаях.

1) По теореме 5 в выражении $\sqrt{a}$ можно и показатель корня (т.е. число 2) и показатель подкоренного выражения (т.е. число 1) умножить на одно и то же натуральное число. Воспользовавшись этим, умножим оба показателя на 3; получим:

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3}.$$

2) По теореме 5 в выражении $\sqrt[3]{a}$ можно и показатель корня (т.е. число 3) и показатель подкоренного выражения (т.е. число 1) умножить на одно и то же натуральное число. Воспользовавшись этим, умножим оба показателя на 2; получим:

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}.$$

3) Поскольку получили корни одной и той же 6-й степени, то можно их перемножить:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3\cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5}.$$

Замечание 5. Вы не забыли, что все свойства корней, которые мы обсуждали в этом параграфе, рассмотрены нами только для случая, когда переменные принимают лишь неотрицательные значения? Почему пришлось сделать такое ограничение? Потому, что корень n-й степени из отрицательного числа не всегда имеет смысл — он определен только для нечетных значений n. Для таких значений показателя корня рассмотренные свойства корней верны и в случае отрицательных подкоренных выражений.

§ 42. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ

В 7-м и 8-м классах вы выполняли преобразования рациональных выражений, используя для этого правила действий над многочленами и алгебраическими дробями, формулы сокращенного умножения и т.д. В 8-м классе вы изучили новую операцию — операцию извлечения квадратного корня из неотрицательного числа и, используя свойства квадратных корней, выполняли преобразования выражений, содержащих квадратные корни. В предыдущих параграфах мы познакомились с операцией извлечения корня n-й степени из действительного числа, изучили свойства этой операции, а именно (для неотрицательных значений a и b):

$$(\sqrt[n]{a})^n = a; \quad (\sqrt[n]{a^n}) = a; \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}; \tag{2}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \neq 0); \tag{3}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \tag{4}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \tag{5}$$

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}. \tag{6}$$

Используя эти формулы, можно осуществлять преобразования выражений, содержащих операцию извлечения корня (выражений с радикалами), — такие выражения называют **иррациональными**. Рассмотрим несколько примеров на преобразования иррациональных выражений.

Пример 1. Упростить выражения: а) $\sqrt[4]{32a^5}$; б) $(\sqrt[3]{a^2})^5$.

Решение. а) Представим подкоренное выражение $32a^5$ в виде $16\cdot a^4\cdot 2a$ и воспользуемся формулой (2); получим:

$$\sqrt[4]{32a^5} = \sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{2a} = 2a\sqrt[4]{2a}.$$

Полученное выражение считается более простым, чем заданное, поскольку под знаком корня содержится более простое выражение. Подобное преобразование называют *вынесением множителя за знак радикала*.

б) Воспользовавшись формулой (4), получим:

$$(\sqrt[3]{a^2})^5 = \sqrt[3]{(a^2)^5} = \sqrt[3]{a^{10}}.$$

Представим подкоренное выражение a^{10} в виде $a^9\cdot a$ и воспользуемся формулой (2); получим:

$$\sqrt[3]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^9}\cdot\sqrt[3]{a} = a^3\cdot\sqrt[3]{a}.$$

Как видите, и здесь удалось вынести множитель за знак радикала.

Вспомните формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, которую вы изучали в курсе алгебры 8-го класса. Она обобщается на случай любого четного показателя корня

$$\boxed{\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|.}$$

Эту формулу следует иметь в виду в тех случаях, когда нет уверенности в том, что переменные принимают только неотрицательные значения. Например, вынося множитель за знак корня в выражении $\sqrt[4]{x^4y}$, следует (если о знаке числа x ничего не известно) рассуждать так:

$$\sqrt[4]{x^4y} = \sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{y} = |x|\cdot\sqrt[4]{y}.$$

Наряду с вынесением множителя за знак радикала в необходимых случаях используется и преобразование, так сказать, противоположной направленности: *внесение множителя под знак радикала*. Это преобразование мы используем в следующих двух примерах.

Пример 2. Сравнить числа $2\sqrt[3]{3}$ и $3\sqrt[3]{2}$.

Решение. Имеем: $2 = \sqrt[3]{8}$; $3 = \sqrt[3]{27}$. Значит,

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8\cdot 3} = \sqrt[3]{24}; \quad 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27\cdot 2} = \sqrt[3]{54}.$$

Теперь ясно, что $\sqrt[3]{24} < \sqrt[3]{54}$, т.е. $2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}$.

Пример 3. Упростить выражение $\sqrt[4]{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Сначала внесем множитель x^2 под знак корня 3-й степени:

$$x^2\cdot\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6\cdot x} = \sqrt[3]{x^7}.$$

Теперь заданное выражение можно записать так: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}}$.

Воспользовавшись формулой (5), мы можем последнее выражение записать в виде $\sqrt[12]{x^7}$.

Итак, $\sqrt[4]{x^2\cdot\sqrt[3]{x}} = \sqrt[12]{x^7}$.

Пример 4. Выполнить действия:

а) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})$; б) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$.

Решение. а) Здесь можно применить формулу сокращенного умножения «разность квадратов»:

$$(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}) = (\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2 = \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{b^2}.$$

Воспользовавшись формулой (6), разделим в каждом из полученных радикалов показатели корня и подкоренного выражения на 2; это существенно упростит запись: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Итак, $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}) = \sqrt{a}-\sqrt{b}$.

б) Здесь можно применить формулу сокращенного умножения «разность кубов»:

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}) = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = a - b.$$

Пример 5. Выполнить действия:

$$\text{а) } \sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^{11}}; \quad \text{б) } \sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{4\sqrt{5}+9}.$$

Решение. а) Поскольку перемножать можно корни только одной и той же степени, начнем с уравнивания показателей у имеющихся радикалов. Для этого дважды воспользуемся формулой (6):

$$\sqrt[8]{x^3}=\sqrt[8\cdot 3]{x^{3\cdot 3}}=\sqrt[24]{x^9}; \quad \sqrt[12]{x^{11}}=\sqrt[12\cdot 2]{x^{11\cdot 2}}=\sqrt[24]{x^{22}}.$$

А теперь воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[24]{x^9}\cdot\sqrt[24]{x^{22}}=\sqrt[24]{x^9\cdot x^{22}}=\sqrt[24]{x^{31}}.$$

Осталось вынести множитель за знак радикала:

$$\sqrt[24]{x^{31}}=\sqrt[24]{x^{24}\cdot x^7}=\sqrt[24]{x^{24}}\cdot\sqrt[24]{x^7}=x\sqrt[24]{x^7}.$$

б) *Первый способ.* Преобразуем первый множитель в корень 4-й степени:

$$\sqrt{\sqrt{5}-2}=\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^2}=\sqrt[4]{(\sqrt{5})^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+2^2}=\sqrt[4]{5-4\sqrt{5}+4}=\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}.$$

А теперь уже нетрудно выполнить умножение радикалов:

$$\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=\sqrt[4]{9^2-(4\sqrt{5})^2}=\sqrt[4]{81-80}=1.$$

Второй способ. Сначала поработаем с подкоренным выражением во втором множителе. Имеем:

$$9+4\sqrt{5}=5+4\sqrt{5}+4=(\sqrt{5})^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+2^2=(\sqrt{5}+2)^2.$$

Значит, $\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[4]{(\sqrt{5}+2)^2}$. Разделив показатели корня и подкоренного выражения на 2, получим: $\sqrt{\sqrt{5}+2}$ (формулой (6) мы здесь имеем право пользоваться, поскольку подкоренное выражение $\sqrt{5}+2$ — положительное число). Осталось выполнить умножение квадратных корней:

$$\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+2}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=\sqrt{5-4}=1.$$

Пример 6. Разложить на множители: $\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt[5]{x^2y}+4\sqrt[5]{y^2}$.

Решение. Заданное выражение можно переписать следующим образом:

$$(\sqrt[5]{x^2})^2-2\sqrt[5]{x^2}\cdot 2\sqrt[5]{y}+(2\sqrt[5]{y})^2.$$

Теперь видно, что это — полный квадрат, квадрат разности выражений $\sqrt[5]{x^2}$ и $2\sqrt[5]{y}$.

Окончательно получаем:

$$\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt[5]{x^2y}+4\sqrt[5]{y^2}=(\sqrt[5]{x^2}-2\sqrt[5]{y})^2.$$

Пример 7. Сократить дробь $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}$.

Решение. *Первый способ.* Знаменатель дроби можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}=\sqrt[4]{x^2}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt[4]{y^2}=(\sqrt[4]{x})^2-2\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}+(\sqrt[4]{y})^2=$$
$$=(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2.$$

Значит, есть резон представить числитель как «разность квадратов»:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}=(\sqrt[4]{x})^2-(\sqrt[4]{y})^2=(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}).$$

Далее, имеем:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}.$$

Второй способ. Введем новые переменные: $\sqrt[4]{x}=a$, $\sqrt[4]{y}=b$ и учтем, что при этом $\sqrt{x}=a^2$, $\sqrt{y}=b^2$. Тогда заданная дробь примет вид: $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$.

Что дала нам замена переменных? Она позволила заменить иррациональное выражение (с переменными x и y) рациональным выражением (с переменными a и b). А оперировать с рациональными выражениями намного проще, чем с иррациональными. Имеем:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}.$$

§ 43. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПОКАЗАТЕЛЕ СТЕПЕНИ

Вы умеете вычислять значение степени с любым целочисленным показателем, руководствуясь при этом следующими определениями:

1) если $n=1$, то $a^1=a$;
2) если $n=0$ и $a\neq 0$, то $a^0=1$;
3) если $n=2, 3, 4, 5, \ldots$, то $a^n=a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ (n множителей);
4) если $n=1, 2, 3, 4, \ldots$ и $a\neq 0$, то $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

Но математики на этом не остановились, они научились работать не только с целочисленными показателями. В этом параграфе мы обсудим, какой смысл придается в математике понятию степени с дробным показателем, т.е. выясним, что означают такие символы математического языка, как $2^{\frac{3}{5}}$, $3^{-0,3}$ и т.д.

Зададимся вопросом: если вводить символ $2^{\frac{3}{5}}$, то каким математическим содержанием его наполнить? Хорошо бы, рассуждали математики, чтобы сохранялись привычные свойства степеней, например, чтобы при возведении степени в степень показатели перемножались, в частности, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$\left(2^{\frac{3}{5}}\right)^5=2^3 \text{ (поскольку } \frac{3}{5}\cdot 5=3).$$

Положим $a=2^{\frac{3}{5}}$. Тогда интересующее нас равенство можно переписать в виде $a^5=2^3$, откуда получаем $a=\sqrt[5]{2^3}$. Значит, появились основания определить $2^{\frac{3}{5}}$ как $\sqrt[5]{2^3}$. Подобные соображения и позволили математикам принять следующее определение.

Определение 1. Если $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a \geqslant 0$, то под $a^{\frac{p}{q}}$ понимают $\sqrt[q]{a^p}$, т. е.

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \ a \geqslant 0.}$$

Например, $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$ и т.д.

Самое любопытное, что введенное определение оказалось настолько удачным, что при нем сохранились *все* привычные свойства степеней, которые были доказаны для натуральных показателей: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, при делении — вычитаются и т.д. Пусть, например, нам нужно выполнить умножение $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$. Поскольку $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, то задача сводится к умножению радикалов:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}.$$

Итак, $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$. Но, между прочим, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, т.е. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$.

Поскольку складывать дроби легче, чем применять свойства радикалов, на практике предпочитают заменять радикалы степенями с дробными показателями. Для иллюстрации этого положения вернемся к примеру 5а из § 42: $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}}$. Если перейти к дробным показателям, то получим:

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{11}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{11}{12}} = x^{\frac{31}{24}} = \sqrt[24]{x^{31}}.$$

Видите, насколько быстрее и проще мы получили здесь тот же результат, что и в § 42.

Пример 1. Вычислить: а) $64^{\frac{1}{6}}$; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $0^{\frac{51}{4}}$; г) $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

Решение. а) $64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

б) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$.

в) $0^{\frac{51}{4}} = \sqrt[4]{0^{51}} = \sqrt[4]{0} = 0$.

г) Это задание некорректно, поскольку нет определения степени с дробным показателем для случая *отрицательного* основания. Математики договорились возводить в дробные степени только неотрицательные числа (и это оговорено в определении). Так что запись вида $(-8)^{\frac{1}{3}}$ считается в математике лишенной смысла. ◼

Замечание. Иногда приходится слышать возражения: неверно, что запись $(-8)^{\frac{1}{3}}$ лишена смысла, ведь можно вычислить корень 3-й степени из числа -8; получится $\sqrt[3]{(-8)} = -2$. Так почему бы не считать, что $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$? Если бы математики не запретили себе возводить в дробные степени отрицательные числа, то вот с какими неприятностями пришлось бы столкнуться:

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Получилось «равенство» $-2 = 2$. Выбирая определения, математики как раз и заботятся о том, чтобы все было точно, определенно, недвусмысленно. Поэтому в определении степени с нулевым показателем a^0 появилось ограничение $a \neq 0$, а в определении степени с положительным дробным показателем $a^{\frac{p}{q}}$ появилось ограничение $a \geqslant 0$.

Разумеется, математики не ограничились понятием степени с положительным дробным показателем, они ввели и определение степени с отрицательным дробным показателем, используя известную идею:

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Но наличие дробного показателя заставляет сделать ограничение $a \geqslant 0$, а наличие знаменателя заставляет сделать ограничение $a \neq 0$; в итоге приходится накладывать ограничение $a > 0$.

Определение 2. Если $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a > 0$, то под $a^{-\frac{p}{q}}$ понимают $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$:

$$\boxed{a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}, \ a > 0.}$$

Например, $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $7^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{7^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7^5}}$ и т.д.

Итак, теперь мы знаем, что такое степень с любым рациональным показателем. Справедливы следующие свойства (мы считаем, что $a > 0$, $b > 0$, s и t — произвольные рациональные числа):

1) $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$;

2) $a^s : a^t = a^{s-t}$;

3) $(a^s)^t = a^{st}$;

4) $(ab)^s = a^s \cdot b^s$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^s = \dfrac{a^s}{b^s}$.

Частичные обоснования указанных свойств были сделаны выше; этим мы и ограничимся.

Пример 2. Упростить выражение: $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\sqrt[3]{xy} - \dfrac{1}{(\sqrt[3]{y})^{-2}}$.

Решение.

1) $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$.

2) $\sqrt[3]{xy} = (xy)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.

3) $\dfrac{1}{(\sqrt[3]{y})^{-3}} = (\sqrt[3]{y})^2 = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = y^{\frac{2}{3}}$.

4) $\left(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) - 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $x^{\frac{2}{3}}$.

Пример 3. Решить уравнения: а) $\sqrt[3]{x^2} = 1$; б) $x^{\frac{2}{3}} = 1$.

Решение. а) Возведя обе части уравнения в куб, получаем:

$$x^2 = 1,$$

$$x = \pm 1.$$

б) Это практически то же самое уравнение, что и в п. а), но с одной существенной оговоркой: поскольку переменная x возводится в дробную степень, она, по определению, должна принимать только неотрицательные значения. Значит, из найденных выше двух значений x в качестве корня уравнения мы имеем право взять лишь значение $x = 1$.

Ответ: а) ± 1; б) 1.

Пример 4. Решить уравнение: $x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 8 = 0$.

Решение. Введем новую переменную $y = x^{-\frac{1}{3}}$. Тогда $x^{-\frac{2}{3}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = y^2$. Значит, получаем квадратное уравнение относительно новой переменной y:

$$y^2 - 2y - 8 = 0.$$

Решив это уравнение, получим: $y_1 = -2$, $y_2 = 4$.

Теперь задача сводится к решению двух уравнений:

$$x^{-\frac{1}{3}} = -2; \quad x^{-\frac{1}{3}} = 4.$$

Первое уравнение не имеет корней, поскольку (напомним еще раз) область допустимых значений для переменной x в подобных случаях определяется условием $x > 0$. Решая второе уравнение, последовательно находим: $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 4$; $x^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{4}$; $\sqrt[3]{x} = \dfrac{1}{4}$; $x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$; $x = \dfrac{1}{64}$.

Ответ: $\dfrac{1}{64}$.

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня или возводится в дробную степень, называют *иррациональными*. Первое знакомство с иррациональными уравнениями состоялось у вас в курсе алгебры 8-го класса, где встречались уравнения, содержащие переменную под знаком квадратного корня. В этой главе мы рассмотрели еще несколько примеров решения иррациональных уравнений — пример 2 из § 39, пример 2 из § 40 и примеры 3 и 4 из § 43.

Основные методы решения иррациональных уравнений:

— *метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;*

— *метод введения новых переменных;*

— *функционально-графический метод.*

Если используется метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень, то возможно появление посторонних корней, значит, обязательна проверка всех найденных решений — об этом мы говорили и раньше, в курсе алгебры 8-го класса.

§ 44. СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Обычно *степенными функциями* называют функции вида $y = x^r$, где r — любое действительное число. В этом параграфе мы ограничимся случаями рационального показателя r.

Целый ряд таких функций мы с вами уже изучили. Так, если r — натуральное число ($r = n$), то получаем функцию $y = x^n$; графики и свойства таких функций вам известны из курса алгебры 7—9-го классов. На рис. 180 изображен график функции $y = x^1$ (прямая), на рис. 181 изображен график функции $y = x^2$ (парабола), на рис. 182 изображен график функции $y = x^3$ (кубическая парабола). График

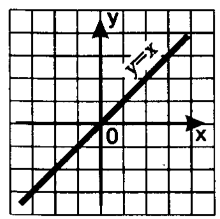


Рис. 180

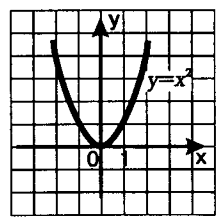


Рис. 181

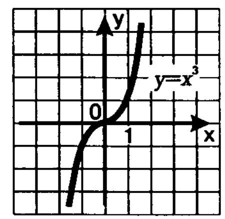


Рис. 182

степенной функции $y=x^n$ в случае четного n ($n=4, 6, 8, \ldots$) похож на параболу, а график степенной функции $y=x^n$ в случае нечетного n ($n=5, 7, 9, \ldots$) похож на кубическую параболу.

Если $r=-n$, то получаем функцию $y=x^{-n}$, т.е. $y=\frac{1}{x^n}$; о таких функциях мы говорили в курсе алгебры 9-го класса. В случае четного n график имеет вид, изображенный на рис. 183; в случае нечетного n график имеет вид, изображенный на рис. 184.

Наконец, если $r=0$, т.е. речь идет о функции $y=x^0$, то о ней и говорить неинтересно, поскольку это — функция $y=1$, где $x \neq 0$; график этой функции изображен на рис. 185.

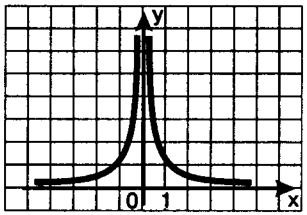


Рис. 183

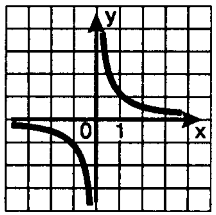


Рис. 184

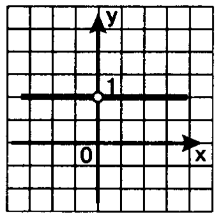


Рис. 185

Теперь познакомимся с функциями $y=x^r$, где r — положительное или отрицательное дробное число.

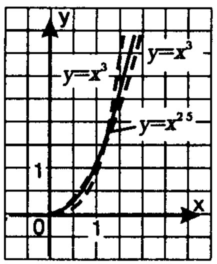


Рис. 186

Рассмотрим в качестве примера функцию $y=x^{2,5}$. Область ее определения — луч $[0, +\infty)$. Построим на этом луче графики функций $y=x^2$ (ветвь параболы) и $y=x^3$ (ветвь кубической параболы) — эти графики изображены на рис. 186. Обратите внимание: на интервале $(0, 1)$ кубическая парабола располагается ниже, а на открытом луче $(1, +\infty)$ выше параболы.

Нетрудно убедиться в том, что график функции $y=x^{2,5}$ проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$, как и графики функций $y=x^2$, $y=x^3$. При остальных значениях аргумента x график функции $y=x^{2,5}$ находится между графиками функций $y=x^2$ и $y=x^3$ (рис. 186). Почему? Смотрите:

1) Если $0<x<1$, то:

$$x^6<x^5<x^4;$$
$$\sqrt{x^6}<\sqrt{x^5}<\sqrt{x^4};$$
$$x^3<x^{2,5}<x^2.$$

2) Если $x>1$, то:

$$x^4<x^5<x^6;$$
$$\sqrt{x^4}<\sqrt{x^5}<\sqrt{x^6};$$
$$x^2<x^{2,5}<x^3.$$

Примерно так же обстоит дело для любой степенной функции вида $y=x^r$, где $r=\frac{m}{n}$ — неправильная дробь (числитель больше знаменателя). Ее графиком является кривая, похожая на ветвь параболы. Чем больше показатель r, тем «круче» устремлена эта кривая вверх.

Свойства функции $y=x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n}>1$:

1) *$D(f)=[0, +\infty)$;*
2) *не является ни четной, ни нечетной;*
3) *возрастает на $[0, +\infty)$;*
4) *не ограничена сверху, ограничена снизу;*
5) *не имеет наибольшего значения; $y_{\text{наим.}}=0$;*
6) *непрерывна;*
7) *$E(f)=[0, +\infty)$;*
8) *выпукла вниз.*

Рассмотрим степенную функцию $y=x^{\frac{m}{n}}$ для случая, когда $\frac{m}{n}$ — правильная дробь $\left(0<\frac{m}{n}<1\right)$. Все рассмотренное в § 40 в отношении функции $y=\sqrt[n]{x}$ или, что то же самое, $y=x^{\frac{1}{n}}$ (ее график изображен на рис. 169) имеет место и по отношению к любой степенной функции вида $y=x^r$, где $r=\frac{m}{n}$ — правильная дробь (числитель меньше знаменателя). График функции $y=x^r$ изображен на рис. 187.

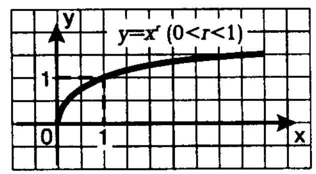


Рис. 187

Свойства функции $y=x^{\frac{m}{n}}$, где $0<\frac{m}{n}<1$:

1) *$D(f)=[0, +\infty)$;*
2) *не является ни четной, ни нечетной;*
3) *возрастает на $[0, +\infty)$;*
4) *не ограничена сверху, ограничена снизу;*

5) *не имеет наибольшего значения;* $y_{\text{наим.}} = 0$;

6) *непрерывна;*

7) $E(f) = [0, +\infty)$;

8) *выпукла вверх.*

Нам осталось рассмотреть степенную функцию вида $y = x^{-\frac{m}{n}}$. Область ее определения — открытый луч $(0, +\infty)$. Выше мы построили график степенной функции $y = x^{-n}$, где n — натуральное число. При $x > 0$ график функции $y = x^{-n}$ похож на ветвь гиперболы (рис. 184). Точно так же обстоит дело для любой степенной функции вида $y = x^{-\frac{m}{n}}$, график которой изображен на рис. 188. Отметим, что график данной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

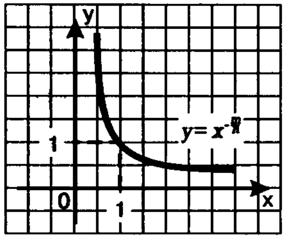


Рис. 188

Свойства функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$:

1) $D(f) = (0, +\infty)$;

2) *не является ни четной, ни нечетной;*

3) *убывает на* $(0, +\infty)$;

4) *не ограничена сверху, ограничена снизу;*

5) *не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;*

6) *непрерывна;*

7) $E(f) = (0, +\infty)$;

8) *выпукла вниз.*

Вы заметили, наверное, что мы пока ничего не сказали о свойстве дифференцируемости степенной функции. Начнем издалека.

Мы знаем, чему равна производная функции $y = x^n$, где n — натуральное число:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (1)$$

Нетрудно найти производную степенной функции $y = x^{-n}$, где n — натуральное число. Для этого надо переписать выражение x^{-n} в виде $\frac{1}{x^n}$ и воспользоваться правилом дифференцирования дроби:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)' x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Итак, для любого $x \neq 0$ справедлива формула

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$(x^m)' = mx^{m-1}, \qquad (3)$$

где m — любое целое число.

Идем дальше. Мы знаем, что $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Эту формулу можно записать следующим образом:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

И формула (3), и формула (4) являются частными случаями общего утверждения (которое мы приводим без доказательства).

Теорема. Если $x > 0$ *и* r *— любое рациональное число, то производная степенной функции* $y = x^r$ *вычисляется по формуле*

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}.}$$

Например,

$$(x^{1000})' = 1000x^{999};$$

$$(x^{-5})' = -5x^{-6};$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

(мы учли, что $\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$).

Нетрудно получить и соответствующую формулу для интегрирования степенной функции: если $r \neq -1$, то

$$\boxed{\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C.} \qquad (5)$$

В самом деле, $\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)' = \frac{(r+1)x^r}{r+1} = x^r$.

Значит, функция $y = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ является первообразной для функции $y = x^r$, а потому справедлива формула (5).

Например,

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C;$$

$$\int\frac{dx}{x^5}=\int x^{-5}dx=\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+C=\frac{x^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{4x^4}+C;$$

$$\int x^{-\frac{2}{5}}dx=\frac{x^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1}+C=\frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}}+C=\frac{5}{3}\cdot x^{\frac{3}{5}}+C.$$

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^{\frac{3}{2}}$:
а) на отрезке $[1, 9]$; б) на интервале $(0, 4)$; в) на луче $[25, +\infty)$.

Решение. Нам нет необходимости строить график функции, можно воспользоваться тем, что она возрастает и, следовательно, свое наименьшее и наибольшее значения достигает соответственно в левом и правом концах заданного промежутка, если, разумеется, концы промежутка принадлежат самому промежутку.

а) $y_{\text{наим.}}=f(1)=\sqrt{1^3}=1$; $y_{\text{наиб.}}=\sqrt{9^3}=3^3=27$.

б) Здесь нет ни наименьшего, ни наибольшего значения функции, поскольку концы промежутка — точки 0 и 4 — интервалу $(0, 4)$ не принадлежат.

в) $y_{\text{наим.}}=\sqrt{25^3}=5^3=125$; $y_{\text{наиб.}}$ не существует.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3$ на отрезке $[1, 9]$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке (см. § 36).

1) Имеем $y'=\frac{16}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot 3x^2=8\sqrt{x}-x^2$.

2) Производная существует при всех x, значит, критических точек у функции нет, а стационарные найдем из условия $y'=0$. Имеем:

$$8\sqrt{x}-x^2=0;$$
$$8\sqrt{x}=x^2;$$
$$(8\sqrt{x})^2=(x^2)^2;$$
$$64x=x^4;$$
$$x(x^3-64)=0;$$
$$x_1=0,\quad x_2=4.$$

Отрезку $[1, 9]$ принадлежит лишь точка $x=4$.

3) Составим таблицу значений функции $y=\frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3$, включив в нее концы отрезка — точки $x=1$ и $x=9$ — и найденную стационарную точку $x=4$:

x	1	4	9
y	5	$\frac{64}{3}$	−91

Таким образом, $y_{\text{наим.}}=-91$ (достигается в точке $x=9$);
$y_{\text{наиб.}}=\frac{64}{3}$ (достигается в точке $x=4$).

Пример 3. Решить уравнение $x^{\frac{2}{3}}=12-x$.

Решение. Нетрудно подобрать один корень этого уравнения: $x=8$. В самом деле,

$$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=4 \text{ и } 12-8=4,$$

значит, при $x=4$ уравнение обращается в верное числовое равенство $4=4$.

Так как степенная функция $y=x^{\frac{2}{3}}$ возрастает, а линейная функция $y=12-x$ убывает, то других корней у уравнения нет.

Ответ: $x=8$.

Пример 4. Построить график функции $y=(x-1)^{-\frac{2}{3}}-2$.

Решение. 1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(1; -2)$ — пунктирные прямые $x=1$ и $y=-2$ на рис. 189.

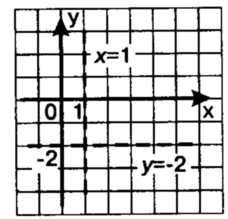


Рис. 189

2) «Привяжем» функцию $y=x^{-\frac{2}{3}}$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y=x^{-\frac{2}{3}}$: $(1; 1)$, $\left(8; \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{8}; 4\right)$, но строить их будем не в старой, а в новой системе координат. Затем по этим точкам построим кривую того вида, какой представлен на рис. 188. Это и будет требуемый график (рис. 190).

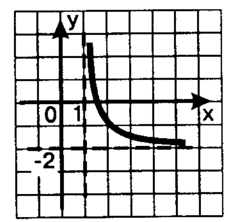


Рис. 190

Пример 5. Составить уравнение касательной к графику функции: а) $y=\frac{1}{x}$ в точке $x=1$; б) $y=x^{-\frac{2}{3}}$ в точке $x=1$.

Решение. Напомним общий вид уравнения касательной:

$$y=f(a)+f'(a)(x-a). \qquad (6)$$

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной (см. § 34).

а) $f(x)=\frac{1}{x}$:

1) $a=1$;

2) $f(a)=f(1)=\frac{1}{1}=1$;

3) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$; $f'(a)=f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$;

4) Подставим найденные три числа: $a=1$, $f(a)=1$, $f'(a)=-1$ в формулу (6). Получим:

$$y=1-(x-1),$$
$$y=2-x.$$

б) $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}$:

1) $a=1$;

2) $f(a)=f(1)=\frac{1}{1}=1$;

3) $f'(x)=-\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{5}{3}}$; $f'(1)=-\frac{2}{3}$.

4) Подставим найденные три числа: $a=1$, $f(a)=1$, $f'(a)=-\frac{2}{3}$ в формулу (6). Получим:

$$y=1-\frac{2}{3}(x-1),$$
$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}.$$

Ответ: а) $y=2-x$; б) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$.

Замечание. График функции $y=x^{-\frac{2}{3}}$ похож на ветвь гиперболы $y=\frac{1}{x}$: оба графика имеют своими асимптотами оси координат, оба графика проходят через точку (1; 1). Но их поведение в точке (1; 1) различное, у них, как мы увидели при решении примера 5, разные касательные в этой точке (см. рис. 191, 192).

Пример 6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt[3]{x}$, $y=0$, $x=8$.

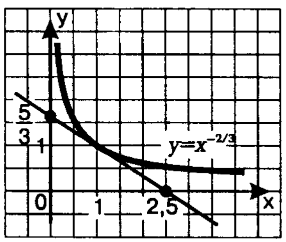


Рис. 191

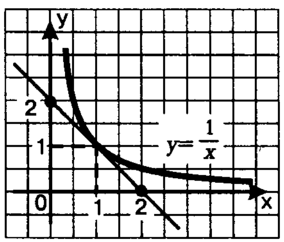


Рис. 192

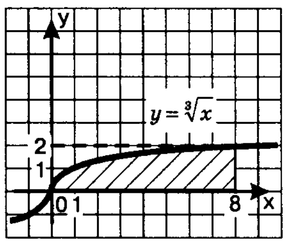


Рис. 193

Решение. Фигура, площадь которой требуется вычислить, изображена на рис. 193. Имеем (см. § 38):

$$S=\int_0^8\sqrt[3]{x}\,dx=\int_0^8 x^{\frac{1}{3}}\,dx=\left.\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right|_0^8=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^8=\frac{3}{4}\cdot\left(8^{\frac{4}{3}}-0^{\frac{4}{3}}\right)=\frac{3}{4}\cdot(16-0)=12.$$

Ответ: $S=12$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой главе вы познакомились с новыми ***терминами*** математического языка:

радикал;
иррациональное выражение;
степень с рациональным показателем;
степенная функция.

Мы ввели новые ***определения***, относящиеся к операции возведения в степень:

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p},\quad a\geqslant 0$$
$$a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}},\quad a>0.$$

Вы изучили новые ***тождества***, справедливые для любых неотрицательных значений переменных a и b:

$$(\sqrt[n]{a})^n=a;\quad (\sqrt[n]{a^n})=a;$$
$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\quad (b\neq 0);$$
$$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k};$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a};$$
$$\sqrt[np]{a^{kp}}=\sqrt[n]{a^k}.$$
$$a^s\cdot a^t=a^{s+t};$$
$$a^s:a^t=a^{s-t}\quad (a\neq 0);$$
$$(a^s)^t=a^{st};$$
$$(ab)^s=a^s\cdot b^s;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^s=\frac{a^s}{b^s}\quad (b\neq 0).$$

(t и s — рациональные числа).

Вы изучили новую ***математическую модель*** — функцию $y=x^r$ (свойства и график), узнали формулы для ее дифференцирования:

$(x^r)'=rx^{r-1}$ (r — рациональное число)

и интегрирования:

$$\int x^r\,dx=\frac{x^{r+1}}{r+1}+C(r\neq -1).$$

Глава 7
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Показательные функции нам уже встречались, правда, их областью определения до сих пор служило лишь множество натуральных чисел. Так, в § 30 мы построили график последовательности $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, т.е. график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in N$ — он состоит из точек с абсциссами 1, 2, 3, ..., лежащих на некоторой кривой, ее называют *экспонентой* (см. рис. 102). Мы отметили, что, поскольку у этой функции аргумент x содержится в показателе степени, ее называют *показательной функцией*.

А встречаются ли показательные функции как математические модели реальных ситуаций, заданные на всей числовой прямой или на каком-либо числовом промежутке? Безусловно, и очень часто. Например, из физики известен закон радиоактивного распада вещества: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; здесь m_0 — первоначальная масса вещества, m — масса вещества в рассматриваемый момент времени, t — момент времени, T — некоторое положительное число (константа), свое для каждого вида радиоактивного вещества (это число обычно называют *периодом полураспада*). Как видите, указанный закон связан с показательной функцией, причем областью определения этой функции является множество всех неотрицательных чисел (аргумент t может принимать любые неотрицательные значения). С показательными функциями связаны многие экономические и биологические законы, физические законы, относящиеся, например, к изменению температуры тела, и т.д.

Изучению показательных и в какой-то степени родственных им логарифмических функций, выражений, уравнений и неравенств посвящена глава 7.

§ 45. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Рассмотрим выражение 2^x и найдем его значения при различных рациональных значениях переменной x, например, при $x = 2$; 5; 0; -4; $\frac{4}{3}$; $-3{,}5$:

если $x = 2$, то $2^x = 2^2 = 4$;
если $x = 5$, то $2^x = 2^5 = 32$;
если $x = 0$, то $2^x = 2^0 = 1$;
если $x = -4$, то $2^x = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$;
если $x = \frac{4}{3}$, то $2^x = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$;
если $x = -3{,}5$, то $2^x = 2^{-3{,}5} = \frac{1}{2^{3{,}5}} = \frac{1}{2^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

Вообще, какое бы рациональное значение мы ни придали переменной x, всегда можно вычислить соответствующее числовое значение выражения 2^x. Таким образом, можно говорить о *показательной функции* $y = 2^x$, *определенной на множестве* Q *рациональных чисел*:

$$y = 2^x,\ x \in Q.$$

Рассмотрим некоторые свойства этой функции.

Свойство 1. $y = 2^x$, $x \in Q$ — *возрастающая функция.*

Доказательство осуществим в два этапа.

Первый этап. Докажем, что если r — положительное рациональное число, то $2^r > 1$.

Возможны два случая: 1) r — натуральное число, $r = n$; 2) r — обыкновенная несократимая дробь, $r = \frac{m}{n}$.

Если $r = n$, то очевидно, что $2^n > 1$.

Если $r = \frac{m}{n}$, то рассуждаем так:

$$2 > 1,$$
$$\sqrt[n]{2} > \sqrt[n]{1},$$
$$(\sqrt[n]{2})^m > (\sqrt[n]{1})^m.$$

В левой части последнего неравенства имеем $2^{\frac{m}{n}}$, а в правой 1. Значит, последнее неравенство можно переписать в виде

$$2^{\frac{m}{n}} > 1.$$

Итак, в любом случае выполняется неравенство $2^r > 1$, что и требовалось доказать.

Второй этап. Пусть x_1 и x_2 — рациональные числа, причем $x_1 < x_2$. Составим разность $2^{x_2} - 2^{x_1}$ и выполним некоторые ее преобразования:

$$2^{x_2} - 2^{x_1} = 2^{x_1}(2^{x_2 - x_1} - 1) = 2^{x_1}(2^r - 1)$$

(мы обозначили разность $x_2 - x_1$ буквой r).

Так как r — положительное рациональное число, то по доказанному на первом этапе $2^r > 1$, т.е. $2^r - 1 > 0$. Число 2^{x_1} также положительно, значит, положительным является и произведение $2^{x_1}(2^r - 1)$. Тем самым мы доказали, что справедливо неравенство $2^{x_2} - 2^{x_1} > 0$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $2^{x_1} < 2^{x_2}$, а это и означает, что функция $y = 2^x$ — возрастающая. ●

Свойство 2. *Функция $y = 2^x$, $x \in Q$ ограничена снизу и не ограничена сверху.*

Ограниченность функции снизу следует из неравенства $2^x > 0$, справедливого для любых значений x из области определения функции. В то же время какое бы положительное число M ни взять, всегда можно подобрать такой показатель x, что будет выполняться неравенство $2^x > M$ — что и характеризует неограниченность функции сверху. Приведем ряд примеров.

1) Пусть $M = 1000$. Положим $x = 10$; имеем: $2^{10} = 1024$, т.е. $2^{10} > M$.

2) Пусть $M = 1\,000\,000$. Положим $x = 20$; имеем $2^{20} = 1\,048\,576$, т.е. $2^{20} > M$.

3) Пусть $M = 10^{30}$. Мы видели выше, что $2^{10} > 10^3$, значит, $(2^{10})^{10} > (10^3)^{10}$, т.е. $2^{100} > 10^{30}$. Таким образом, если взять $x = 100$, то для заданного числа $M = 10^{30}$ будет выполняться неравенство $2^x > M$.

Свойство 3. *Функция $y = 2^x$, $x \in Q$ не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.*

То, что данная функция не имеет наибольшего значения, очевидно, поскольку она, как мы только что видели, не ограничена сверху. Но снизу она ограничена, почему же у нее нет наименьшего значения?

Предположим, что 2^r — наименьшее значение функции (r — некоторый рациональный показатель). Возьмем рациональное число $q < r$. Тогда в силу возрастания функции $y = 2^x$ будем иметь $2^q < 2^r$. А это значит, что 2^r не может служить наименьшим значением функции. ●

Все это хорошо, скажете вы, но почему мы рассматриваем функцию $y = 2^x$ только на множестве рациональных чисел, почему мы

не рассматриваем ее, как другие известные функции на всей числовой прямой или на каком-либо сплошном промежутке числовой прямой? Что нам мешает? Обдумаем ситуацию.

Числовая прямая содержит не только рациональные, но и иррациональные числа. Для изученных ранее функций это нас не смущало. Например, значения функции $y = x^2$ мы одинаково легко находили как при рациональных, так и при иррациональных значениях x: достаточно было заданное значение x возвести в квадрат.

А вот с функцией $y = 2^x$ дело обстоит сложнее. Если аргументу x придать рациональное значение, то в принципе 2^x вычислить можно (вернитесь еще раз к началу параграфа, где мы именно это и делали). А если аргументу x придать иррациональное значение? Как, например, вычислить $2^{\sqrt{3}}$? Этого мы пока не знаем.

Математики нашли выход из положения; вот как они рассуждали.

Известно, что $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$ Рассмотрим последовательность рациональных чисел — десятичных приближений числа $\sqrt{3}$ по недостатку:

$$1;\ 1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732;\ 1{,}7320;\ 1{,}73205;\ 1{,}732050;\ 1{,}7320508;\ \ldots .$$

Ясно, что 1,732 = 1,7320, а 1,732050 = 1,73205. Во избежание подобных повторов отбросим те члены последовательности, которые заканчиваются цифрой 0. Тогда получим возрастающую последовательность:

$$1;\ 1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732;\ 1{,}73205;\ 1{,}7320508;\ \ldots .$$

Соответственно возрастает и последовательность

$$2^1,\ 2^{1{,}7},\ 2^{1{,}73},\ 2^{1{,}732},\ 2^{1{,}73205},\ 2^{1{,}7320508},\ \ldots .$$

Все члены этой последовательности — положительные числа, меньшие, чем 2^2, т.е. эта последовательность — ограниченная. А по теореме Вейерштрасса (см. § 30), если последовательность возрастает и ограничена, то она сходится. Кроме того, из § 30 нам известно, что если последовательность сходится, то только к одному пределу. Этот единственный предел договорились считать значением числового выражения $2^{\sqrt{3}}$. И неважно, что найти даже приближенное значение числового выражения $2^{\sqrt{3}}$ очень трудно; важно, что это — конкретное число (в конце концов, мы же не боялись говорить, что, например, $x = \sqrt{17} - \sqrt{13}$ — корень рационального уравнения, а $x = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$ — корень тригонометрического уравнения, не особенно задумываясь над тем, а что же это конкретно за числа: $\sqrt{17} - \sqrt{13}$ или $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$).

Итак, мы выяснили, какой смысл вкладывают математики в символ $2^{\sqrt{3}}$. Аналогично можно определить, что такое $2^{\sqrt{5}}$, $3^{-\sqrt[4]{7}}$, $2{,}5^{\pi}$ и вообще, что такое a^{α}, где α — иррациональное число и $a>1$.

А как быть в случае, когда $0<a<1$? Как вычислить, например, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\pi}$? Самым естественным способом: считать, что $\left(\frac{2}{3}\right)^{\pi}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\pi}$, т.е. свести вычисления к случаю, когда основание степени больше 1.

Теперь мы можем говорить не только о степенях с произвольными рациональными показателями, но и *о степенях с произвольными действительными показателями*. Доказано, что степени с любыми действительными показателями обладают всеми привычными свойствами степеней: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, при делении — вычитаются, при возведении степени в степень — перемножаются и т.д. Но самое главное, что теперь мы можем говорить о функции $y=a^x$, определенной на множестве всех действительных чисел.

Вернемся к функции $y=2^x$, построим ее график. Для этого составим таблицу значений функции $y=2^x$:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки (0; 1), (1; 2), $(-1;\frac{1}{2})$, (2; 4) $(-2;\frac{1}{4})$, (3; 8), $(-3;\frac{1}{8})$ на координатной плоскости (рис. 194), они намечают некоторую линию, проведем ее (рис. 195).

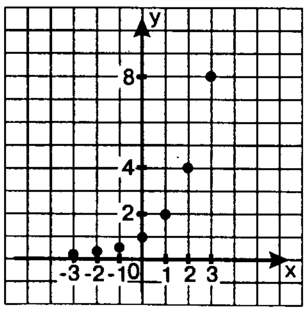


Рис. 194

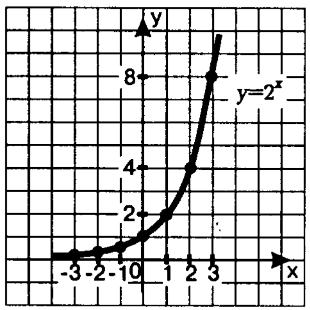


Рис. 195

Свойства функции $y=2^x$:

1) $D(f)=(-\infty,+\infty)$;

2) *не является ни четной, ни нечетной;*

3) *возрастает;*

4) *не ограничена сверху, ограничена снизу;*

5) *не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;*

6) *непрерывна;*

7) $E(f)=(0,+\infty)$;

8) *выпукла вниз.*

Строгие доказательства перечисленных свойств функции $y=2^x$ приводят в курсе высшей математики. Часть этих свойств мы в той или иной мере обсудили ранее, часть из них наглядно демонстрирует построенный график (см. рис. 195). Например, отсутствие четности или нечетности функции геометрически связано с отсутствием симметрии графика соответственно относительно оси y или относительно начала координат.

Аналогичными свойствами обладает любая функция вида $y=a^x$, где $a>1$. На рис. 196 в одной системе координат построены графики функций $y=2^x$, $y=3^x$, $y=5^x$.

Рассмотрим теперь функцию $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, составим для нее таблицу значений:

x	0	−1	1	−2	2	−3	3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки (0; 1), (−1; 2), $(1;\frac{1}{2})$, (−2; 4), $(2;\frac{1}{4})$, (−3; 8), $(3;\frac{1}{8})$ на координатной плоскости (рис. 197), они намечают некоторую линию, проведем ее (рис. 198).

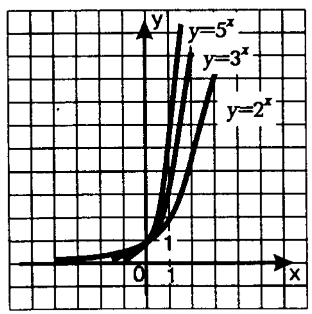


Рис. 196

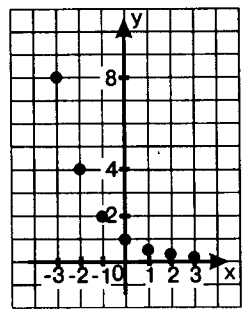


Рис. 197

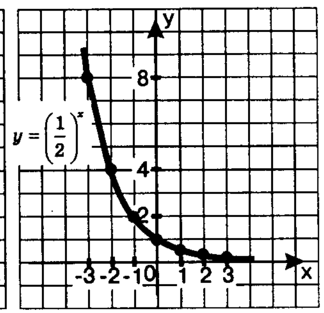


Рис. 198

Свойства функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

1) $D(f)=(-\infty,+\infty)$;
2) *не является ни четной, ни нечетной;*
3) *убывает;*
4) *не ограничена сверху, ограничена снизу;*
5) *нет ни наибольшего, ни наименьшего значений;*
6) *непрерывна;*
7) $E(f)=(0,+\infty)$;
8) *выпукла вниз.*

Аналогичными свойствами обладает любая функция вида $y=a^x$, где $0<a<1$. На рис. 200 в одной системе координат построены графики функций $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Обратите внимание: графики функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, т.е. $y=2^{-x}$, симметричны относительно оси y (рис. 201). Это — следствие общего утверждения (см. § 13): *графики функций $y=f(x)$ и*

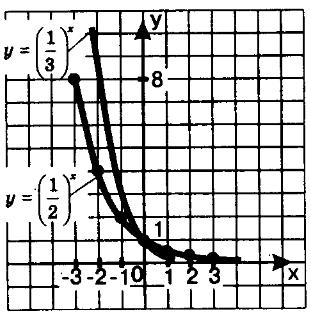


Рис. 199

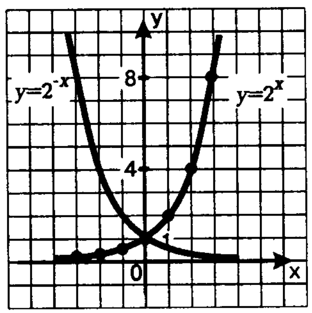


Рис. 200

$y=f(-x)$ симметричны относительно оси y. Аналогично будут симметричны относительно оси y графики функций $y=3^x$ и $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=5^x$ и $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y=\left(\frac{2}{7}\right)^x$ и $y=\left(\frac{7}{2}\right)^x$ и т.д.

Подводя итог сказанному, дадим определение показательной функции и выделим наиболее важные ее свойства.

Определение. Функцию вида $y=a^x$, где $a>0$ и $a\neq 1$, называют **показательной функцией.**

Основные свойства показательной функции $y=a^x$

№ п/п	$a>1$	$0<a<1$
1	$D(f)=(-\infty,+\infty)$	$D(f)=(-\infty,+\infty)$
2	$E(f)=(0,+\infty)$	$E(f)=(0,+\infty)$
3	Возрастает	Убывает
4	Непрерывна	Непрерывна

График функции $y=a^x$ для $a>1$ изображен на рис. 201, а для $0<a<1$ — на рис. 202.

Кривую, изображенную на рис. 201 или 202, называют *экспонентой.* На самом деле математики экспонентой обычно называют саму показательную функцию $y=a^x$. Так что термин «экспонента» используется в двух смыслах: и для наименования показательной функции, и для названия графика показательной функции. Обычно по смыслу бывает ясно, идет речь о показательной функции или о ее графике.

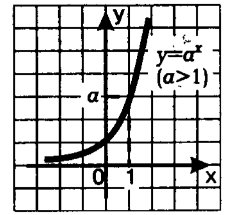


Рис. 201

Обратите внимание на геометрическую особенность графика показательной функции $y=a^x$: *ось x является горизонтальной асимптотой графика.* Правда, обычно это утверждение уточняют следующим образом.

Ось x является горизонтальной асимптотой графика функции $y=a^x$ при $x\to-\infty$, если $a>1$ (см. рис. 201), и при $x\to+\infty$, если $0<a<1$ (см. рис. 202).

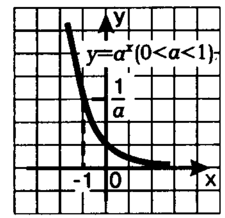


Рис. 202

Иными словами (см. § 31),

$$\text{если } a>1, \text{ то } \lim_{x\to-\infty} a^x=0;$$

$$\text{если } 0<a<1, \text{ то } \lim_{x\to+\infty} a^x=0.$$

Первое важное замечание. Школьники часто путают термины: степенная функция, показательная функция. Сравните:

$$y=x^2,\quad y=x^3,\quad y=x^{-10},\quad y=x^{\frac{1}{2}},\quad y=x^{-2{,}5}$$

— это примеры степенных функций;

$$y=2^x,\quad y=3^x,\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\quad y=(2{,}5)^x$$

— это примеры показательных функций.

Вообще, $y=x^r$, где r — конкретное число, — *степенная функция* (аргумент x содержится в основании степени);

$y=a^x$, где a — конкретное число (положительное и отличное от 1), — *показательная функция* (аргумент x содержится в показателе степени).

А такую «экзотическую» функцию, как $y=x^x$, не считают ни показательной, ни степенной (ее иногда называют показательно-степенной).

Второе важное замечание. Обычно не рассматривают показательную функцию с основанием $a=1$ или с основанием a, удовлетворяющим неравенству $a \leqslant 0$ (вы, конечно, помните, что выше, в определении показательной функции, оговорены условия: $a>0$ и $a \neq 1$). Дело в том, что если $a=1$, то для любого значения x выполняется равенство $1^x=1$. Таким образом, показательная функция $y=a^x$ при $a=1$ «вырождается» в постоянную функцию $y=1$ — это неинтересно. Если $a=0$, то $0^x=0$ для любого положительного значения x, т.е. мы получаем функцию $y=0$, определенную при $x>0$, — это тоже неинтересно. Если, наконец, $a<0$, то выражение a^x имеет смысл лишь при целых значениях x, а мы все-таки предпочитаем рассматривать функции, определенные на сплошных промежутках.

Прежде чем переходить к решению примеров, заметим, что показательная функция существенно отличается от всех функций, которые вы изучали до сих пор. Чтобы основательно изучить новый объект, надо рассмотреть его с разных сторон, в разных ситуациях, поэтому примеров будет много.

Пример 1. Решить уравнения и неравенства:

$$\text{а) } 2^x=1;\quad \text{б) } 2^x=4;\quad \text{в) } 2^x=8;\quad \text{г) } 2^x=\frac{1}{16};\quad \text{д) } 2^x>1;$$
$$\text{е) } 2^x<4.$$

Решение. а) Построив в одной системе координат графики функций $y=2^x$ и $y=1$, замечаем (рис. 203), что они имеют одну общую точку (0; 1). Значит, уравнение $2^x=1$ имеет единственный корень $x=0$.

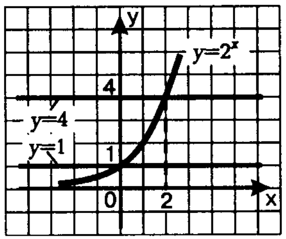


Рис. 203

Итак, из уравнения $2^x=2^0$ мы получили $x=0$.

б) Построив в одной системе координат графики функций $y=2^x$ и $y=4$, замечаем (рис. 203), что они имеют одну общую точку (2; 4). Значит, уравнение $2^x=4$ имеет единственный корень $x=2$.

Итак, из уравнения $2^x=2^2$ мы получили $x=2$.

в) и г) Исходя из тех же соображений, делаем вывод, что уравнение $2^x=8$ имеет единственный корень, причем для его отыскания графики соответствующих функций можно и не строить; ясно, что $x=3$, поскольку $2^3=8$. Аналогично находим единственный корень уравнения $2^x=\frac{1}{16}$; здесь $x=-4$, поскольку $2^{-4}=\frac{1}{16}$.

Итак, из уравнения $2^x=2^3$ мы получили $x=3$, а из уравнения $2^x=2^{-4}$ мы получили $x=-4$.

д) График функции $y=2^x$ расположен выше графика функции $y=1$ при $x>0$ — это хорошо читается по рис. 203. Значит, решением неравенства $2^x>1$ служит промежуток $(0, +\infty)$.

е) График функции $y=2^x$ расположен ниже графика функции $y=4$ при $x<2$ — это хорошо читается по рис. 203. Значит, решением неравенства $2^x<4$ служит промежуток $(-\infty, 2)$. ◀

Вы заметили, наверное, что в основе всех выводов, сделанных при решении примера 1, лежало свойство монотонности (возрастания) функции $y=2^x$. Аналогичные рассуждения позволяют убедиться в справедливости следующих двух теорем.

Теорема 1. ***Если $a>1$, то равенство $a^t=a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t=s$.***

Теорема 2. ***Если $a>1$, то неравенство $a^x>1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x>0$*** (рис. 204), ***неравенство $a^x<1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x<0$.***

Пример 2. Решить уравнения и неравенства:

$$\text{а) } \left(\frac{1}{3}\right)^x=1;\quad \text{б) } \left(\frac{1}{3}\right)^x=3;\quad \text{в) } \left(\frac{1}{3}\right)^x=9;\quad \text{г) } \left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{9};$$
$$\text{д) } \left(\frac{1}{3}\right)^x>1;\quad \text{е) } \left(\frac{1}{3}\right)^x<3.$$

Решение. а) Построив в одной системе координат графики функций $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=1$, замечаем (рис. 205), что они имеют одну общую точку (0; 1).

Значит, уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x=1$ имеет единственный корень $x=0$.

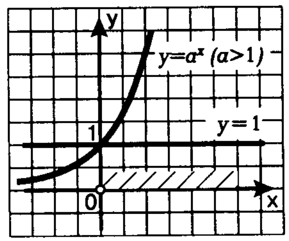


Рис. 204

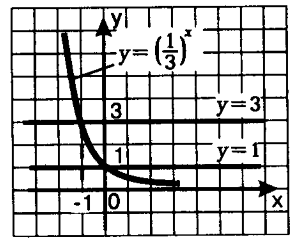


Рис. 205

Итак, из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^0$ мы получили $x=0$.

б) Построив в одной системе координат графики функций $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=3$, замечаем (см. рис. 205), что они имеют одну общую точку (–1; 3). Значит, уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3$ имеет единственный корень $x=-1$.

Итак, из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ мы получили $x=-1$.

в) и г) Исходя из тех же соображений, делаем вывод, что уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$ имеет единственный корень, причем для его отыскания графики соответствующих функций можно и не строить; ясно, что $x = -2$, поскольку $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$. Аналогично находим единственный корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$; здесь $x = 2$, поскольку $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Итак, из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ мы получили $x = -2$, а из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ мы получили $x = 2$.

д) График функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ расположен выше графика функции $y = 1$ при $x < 0$ — это хорошо читается по рис. 205. Значит, решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$ служит промежуток $(-\infty, 0)$.

е) График функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ расположен ниже графика функции $y = 3$ при $x > -1$ — это хорошо читается по рис. 205. Значит, решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$ служит промежуток $(-1, +\infty)$. ◀■

В основе всех выводов, сделанных при решении примера 2, лежало свойство монотонности (убывания) функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Аналогичные рассуждения позволяют убедиться в справедливости следующих двух теорем.

Теорема 3. ***Если*** $0 < a < 1$, ***то равенство*** $a^t = a^s$ ***справедливо тогда и только тогда, когда*** $t = s$.

Теорема 4. ***Если*** $0 < a < 1$, ***то неравенство*** $a^x > 1$ ***справедливо тогда и только тогда, когда*** $x < 0$ (см. рис. 206); ***неравенство*** $a^x < 1$ ***справедливо тогда и только тогда, когда*** $x > 0$.

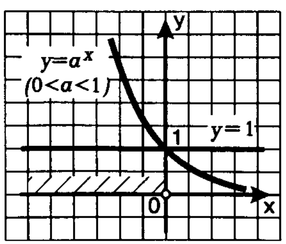


Рис. 206

Пример 3. Построить график функции $y = 3 \cdot 3^x + 2$ и найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-2, 2]$.

Решение. Можно действовать так: построить график функции $y = 3^x$, затем осуществить его растяжение от оси x с коэффициентом 3, а затем полученный график поднять вверх на 2 единицы масштаба. Но удобнее воспользоваться тем, что $3 \cdot 3^x = 3^{x+1}$, и, следовательно, строить график функции $y = 3^{x+1} + 2$.

Перейдем, как неоднократно уже делали в таких случаях, к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; 2)$ — пунктирные прямые $x = -1$ и $y = 2$ на рис. 207. «Привяжем» функцию $y = 3^x$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y = 3^x$: $(0; 1)$, $(1; 3)$, $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$, но строить их будем не в старой, а в новой системе координат (эти точки отмечены на рис. 207). Затем по точкам построим экспоненту — это и будет требуемый график (см. рис. 207).

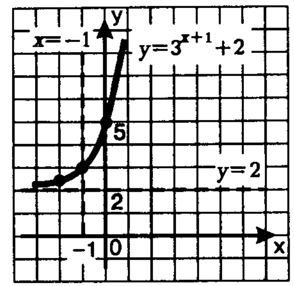


Рис. 207

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения заданной функции на отрезке $[-2, 2]$, воспользуемся тем, что заданная функция возрастает, а потому свои наименьшее и наибольшее значения она принимает соответственно в левом и правом концах отрезка.

Итак:

$$y_{\text{наим.}} = f(-2) = 3^{-2+1} + 2 = 2\frac{1}{3};$$

$$y_{\text{наиб.}} = f(2) = 3^{2+1} + 2 = 29.$$ ◀■

Пример 4. Решить уравнение и неравенства:

а) $5^x = 6 - x$; б) $5^x \geqslant 6 - x$; в) $5^x < 6 - x$.

Решение. а) Построим в одной системе координат графики функций $y = 5^x$ и $y = 6 - x$ (рис. 208). Они пересекаются в одной точке; судя по чертежу, это — точка $(1; 5)$. Проверка показывает, что на самом деле точка $(1; 5)$ удовлетворяет и уравнению $y = 5^x$, и уравнению $y = 6 - x$. Абсцисса этой точки служит единственным корнем заданного уравнения.

Итак, уравнение $5^x = 6 - x$ имеет единственный корень $x = 1$.

б) и в) Экспонента $y = 5^x$ лежит выше прямой $y = 6 - x$, если $x > 1$, — это хорошо видно на рис. 208. Значит, решение неравенства $5^x \geqslant 6 - x$ можно записать так: $x \geqslant 1$. А решение неравенства $5^x < 6 - x$ можно записать так: $x < 1$.

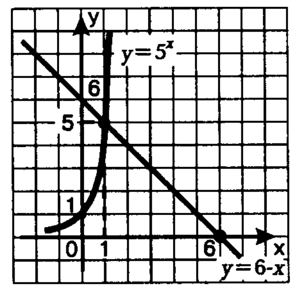


Рис. 208

Ответ: а) $x = 1$; б) $x \geqslant 1$; в) $x < 1$.

Пример 5. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 10^x$. Доказать, что $f(\sin^2 x) \cdot f(\cos^2 x) = 10$.

Решение. По условию $f(x) = 10^x$. Значит, $f(\sin^2 x) = 10^{\sin^2 x}$, а $f(\cos^2 x) = 10^{\cos^2 x}$. Имеем:

$$f(\sin^2 x) \cdot f(\cos^2 x) = 10^{\sin^2 x} \cdot 10^{\cos^2 x} = 10^{\sin^2 x + \cos^2 x}.$$

Но $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Значит, $10^{\sin^2 x + \cos^2 x} = 10^1 = 10$.

Итак, $f(\sin^2 x) \cdot f(\cos^2 x) = 10$, что и требовалось доказать. ◀■

Пример 6. Решить уравнение: $\left(\frac{2}{7}\right)^x+\frac{12}{7}=2^x$.

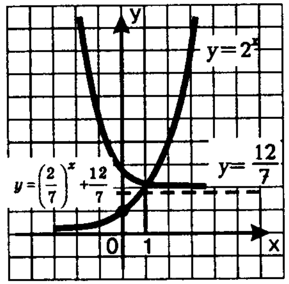


Рис. 209

Решение. Положим $f(x)=\left(\frac{2}{7}\right)^x+12$, $g(x)=2^x$. Заметим, что функция $y=f(x)$ убывает, а функция $y=g(x)$ возрастает. Воспользуемся известным фактом: если функция $y=f(x)$ убывает, а функция $y=g(x)$ возрастает, и если уравнение $f(x)=g(x)$ имеет корень, то только один. Нетрудно догадаться, что заданное уравнение имеет корень $x=1$: подставив значение $x=1$ в заданное уравнение, получим $\left(\frac{2}{7}\right)^1+\frac{12}{7}=2^1$ — верное числовое равенство.

Так как функция $y=\left(\frac{2}{7}\right)^x+\frac{12}{7}$ убывает, а функция $y=2^x$ возрастает, то корень у заданного уравнения только один, и этим корнем является найденное выше значение $x=1$ (рис. 209).

Ответ: $x=1$.

§ 46. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Показательными уравнениями называют уравнения вида

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}, \qquad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Опираясь на полученные в предыдущем параграфе теоремы 1 и 3, согласно которым равенство $a^t=a^s$, где $a>0$, $a\neq1$, справедливо тогда и только тогда, когда $t=s$, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема. ***Показательное уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (где $a>0$, $a\neq1$) равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.***

Пример 1. Решить уравнения:

а) $2^{2x-4}=64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $5^{x^2-3x}=5^{3x-8}$.

Решение. а) Представив 64 как 2^6, перепишем заданное уравнение в виде $2^{2x-4}=2^6$. Это уравнение равносильно уравнению $2x-4=6$, откуда находим: $x=5$.

б) Представив $\frac{1}{\sqrt{3}}$ как $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, перепишем заданное уравнение в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$. Это уравнение равносильно уравнению $2x-3,5=0,5$, откуда находим: $x=2$.

в) Заданное уравнение равносильно уравнению $x^2-3x=3x-8$. Далее имеем:

$$x^2-6x+8=0;$$
$$x_1=2,\quad x_2=4.$$

Пример 2. Решить уравнение: $\frac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}}=5\cdot0,04^{x-2}$.

Решение. Здесь есть возможность и левую, и правую части уравнения представить в виде степени с основанием 5. В самом деле:

1) $(0,2)^{x-0,5}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5}=(5^{-1})^{x-0,5}=5^{0,5-x}$;

2) $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}=5^{0,5}$;

3) $5^{0,5-x}:5^{0,5}=5^{0,5-x-0,5}=5^{-x}$;

4) $5\cdot0,04^{x-2}=5\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{x-2}=5\cdot(5^{-2})^{x-2}=5\cdot5^{-2x+4}=5^{1-2x+4}=5^{5-2x}$.

Таким образом, заданное уравнение мы преобразовали к виду:

$$5^{-x}=5^{5-2x}.$$

Далее получаем: $-x=5-2x$ и, следовательно, $x=5$.

Пример 3. Решить уравнение: $4^x+2^{x+1}-24=0$.

Решение. Заметив, что $4^x=(2^2)^x=2^{2x}=(2^x)^2$, а $2^{x+1}=2\cdot2^x$, перепишем заданное уравнение в виде:

$$(2^x)^2+2\cdot2^x-24=0.$$

Есть смысл ввести новую переменную $y=2^x$; тогда уравнение примет вид: $y^2+2y-24=0$. Решив квадратное уравнение относительно y, находим $y_1=4$, $y_2=-6$. Но $y=2^x$, значит, нам остается решить два уравнения:

$$2^x=4;\quad 2^x=-6.$$

Из первого уравнения находим $x=2$, а второе уравнение не имеет корней, поскольку при любых значениях x выполняется неравенство $2^x>0$.

Ответ: $x=2$.

Подведем некоторые итоги. Можно выделить *три основных метода решения показательных уравнений*:

1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применяли этот метод в § 45.

2) Метод уравнивания показателей. Он основан на теореме о том, что уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$, где a — положительное число, отличное от 1. Мы применили этот метод в примерах 1 и 2.

3) Метод введения новой переменной. Мы применили этот метод в примере 3.

Рассмотрим более сложный пример, в котором для решения показательного уравнения используется метод введения новой переменной, и пример решения системы показательных уравнений.

Пример 4. Решить уравнение:

$$5^{2x+1}-13\cdot 15^x+54\cdot 9^{x-1}=0.$$

Решение. Воспользуемся тем, что

$$5^{2x+1}=5\cdot 5^{2x},$$
$$15^x=5^x\cdot 3^x,$$
$$54\cdot 9^{x-1}=54\cdot\frac{9^x}{9}=6\cdot 9^x=6\cdot 3^{2x}.$$

Это позволяет переписать заданное уравнение в более удобном виде:

$$5\cdot 5^{2x}-13\cdot 5^x\cdot 3^x+6\cdot 3^{2x}=0.$$

Разделив обе части уравнения почленно на 3^{2x}, получим равносильное ему уравнение:

$$5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x}+6=0. \qquad (2)$$

Мы воспользовались тем, что $\frac{5^{2x}}{3^{2x}}=\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}$, и тем, что $\frac{5^x\cdot 3^x}{3^{2x}}=\frac{5^x}{3^x}=\left(\frac{5}{3}\right)^{x}$.

Теперь, как видите, «проявилась» новая переменная: $y=\left(\frac{5}{3}\right)^{x}$, относительно которой уравнение (2) имеет вид квадратного уравнения:

$$5y^2-13y+6=0.$$

Корнями этого уравнения служат числа $y_1=\frac{3}{5}$, $y_2=2$. Значит, нам остается решить два уравнения:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=\frac{3}{5};\quad \left(\frac{5}{3}\right)^{x}=2.$$

С первым из этих уравнений проблем нет:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-1},$$
$$x=-1.$$

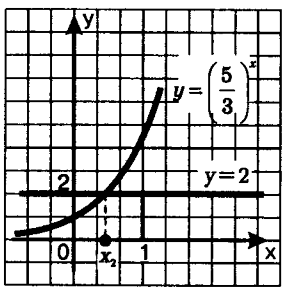


Рис. 210

Со вторым уравнением у нас возникает проблема: как представить число 2 в виде некоторой степени числа $\frac{5}{3}$, мы пока не знаем. Между тем второе уравнение тоже имеет единственный корень — это хорошо видно из графической иллюстрации, представленной на рис. 210. Придется нам в дальнейшем еще раз вернуться к этому уравнению.

Ответ: $x_1=-1$, x_2 — корень уравнения $\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=2$.

Пример 5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}2\cdot(\sqrt{2})^{x+y}=16^{3x-y},\\ 9^{x+y}-3^{x+y}=72.\end{cases}$$

Решение. 1) Преобразуем первое уравнение системы к более простому виду:

$$2\cdot(\sqrt{2})^{x+y}=16^{3x-y},$$
$$2\cdot 2^{\frac{1}{2}(x+y)}=2^{4(3x-y)},$$
$$2^{1+\frac{(x+y)}{2}}=2^{12x-4y},$$
$$1+\frac{x+y}{2}=12x-4y,$$
$$2+x+y=24x-8y,$$
$$23x-9y=2.$$

2) Преобразуем второе уравнение системы к более простому виду. Введем новую переменную $z=3^{x+y}$. Тогда второе уравнение системы примет вид: $z^2-z=72$, откуда находим: $z_1=9$, $z_2=-8$.

Из уравнения $3^{x+y}=9$ находим $x+y=2$; уравнение $3^{x+y}=-8$ не имеет решений.

Итак, второе уравнение системы нам удалось преобразовать к виду: $x+y=2$.

3) Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases}23x-9y=2,\\ x+y=2.\end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на 9 и сложим полученное уравнение с первым уравнением системы:

$$(23x-9y)+(9x+9y)=2+18,$$
$$32x=20,\qquad x=\frac{5}{8}.$$

Из уравнения $x+y=2$ находим: $\frac{5}{8}+y=2$, $y=\frac{11}{8}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{8};\ \frac{11}{8}\right)$.

§ 47. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Показательными неравенствами называют неравенства вида

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}, \qquad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Для решения неравенства (1) проведем следующие рассуждения. Разделив обе части неравенства (1) на выражение $a^{g(x)}$, получим неравенство $\frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}}>1$, равносильное неравенству (1) (поскольку обе части неравенства (1) мы разделили на выражение, положительное при любых значениях x). Далее имеем:

$$a^{f(x)-g(x)}>1,\ \text{т.е. } a^t>1,\ \text{где } t=f(x)-g(x).$$

Теперь следует рассмотреть два случая: $a>1$ и $0<a<1$.

Если $a>1$, то неравенство $a^t>1$ имеет место тогда и только тогда, когда $t>0$ (см. теорему 2 из § 45). Значит, $f(x)-g(x)>0$, т.е. $f(x)>g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^t > 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $t < 0$ (см. теорему 4 из § 45). Значит, $f(x) - g(x) < 0$, т.е. $f(x) < g(x)$.

Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема. ***Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;***

показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Пример 1. Решить неравенства:

$$\text{а) } 2^{2x-4} > 64; \quad \text{б) } \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{в) } 0{,}5^{x^2-3x} \leqslant 0{,}5^{3x-8}.$$

Решение. а) Имеем $2^{2x-4} > 2^6$. Это неравенство равносильно неравенству того же смысла $2x - 4 > 6$, откуда находим $x > 5$.

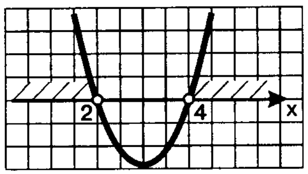


Рис. 211

б) Воспользовавшись тем, что $\frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, перепишем заданное неравенство в виде: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$. Здесь основанием служит число $\frac{1}{3} < 1$. Значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству противоположного смысла: $2x - 3{,}5 > 0{,}5$, откуда находим: $x > 2$.

в) Заданное неравенство равносильно неравенству противоположного смысла: $x^2 - 3x \geqslant 3x - 8$, т.е. $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$.

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 6x + 8$: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Построив (схематически) параболу $y = x^2 - 6x + 8$ (рис. 211), находим: $x \leqslant 2$, $x \geqslant 4$.

Пример 2. Решить неравенство: $\frac{4 \cdot 3^x - 10}{3^{x+1} - 1} < 1$.

Решение. Заметим, что $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$, и введем новую переменную $y = 3^x$. Получим: $\frac{4y - 10}{3y - 1} < 1$.

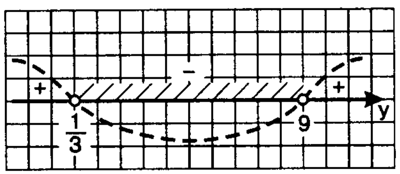


Рис. 212

Далее последовательно получаем:

$$\frac{4y-10}{3y-1} - 1 < 0; \quad \frac{y-9}{3y-1} < 0; \quad \frac{y-9}{3\left(y - \frac{1}{3}\right)} < 0.$$

Применив метод интервалов (рис. 212), находим: $\frac{1}{3} < y < 9$.

Возвращаясь к переменной x, получаем двойное неравенство

$$\frac{1}{3} < 3^x < 9, \text{ т.е. } 3^{-1} < 3^x < 3^2, \text{ откуда находим } -1 < x < 2.$$

Ответ: $-1 < x < 2$.

§ 48. ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА

Рассмотрим уравнение $2^x = 4$, решим его графически. Для этого в одной системе координат построим график функции $y = 2^x$ и прямую $y = 4$ (рис. 213). Они пересекаются в точке $A(2; 4)$, значит, $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Рассуждая точно так же, находим корень уравнения $2^x = 8$ (см. рис. 213): $x = 3$.

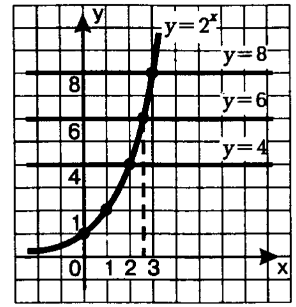


Рис. 213

А теперь попробуем решить уравнение $2^x = 6$; геометрическая иллюстрация представлена на рис. 213. Ясно, что уравнение имеет один корень, но в отличие от предыдущих случаев, где корни уравнений были найдены без труда (причем их очень легко было найти и не пользуясь графиками), с уравнением $2^x = 6$ у нас возникают трудности: по чертежу мы не можем определить значение корня, можем только установить, что этот корень заключен в промежутке от 2 до 3.

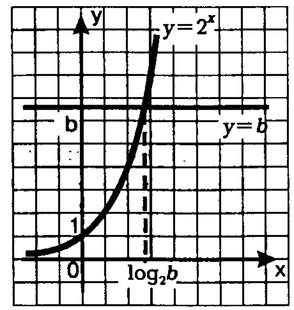


Рис. 214

С подобной ситуацией мы уже встречались в § 39, когда, решая уравнение $x^4 = 5$, поняли, что надо вводить новый символ математического языка $\sqrt[4]{5}$. Обдумывая ситуацию с показательным уравнением $2^x = 6$, математики ввели в рассмотрение новый символ $\log_2$, который назвали *логарифмом по основанию 2* и с помощью этого символа корень уравнения $2^x = 6$ записали так: $x = \log_2 6$ (читается: «логарифм числа 6 по основанию 2»). Теперь для любого уравнения вида $2^x = b$, где $b > 0$, можно найти корень — им будет число $\log_2 b$ (рис. 214).

Мы говорили об уравнении $2^x = 6$. С равным успехом мы могли говорить и об уравнении $3^x = 5$, и об уравнении $10^x = 0{,}3$, и об уравнении $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4$, и вообще о любом уравнении вида $a^x = b$, где a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$. Единственный корень уравнения $a^x = b$ математики договорились записывать так:

$$x = \log_a b$$

(читается: «логарифм числа b по основанию a»).

Кстати, вернемся к уравнению $\left(\frac{5}{3}\right)^x = 2$, которое встретилось нам в примере 4 § 46 и которое мы не смогли решить. Теперь ответ ясен: $x = \log_{\frac{5}{3}} 2$.

Определение. Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Например,

$$\log_2 8=3, \text{ так как } 2^3=8;$$

$$\log_3\left(\frac{1}{27}\right)=-3, \text{ так как } 3^{-3}=\frac{1}{27};$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 25=-2, \text{ так как } \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=25;$$

$$\log_4 2=\frac{1}{2}, \text{ так как } 4^{\frac{1}{2}}=2.$$

Особо выделим три формулы (попробуйте их обосновать, это очень просто):

$$\boxed{\log_a a=1,} \qquad \boxed{\log_a 1=0,} \qquad \boxed{\log_a a^c=c.}$$

Например,

$$\log_2 2=1,\ \log_3 3^4=4,\ \log_5 5^{-\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3},\ \log_8 1=0.$$

Для числа $\log_2 6$, которое встретилось нам в начале параграфа, точного рационального значения мы указать не можем, поскольку $\log_2 6$ — *иррациональное число*. Доказывается это довольно красиво.

Предположим, что $\log_2 6$ — рациональное число, т.е. что $\log_2 6=\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Тогда $2^{\frac{m}{n}}=6$, $\left(2^{\frac{m}{n}}\right)^n=6^n$, $2^m=6^n$. Последнее равенство невозможно, поскольку его правая часть есть целое число, которое делится без остатка на 3, а левая часть делиться без остатка на 3 никак не может.

Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно и, следовательно, $\log_2 6$ — иррациональное число. ●

Мы дали определение логарифма на обычном языке, а теперь приведем то же определение на языке символов:

$$\boxed{a^{\log_a b}=b.}$$

В самом деле, что надо подставить вместо * в равенство $a^*=b$? Какое число должно находиться в показателе степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b? Ответ следует из данного выше определения: этим показателем является $\log_a b$. Значит, вместо * надо подставить число $\log_a b$, что мы и сделали.

Например, $2^{\log_2 3}=3$, $\quad 5^{\log_5 10}=10$, $\quad 10^{\log_{10} 0,4}=0,4$.

Подчеркнем, что $\log_a b=c$ и $a^c=b$ — одна и та же математическая модель (одна и та же зависимость между числами a, b и c), но только вторая описана на более простом языке (использует более простые символы), чем первая.

Операцию нахождения логарифма числа обычно называют *логарифмированием*. Эта операция является обратной по отношению к возведению в степень с соответствующим основанием. Сравните:

Возведение в степень	Логарифмирование
$5^2=25$	$\log_5 25=2$
$10^3=1000$	$\log_{10} 1000=3$
$0,3^4=0,0081$	$\log_{0,3} 0,0081=4$

Вычисление значения логарифма сводится, как правило, к решению некоторого показательного уравнения.

Пример. Вычислить:

$$\text{а) } \log_4 128; \quad \text{б) } \log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}; \quad \text{в) } \log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2}.$$

Решение. а) Положим: $\log_4 128=x$. Тогда по определению логарифма $4^x=128$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$2^{2x}=2^7,\ 2x=7,\ x=3,5.$$

б) Положим: $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}=x$. Тогда по определению логарифма $\left(\sqrt{3}\right)^x=\sqrt[3]{9}$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$3^{\frac{x}{2}}=3^{\frac{2}{3}},\ \frac{x}{2}=\frac{2}{3},\ x=\frac{4}{3}.$$

в) Положим: $\log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2}=x$. Тогда по определению логарифма $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4\sqrt{2}$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$2^{-x}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}},\ -x=2+\frac{1}{2},\ x=-2,5.$$ ◼

Логарифм по основанию 10 обычно называют *десятичным логарифмом*. Так, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 3,4$ — десятичные логарифмы. Вместо символа $\log_{10}$ принято использовать символ lg; так, вместо $\log_{10} 5$ пишут lg 5, а вместо $\log_{10} 3,4$ пишут lg 3,4. В недалеком прошлом десятичным логарифмам отдавали предпочтение; опираясь на особенности принятой десятичной системы счисления, составляли весьма подробные таблицы десятичных логарифмов, наносили на шкалы специальных логарифмических линеек. В эпоху всеобщей компьютеризации десятичные логарифмы утратили свою ведущую роль, более важны стали логарифмы по основанию 2, но особенно широко используются в математике и технике логарифмы, основанием которых служит особое число e (такое же знаменитое, как число π); с этим числом мы познакомимся позднее (в § 54).

§ 49. ФУНКЦИЯ $y=\log_a x$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

В § 48 мы ввели понятие логарифма положительного числа по положительному и отличному от 1 основанию a. Для любого положительного числа можно найти логарифм по заданному основанию. Но тогда следует подумать и о функции вида $y=\log_a x$, $x\in(0,+\infty)$, о ее графике и свойствах. Этим и займемся в настоящем параграфе.

Рассмотрим одновременно две функции: показательную $y=a^x$ и логарифмическую $y=\log_a x$. Пусть точка $(b;\ c)$ принадлежит графику функции $y=a^x$; это значит, что справедливо равенство $c=a^b$. Перепишем это равенство «на языке логарифмов»: $b=\log_a c$. Последнее равенство означает, что точка $(c;\ b)$ принадлежит графику функции $y=\log_a x$.

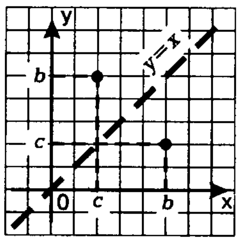


Рис. 215

Итак, *если точка $(b;\ c)$ принадлежит графику функции $y=a^x$, то точка $(c;\ b)$ принадлежит графику функции $y=\log_a x$.*

В § 40 мы доказали теорему о том, что точки координатной плоскости $x0y$ с координатами $(b;\ c)$ и $(c;\ b)$ симметричны относительно прямой $y=x$ (рис. 215). Таким образом, справедливо следующее утверждение:

График функции $y=\log_a x$ симметричен графику функции $y=a^x$ относительно прямой $y=x$.

На рис. 216 схематически изображены графики функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ в случае, когда $a>1$; на рис. 217 схематически изображены графики функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ в случае, когда $0<a<1$.

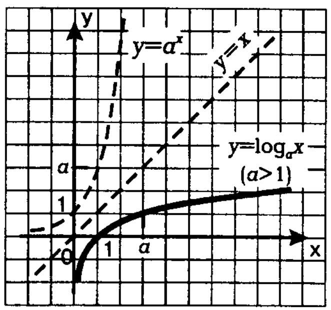


Рис. 216

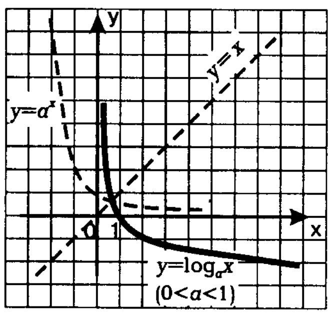


Рис. 217

График функции $y=\log_a x$ называют *логарифмической кривой*, хотя на самом деле нового названия можно было не придумывать. Ведь это та же экспонента, что служит графиком показательной функции, только по-другому расположенная в координатной плоскости.

Если значение основания a указано, то график логарифмической функции можно построить по точкам. Пусть, например, нужно построить график функции $y=\log_2 x$. Составляя таблицу контрольных точек, будем руководствоваться соотношением $\log_2 2^r=r$ (см. § 48). Поэтому в таблицу в качестве значений аргумента x мы включим числа, являющиеся степенями числа 2.

Имеем:
$$\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2 2^{-2}=-2,$$
$$\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2 2^{-1}=-1,$$
$$\log_2 1=\log_2 2^0=0,$$
$$\log_2 2=\log_2 2^1=1,$$
$$\log_2 4=\log_2 2^2=2,$$
$$\log_2 8=\log_2 2^3=3.$$

Сведем полученные результаты в таблицу:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

Построив на координатной плоскости точки $\left(\frac{1}{4};-2\right)$, $\left(\frac{1}{2};-1\right)$, $(1;\ 0)$, $(2;\ 1)$, $(4;\ 2)$, $(8;\ 3)$, проводим через них логарифмическую кривую (рис. 218).

Свойства функции $y=\log_a x$, $a>1$

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рис. 216.

1) $D(f)=(0,+\infty)$;

2) *не является ни четной, ни нечетной;*

3) *возрастает на* $(0,+\infty)$;

4) *не ограничена сверху, не ограничена снизу;*

5) *не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;*

6) *непрерывна;*

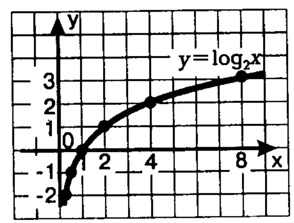


Рис. 218

7) $E(f)=(-\infty, +\infty)$;

8) *выпукла вверх.*

Сравните график функции $y=\log_a x$, изображенный на рис. 216, и график функции $y=x^r$ $(0<r<1)$, изображенный на рис. 187 (в § 44). Не правда ли, они похожи (при $x>a$)? На самом деле между ними есть принципиальная разница: график функции $y=x^r$ «набирает обороты» быстрее. Иными словами, для достаточно больших значений x ордината графика степенной функции $y=x^r$ (при $0<r<1$ и уж тем более при $r \geqslant 1$) значительно больше соответствующей ординаты графика логарифмической функции с любым основанием, большим, чем 1. В курсе математического анализа доказано, что при $a>1$ и $r>0$ *выполняется равенство*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^r}=0.$$

Свойства функции $y=\log_a x$, $0<a<1$

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рис. 217.

1) $D(f)=(0, +\infty)$;

2) *не является ни четной, ни нечетной;*

3) *убывает на* $(0, +\infty)$;

4) *не ограничена сверху, не ограничена снизу;*

5) *нет ни наибольшего, ни наименьшего значений;*

6) *непрерывна;*

7) $E(f)=(-\infty, +\infty)$;

8) *выпукла вниз.*

Отметим, что ось y является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции и в случае, когда $a>1$, и в случае, когда $0<a<1$.

Прежде чем переходить к решению примеров, заметим, что логарифмическая функция, как и показательная, существенно отличается от всех функций, которые вы изучали в курсе алгебры 7—9-го классов. Поэтому есть смысл повторить сказанное в § 45: чтобы основательно изучить новый объект, надо рассмотреть его с разных сторон, в разных ситуациях, поэтому примеров будет много.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функций на заданном промежутке:

а) $y=\lg x$, $x\in[1, 1000]$; б) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$, $x\in[\frac{1}{9}, 27]$.

Решение. а) Функция $y=\lg x$ — непрерывная и возрастающая, поскольку основание этой логарифмической функции больше 1 (вы, конечно, помните, что $\lg x=\log_{10} x$). Следовательно, своих наименьшего и наибольшего значений функция достигает на концах заданного отрезка $[1, 1000]$.

Имеем: $y_{\text{наим.}}=\lg 1=0$;

$y_{\text{наиб.}}=\lg 1000=\log_{10} 10^3=3$.

б) Функция $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ — непрерывная и убывающая, поскольку основание этой логарифмической функции, т.е. число $\frac{1}{3}$, меньше 1. Следовательно, своих наибольшего и наименьшего значений функция достигает на концах заданного отрезка $\left[\frac{1}{9}, 27\right]$.

Имеем: $y_{\text{наиб.}}=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2=2$;

$y_{\text{наим.}}=\lg_{\frac{1}{3}} 27=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=-3$. ◼

Пример 2. Решить уравнение и неравенства:

а) $\log_5 x=0$; б) $\log_5 x>0$; в) $\log_5 x<0$.

Решение. График функции $y=\log_5 x$ схематически изображен на рис. 216. Заданные уравнение и неравенства нетрудно решить, используя эту геометрическую модель.

а) Уравнение $\log_5 x=0$ имеет один корень $x=1$, поскольку график функции $y=\log_5 x$ пересекает ось x в единственной точке (1; 0).

б) График функции $y=\log_5 x$ расположен выше оси x при $x>1$. Значит, решение неравенства $\log_5 x>0$ имеет вид $x>1$.

в) График функции $y=\log_5 x$ расположен ниже оси x при $0<x<1$. Значит, решение неравенства $\log_5 x<0$ имеет вид $0<x<1$.

Ответ: а) $x=1$; б) $x>1$; в) $0<x<1$.

Пример 3. Решить уравнение и неравенства:

а) $\log_{\frac{2}{5}} x=0$; б) $\log_{\frac{2}{5}} x>0$; в) $\log_{\frac{2}{5}} x<0$.

Решение. График функции $y=\log_{\frac{2}{5}} x$ схематически изображен на рис. 217. Заданные уравнение и неравенства нетрудно решить, используя эту геометрическую модель.

а) Уравнение $\log_{\frac{2}{5}} x=0$ имеет один корень $x=1$, поскольку график функции $y=\log_{\frac{2}{5}} x$ пересекает ось x в единственной точке (1; 0).

б) График функции $y=\log_{\frac{2}{5}} x$ расположен выше оси y при $0<x<1$. Значит, решение неравенства $\log_{\frac{2}{5}} x>0$ имеет вид $0<x<1$.

в) График функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ расположен ниже оси x при $x > 1$. Значит, решение неравенства $\log_{\frac{2}{5}} x < 0$ имеет вид $x > 1$.

Ответ: а) $x = 1$; б) $0 < x < 1$; в) $x > 1$.

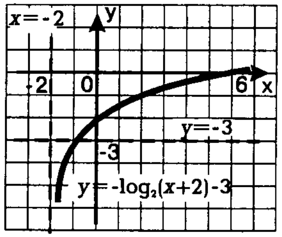


Рис. 219

Пример 4. Построить графики функций:

а) $y = \log_2(x+2) - 3$; б) $y = \log_2(-x)$;

в) $y = -3\log_2 \frac{x}{2}$.

Решение. В этом примере нужно выполнить различные преобразования графика функции $y = \log_2 x$ (см. рис. 218).

а) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-2; -3)$ (пунктирные прямые $x = -2$ и $y = -3$ на рис. 219). «Привяжем» график функции $y = \log_2 x$ к новой системе координат — это и будет требуемый график (рис. 219).

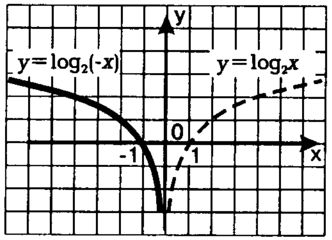


Рис. 220

б) Напомним, что график функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси y. Учтя это, строим график функции $y = \log_2 x$, а затем, подвергнув его преобразованию симметрии относительно оси y, получаем график функции $y = \log_2(-x)$ (рис. 220).

в) Построение графика функции $y = -3\log_2 \frac{x}{2}$ осуществим в несколько шагов:

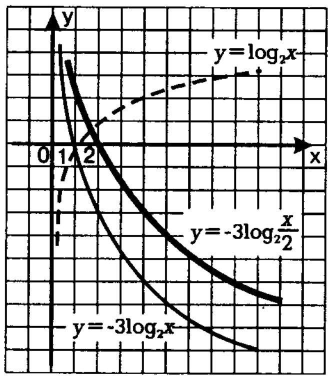


Рис. 221

1) Построим график функции $y = \log_2 x$ (пунктирная линия на рис. 221).

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 3 и симметрию «растянутого» графика относительно оси x. Получим график функции $y = -3\log_2 x$ (тонкая линия на рис. 221).

3) Осуществим сжатие построенного графика к оси y с коэффициентом $\frac{1}{2}$ (т.е. растяжение графика от оси y с коэффициентом 2). Получим график функции $y = -3\log_2 \frac{x}{2}$ (жирная линия на рис. 221). ◀■

Пример 5. Построить и прочитать график функции

$$y = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x \leqslant 1; \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Построим график функции $y = 2^x$ и выделим его часть на луче $(-\infty, 1]$ (выделенная часть пунктирной линии на рис. 222). Построим

график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и выделим его часть на открытом луче $(1, +\infty)$ (выделенная часть тонкой линии на рис. 222). Объединение двух выделенных на рис. 222 линий и представляет собой график заданной функции.

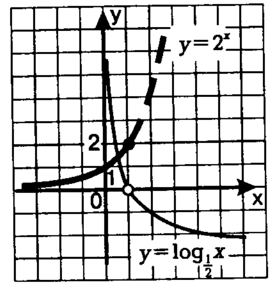


Рис. 222

Прочтем график, т.е. укажем иллюстрируемые графиком свойства заданной функции.

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

2) Не является ни четной, ни нечетной.

3) Возрастает на луче $(-\infty, 1]$, убывает на открытом луче $(1, +\infty)$.

4) Не ограничена снизу, ограничена сверху.

5) $y_{\text{наиб.}} = 2$ (достигается в точке $x = 1$), наименьшего значения у функции нет.

6) Функция претерпевает разрыв в точке $x = 1$; в остальных точках она непрерывна.

7) $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 2]$.

8) Выпукла вниз на промежутках $(-\infty, 1]$ и $(1, +\infty)$.

Заметим, что прямая $y = 0$ (ось x) является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to -\infty$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. ◀■

Пример 6. Решить уравнение $\lg x = 11 - x$.

Решение. Достаточно очевидно, что $x = 10$ — корень уравнения. В самом деле $\lg 10 = 1$ и $11 - 10 = 1$, т.е. при $x = 10$ заданное уравнение обращается в верное числовое равенство $1 = 1$.

Так как функция $y = \lg x$ возрастает, а функция $y = 11 - x$ убывает, то заданное уравнение имеет только один корень, который уже найден путем подбора: $x = 10$. ◀■

Завершая разговор о логарифмических функциях и их графиках, рассмотрим более сложный пример, где речь идет о построении графиков нескольких так называемых «экзотических» функций.

Пример 7. Построить графики функций:

а) $y = \log_x x$; б) $y = 2^{\log_2 x}$; в) $y = x^{\log_x 2}$.

Решение. а) Мы знаем, что $\log_x x = 1$, но при этом следует учесть, что x — основание логарифма, а потому $x > 0$ и $x \ne 1$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = 1$, область определения которой задается условиями: $x > 0$, $x \ne 1$. График функции изображен на рис. 223.

б) Мы знаем, что $2^{\log_2 x} = x$, но при этом следует учесть, что x — логарифмируемое число, а потому $x > 0$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = x$, область определения которой задается условием $x > 0$. График функции изображен на рис. 224.

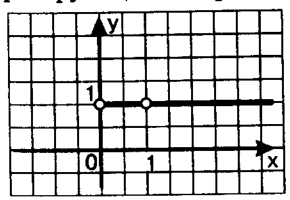


Рис. 223

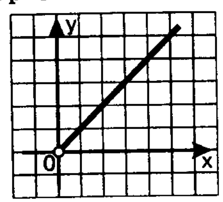


Рис. 224

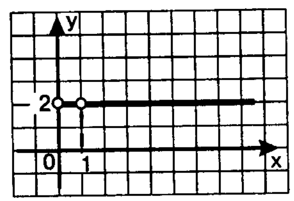


Рис. 225

в) Мы знаем, что $x^{\log_x 2}=2$, но при этом следует учесть, что x — основание логарифма, а потому $x>0$ и $x\neq1$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = 2$, область определения которой задается условиями: $x>0$, $x\neq1$. График функции изображен на рис. 225.

§ 50. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

В предыдущих параграфах мы ввели понятие логарифма положительного числа по положительному и отличному от 1 основанию, изучили свойства функции $y=\log_a x$, построили ее график. Но, чтобы успешно использовать на практике операцию логарифмирования, нужно познакомиться со свойствами этой операции, что мы и сделаем в настоящем параграфе. *Все свойства формулируются и доказываются только для положительных значений переменных, содержащихся под знаками логарифмов.* Впрочем, два свойства доказательства не требуют, они представляют собой запись на математическом языке определения логарифма как показателя степени, мы ими уже пользовались:

$$\boxed{\log_a a^r=r} \quad \boxed{a^{\log_a b}=b}$$

Теорема 1. ***Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел:***

$$\boxed{\log_a bc=\log_a b+\log_a c.}$$

Например, $\log_2 15=\log_2(3\cdot5)=\log_2 3+\log_2 5;$

$$\log_3 18=\log_3(9\cdot2)=\log_3 9+\log_3 2=2+\log_3 2;$$

$$\lg 5+\lg 2=\lg(5\cdot2)=\lg 10=1.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\log_a bc=x$, $\log_a b=y$, $\log_a c=z$. Нам надо доказать, что выполняется равенство $x=y+z$.

Так как $\log_a bc=x$, то $a^x=bc$.

Так как $\log_a b=y$, то $a^y=b$.

Так как $\log_a c=z$, то $a^z=c$.

Итак, $a^x=bc$, $a^y=b$, $a^z=c$.

Значит, $a^y\cdot a^z=a^x$, т.е. $a^{y+z}=a^x$.

Но если степени двух положительных чисел равны и основания степеней равны и отличны от 1, то равны и показатели степеней: $y+z=x$, что и требовалось доказать. ●

Приведем краткую запись доказательства теоремы.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\log_a bc=x$	$a^x=bc$	$a^x=a^y a^z$
$\log_a b=y$	$a^y=b$	$a^x=a^{y+z}$
$\log_a c=z$	$a^z=c$	$x=y+z$
Доказать: $x=y+z$		

Замечания: 1. Математики считают, что теорему 1 можно не доказывать. Ведь что такое логарифм, спрашивают они. И отвечают: логарифм — это показатель степени. А что делается с показателями степеней при умножении? Они складываются. Значит, логарифм произведения равен сумме логарифмов. Вот в чем состоит содержательный смысл теоремы 1.

2. Теорема остается справедливой и для случая, когда логарифмируемое выражение представляет собой произведение более двух положительных чисел.

Например, $\log_5 2+\log_5 3+\log_5 7=\log_5(2\cdot3\cdot7)=\log_5 42$.

3. Теорему 1 можно сформулировать, используя конструкцию «если...то» (как принято для теорем в математике). Приведем соответствующую формулировку: *если a, b и c — положительные числа, причем $a\neq1$, то справедливо равенство* $\log_a bc=\log_a b+\log_a c$. Следующую теорему мы именно так и оформим.

Теорема 2. ***Если a, b, c — положительные числа, причем $a\neq1$, то справедливо равенство:***

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c.}$$

Краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: *логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя* или *логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя.*

Например,

$$\log_{\frac12} 2{,}5=\log_{\frac12}\left(\frac52\right)=\log_{\frac12} 5-\log_{\frac12} 2=\log_{\frac12} 5+1;$$

$$\lg 15-\lg 3=\lg\frac{15}{3}=\lg 5.$$

Доказательство. Мы приведем краткую запись доказательства, а вы попробуйте сделать соответствующие комментарии, аналогичные тем, что были приведены при доказательстве теоремы 1, а также дать содержательное истолкование теоремы 2 подобно тому, как это сделано в замечании 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\log_a \frac{b}{c} = x$	$a^x = \frac{b}{c}$	$a^x = a^y : a^z$
$\log_a b = y$	$a^y = b$	$a^x = a^{y-z}$
$\log_a c = z$	$a^z = c$	$x = y - z$
Доказать: $x = y - z$		

Теорема 3. ***Если a, b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа r справедливо равенство:***

$$\boxed{\log_a b^r = r \log_a b.}$$

Краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: *логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени.*

Например,

$$\log_{\frac{1}{2}} 25 = \log_{\frac{1}{2}} 5^2 = 2\log_{\frac{1}{2}} 5;$$

$$\lg\frac{1}{5} = \lg 5^{-1} = -\lg 5;$$

$$3\log_2 5 = \log_2 5^3 = \log_2 125.$$

Доказательство. Приведем краткую запись доказательства, а вы, как и при доказательстве теоремы 2, попробуйте сделать соответствующие комментарии по аналогии с теоремой 1 и замечанием 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\log_a b^r = x$	$a^x = b^r$	$a^x = (a^y)^r$
$\log_a b = y$	$a^y = b$	$a^x = a^{ry}$
Доказать: $x = ry$		$x = ry$

Пример 1. Известно, что положительные числа x, y, z, t связаны соотношением $x = \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}}$. Выразить $\log_a x$ через логарифмы по основанию a чисел y, z, t.

Решение. 1) Логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя. Значит, $\log_a \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}} = \log_a(yz^3) - \log_a \sqrt[3]{t}$.

2) Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей. Значит, $\log_a(yz^3) = \log_a y + \log_a z^3$.

3) Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени. Значит,

$$\log_a z^3 = 3\log_a z; \quad \log_a \sqrt[3]{t} = \log_a t^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_a t.$$

4) В итоге получаем:

$$\log_a x = \log_a(yz^3) - \log_a \sqrt[3]{t} = \log_a y + \log_a z^3 - \frac{1}{3}\log_a t =$$

$$= \log_a y + 3\log_a z - \frac{1}{3}\log_a t.$$

При наличии определенного опыта решение примера можно не разбивать на последовательные этапы, а оформить его так:

$$\log_a x = \log_a \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}} = \log_a y + \log_a z^3 - \log_a t^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \log_a y + 3\log_a z - \frac{1}{3}\log_a t.$$

Еще раз подчеркнем, что все свойства логарифмов мы получили при условии, что переменные принимают положительные значения. А как быть, если про знак переменной ничего не известно? Можно ли, например, написать, что $\lg x^2 = 2\lg x$, если о знаке числа x ничего не известно? Отвечаем: нельзя, поскольку при $x < 0$ левая часть равенства определена, а правая не определена. Как же быть в таком случае? Нас выручит знак модуля. Поскольку $x^2 = |x|^2$ и $|x| > 0$ при $x \neq 0$, то верное равенство выглядит так: $\lg x^2 = 2\lg|x|$. Это частный случай общей формулы

$$\boxed{\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x| \ (n \in Z).}$$

Помните и о том, что заменять выражение $\log_a bc$ выражением $\log_a b + \log_a c$ мы имеем право лишь в случае, когда $b > 0$ и $c > 0$. Если мы в этом не уверены, но знаем, что $bc > 0$, то, поскольку в этом случае выполняется равенство $bc = |b| \cdot |c|$, следует использовать формулу

$$\log_a bc = \log_a|b| + \log_a|c|.$$

Если некоторое выражение A составлено из положительных чисел x, y, z с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, то, используя свойства логарифмов, можно выразить $\log_a A$ через логарифмы чисел x, y, z. Такое преобразование называют *логарифмированием* (см. пример 1). Ценность операции логарифмирования состоит в том, что она позволяет сводить вычисления к операциям более низкого порядка: произведение, частное, степень заменяются соответственно на сумму, разность, произведение.

Иногда приходится решать обратную задачу: находить выражение, логарифм которого представлен через логарифмы некоторых чисел. Такое преобразование *называют потенцированием.* При этом используется следующее утверждение:

Теорема 4. *Равенство* $\log_a t = \log_a s$, *где* $a > 0, a \neq 1, t > 0, s > 0$, *справедливо тогда и только тогда, когда* $t = s$.

Это достаточно очевидное следствие монотонности логарифмической функции.

Пример 2. Известно, что $\lg x = 2\lg y - \lg z + 0{,}5\lg t$. Выразить x через y, z, t.

Решение. Имеем последовательно:

$$2\lg y = \lg y^2;$$
$$0{,}5\lg t = \lg t^{0,5} = \lg \sqrt{t};$$
$$2\lg y - \lg z + 0{,}5\lg t = \lg y^2 + \lg\sqrt{t} - \lg z = \lg \frac{y^2\sqrt{t}}{z}.$$

Итак, $\lg x = \lg \frac{y^2\sqrt{t}}{z}$ и, следовательно, $x = \lg \frac{y^2\sqrt{t}}{z}$.

Пример 3. Известно, что $\log_3 2 = a$. Вычислить $\log_3 6{,}75$.

Решение. Выразим число 6,75 через числа 3 и 2 (3 — основание логарифма, 2 — заданное в условии логарифмируемое число) с помощью операций умножения, деления и возведения в степень:

$$6{,}75 = 6\frac{3}{4} = \frac{27}{4} = \frac{3^3}{2^2}.$$

Далее находим:

$$\log_3 6{,}75 = \log_3\left(\frac{3^3}{2^2}\right) = \log_3 3^3 - \log_3 2^2 = 3 - 2\log_3 2 = 3 - 2a.$$

Ответ: $\log_3 6{,}75 = 3 - 2a$.

Пример 4. Вычислить $49^{1-0,25\log_7 25}$.

Решение. Поработаем с показателем степени:

$$1 - 0{,}25\log_7 25 = \log_7 7 - \log_7 25^{\frac{1}{4}} = \log_7 7 - \log_7 \sqrt[4]{25} =$$
$$= \log_7 7 - \log_7 \sqrt{5} = \log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Теперь заданное числовое выражение мы можем записать в виде $49^{\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}}$.

Далее находим

$$49^{\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}} = 7^{2\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}} = 7^{\log_7 \left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2} = 7^{\log_7 \frac{49}{5}}.$$

Остается вспомнить, что $a^{\log_a b} = b$. Значит, $7^{\log_7 \frac{49}{5}} = \frac{49}{5} = 9{,}8$.

Ответ: 9,8.

Пример 5. Положительное число a записано в стандартном виде: $a = a_0 \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a_0 < 10$ и n — целое число. Найти десятичный логарифм числа a.

Решение. $\lg a = \lg(a_0 \cdot 10^n) = \lg a_0 + \lg 10^n = \lg a_0 + n.$

Таким образом, $\lg a = n + \lg a_0$.

Проанализируем полученный результат. По условию $1 \leqslant a_0 < 10$, значит, в силу возрастания функции $y = \lg x$ имеем: $\lg 1 \leqslant \lg a_0 < \lg 10$, т.е. $0 \leqslant \lg a_0 < 1$.

Таким образом, нам удалось представить $\lg a$ в виде суммы целого числа n и числа $\lg a_0$, заключенного в промежутке $[0, 1)$. Это значит, что n — *целая часть* числа $\lg a$, а $\lg a_0$ — *дробная часть* числа $\lg a$.

Обычно целую часть числа $\lg a$ называют *характеристикой десятичного логарифма числа a*, а дробную часть числа $\lg a$ называют *мантиссой десятичного логарифма числа a.*

Математики, как вы знаете, ничего просто так не делают; если уж они выделили десятичные логарифмы, ввели термины «характеристика» и «мантисса», значит, с определенной целью. С какой? Для ответа на этот вопрос рассмотрим пример: вычислить lg 70, lg 700, lg 700 000, lg 0,007, если известно, что $\lg 7 \approx 0{,}8451$.

Имеем:

$$\lg 70 = \lg(7 \cdot 10) = \lg 7 + \lg 10 = 0{,}8451 + 1 = 1{,}8451;$$
$$\lg 700 = \lg(7 \cdot 10^2) = \lg 7 + \lg 10^2 = 0{,}8451 + 2 = 2{,}8451;$$
$$\lg 700\,000 = \lg(7 \cdot 10^5) = \lg 7 + \lg 10^5 = 0{,}8451 + 5 = 5{,}8451;$$
$$\lg 0{,}007 = \lg(7 \cdot 10^{-3}) = \lg 7 + \lg 10^{-3} = 0{,}8451 - 3 = -2{,}1549.$$

Таким образом, возвращаясь к решению примера 5, достаточно составить таблицу десятичных логарифмов чисел, заключенных в промежутке $[1, 10)$, чтобы с ее помощью и с помощью стандартного вида положительного числа вычислять десятичные логарифмы любых положительных чисел.

Завершая этот параграф, рассмотрим занимательный пример, где используются десятичные логарифмы.

Пример 6. Сколько цифр содержит число 7^{100}?

Решение. Часто начинают решать эту задачу «в лоб»: возводят число 7 постепенно в 1, 2, 3-ю и т.д. степень и пытаются увидеть закономерность. Имеем:

$7^1 = 7$ (одна цифра), $7^2 = 49$ (две цифры), $7^3 = 343$ (три цифры), $7^4 = 2401$ (четыре цифры), $7^5 = 16\,807$ (пять цифр), $7^6 = 117\,649$ (шесть цифр). Возникает естественная гипотеза: каков показатель степени, столько цифр в результате. Но эта гипотеза рушится уже на следующем шаге: $7^7 = 823\,543$ — в этом числе не 7, а 6 цифр. Так что метод перебора и угадывания здесь не срабатывает.

Поступим по-другому: вычислим десятичный логарифм числа 7^{100}. Имеем: $\lg 7^{100} = 100 \cdot \lg 7 = 100 \cdot 0{,}8451 = 84{,}51$.

Видим, что характеристика логарифма равна 84. Значит, порядок числа 7^{100} равен 84, а потому в числе 7^{100} 85 цифр.

Ответ: 85 цифр.

§ 51. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \qquad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Опираясь на теорему 4 из § 50, согласно которой равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a>0, a \neq 1$, $t>0$, $s>0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t=s$, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема. ***Если*** $f(x)>0$ ***и*** $g(x)>0$, ***то логарифмическое уравнение*** $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ***(где*** $a>0, a\neq 1$***) равносильно уравнению*** $f(x)=g(x)$.

На практике эту теорему применяют так: переходят от уравнения (1) к уравнению $f(x)=g(x)$ (такой переход называют *потенцированием*), решают уравнение $f(x)=g(x)$, а затем проверяют его корни по условиям $f(x)>0$, $g(x)>0$, определяющим область допустимых значений переменной (ОДЗ). Те корни уравнения $f(x)=g(x)$, которые удовлетворяют этим условиям, являются корнями уравнения (1). Те корни уравнения $f(x)=g(x)$, которые не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий, объявляются посторонними корнями для уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение: $\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x)$.

Решение. 1) Потенцируя (т.е. освободившись от знаков логарифмов), получаем:

$$x^2-3x-5=7-2x;$$
$$x^2-x-12=0;$$
$$x_1=4, \quad x_2=-3.$$

2) Проверим найденные корни по условиям: $\begin{cases} x^2-3x-5>0, \\ 7-2x>0. \end{cases}$

Значение $x=4$ не удовлетворяет этой системе неравенств (достаточно заметить, что $x=4$ не удовлетворяет второму неравенству системы), т.е. $x=4$ — посторонний корень для заданного уравнения. Значение $x=-3$ удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому $x=-3$ — корень заданного уравнения.

Ответ: $x=-3$.

Пример 2. Решить уравнение:

$$\log_2(x+4)+\log_2(2x+3)=\log_2(1-2x).$$

Решение. 1) Сначала надо преобразовать уравнение к виду (1). Для этого воспользуемся правилом: «сумма логарифмов равна логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\log_2(x+4)+\log_2(2x+3)$ выражением $\log_2(x+4)(2x+3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

$$\log_2(x+4)(2x+3)=\log_2(1-2x).$$

2) Потенцируя, получаем:

$$(x+4)(2x+3)=(1-2x);$$
$$2x^2+8x+3x+12=1-2x;$$
$$2x^2+13x+11=0,$$

$$x_1=-1, \quad x_2=-5{,}5.$$

3) Проверим найденные корни по условиям: $\begin{cases} x+4>0, \\ 2x+3>0, \\ 1-2x>0 \end{cases}$

(обратите внимание: *условия для проверки всегда определяют по заданному уравнению*). Значение $x=-1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x=-5{,}5$ не удовлетворяет (это посторонний корень).

Ответ: $x=-1$.

Замечание. Иногда удобнее использовать другой порядок ходов: сначала решить систему неравенств — в примере 2 решением системы неравенств будет интервал $(-1{,}5,\ 0{,}5)$; это — область допустимых значений переменной (ОДЗ) или область определения уравнения. Затем найти корни $x_1=-1$, $x_2=-5{,}5$. И, наконец, сделать проверку найденных значений x, но уже не с помощью системы неравенств, а по найденной заранее области допустимых значений. В примере 2 значение $x=-1$ принадлежит интервалу $(-1{,}5,\ 0{,}5)$, а значение $x=-5{,}5$ этому интервалу не принадлежит. Следовательно, $x=-5{,}5$ — посторонний корень, т.е. $x=-1$ — единственный корень заданного логарифмического уравнения.

Пример 3. Решить уравнение: $\lg^2 x+\lg x+1=\dfrac{7}{\lg\dfrac{x}{10}}$.

Решение. Так как $\lg\dfrac{x}{10}=\lg x-\lg 10=\lg x-1$, то заданное уравнение можно переписать в виде $\lg^2 x+\lg x+1=\dfrac{7}{\lg x-1}$.

Есть смысл ввести новую переменную $y=\lg x$; тогда уравнение примет вид $y^2+y+1=\dfrac{7}{y-1}$.

Далее находим:

$$(y-1)(y^2+y+1)=7;$$
$$y^3-1=7;$$
$$y^3=8;$$
$$y=2.$$

Это значение удовлетворяет условию $y\neq 1$ (посмотрите: у записанного выше рационального относительно y уравнения переменная содержится в знаменателе, а потому следует проверить, не обращается ли знаменатель в 0 при найденном значении переменной y).

Итак, $y=2$. Но $y=\lg x$, значит, нам осталось решить простейшее логарифмическое уравнение $\lg x=2$, откуда находим $x=100$.

Ответ: $x=100$.

Подведем некоторые итоги. Можно выделить *три основных метода решения логарифмических уравнений.*

1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применяли этот метод в § 49.

2) Метод потенцирования. Он основан на теореме, полученной в начале параграфа. Мы применили этот метод в примерах 1 и 2.

3) Метод введения новой переменной. Мы применили этот метод в примере 3.

Завершая параграф, рассмотрим пример, в котором для решения уравнения используется еще один метод — *метод логарифмирования*, и пример решения системы логарифмических уравнений.

Пример 4. Решить уравнение $x^{1-\log_5 x}=0{,}04$.

Решение. Возьмем от обеих частей уравнения логарифмы по основанию 5; это — равносильное преобразование уравнения, поскольку обе его части принимают только положительные значения. Получим: $\log_5 x^{1-\log_5 x}=\log_5 0{,}04$.

Учтем, что $\log_5 x^r=r\log_5 x$ и что $\log_5 0{,}04=\log_5\left(\frac{1}{25}\right)=\log_5 5^{-2}=-2$. Это позволит переписать заданное уравнение в виде: $(1-\log_5 x)\cdot\log_5 x=-2$. Замечаем, что «проявилась» новая переменная $y=\log_5 x$, относительно которой уравнение принимает весьма простой вид: $(1-y)y=-2$.

Далее получаем:

$$y^2-y-2=0,$$
$$y_1=2,\quad y_2=-1.$$

Но $y=\log_5 x$, значит, нам осталось решить два уравнения:

$$\log_5 x=2,\quad \log_5 x=-1.$$

Из первого уравнения находим $x=5^2$, т.е. $x=25$; из второго уравнения находим $x=5^{-1}$, т.е. $x=\frac{1}{5}$.

Ответ: $x_1=25;\quad x_2=\frac{1}{5}$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\lg(2x-y)+1=\lg(y+2x)+\lg 6,\\ 2\log_3(x-y)=\log_3(y+2).\end{cases}$$

Решение. 1) Преобразуем первое уравнение системы к более простому виду:

$$\lg(2x-y)+\lg 10=\lg(y+2x)+\lg 6;$$
$$\lg 10(2x-y)=\lg 6(y+2x);$$
$$10(2x-y)=6(y+2x),$$
$$x=2y.$$

2) Преобразуем второе уравнение системы к более простому виду:

$$\log_3(x-y)^2=\log_3(y+2),$$
$$(x-y)^2=y+2.$$

3) Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases}x=2y,\\ (x-y)^2=y+2.\end{cases}$$

Подставив $2y$ вместо x во второе уравнение, получим $(2y-y)^2=y+2$ и далее $y^2=y+2,\ \ y^2-y-2=0,\ \ y_1=2,\ \ y_2=-1.$

Соответственно из соотношения $x=2y$ находим $x_1=4$, $x_2=-2$.

4) Осталось сделать проверку найденных пар (4; 2) и (–2; –1) с помощью условий, которые мы определяем, анализируя исходную систему уравнений:

$$\begin{cases}2x-y>0,\\ y+2x>0,\\ x-y>0,\\ y+2>0.\end{cases}$$

Пара (4; 2) удовлетворяет этим условиям, а пара (–2; –1) не удовлетворяет (например, она «не проходит» уже через первое условие $2x-y>0$).

Ответ: (4; 2).

§ 52. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида

$$\log_a f(x)>\log_a g(x), \qquad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Для решения неравенства (1) проведем следующие рассуждения: преобразуем неравенство к виду $\log_a f(x)-\log_a g(x)>0$ и далее $\log_a\frac{f(x)}{g(x)}>0$, т.е. $\log_a t>0$, где $t=\frac{f(x)}{g(x)}$.

Теперь следует рассмотреть два случая: $a>1$ и $0<a<1$.

Если $a>1$, то неравенство $\log_a t>0$ имеет место тогда и только тогда, когда $t>1$ (см. § 49, рис. 216). Значит, $\frac{f(x)}{g(x)}>1$, т.е $f(x)>g(x)$, — мы учли, что $g(x)>0$.

Если $0<a<1$, то неравенство $\log_a t>1$ имеет место тогда и только тогда, когда $0<t<1$ (см. § 49, рис. 217). Значит, $0<\frac{f(x)}{g(x)}<1$, т.е. $f(x)<g(x)$, — мы учли, что $g(x)>0$ и $f(x)>0$.

Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема. ***Если*** $f(x)>0$ ***и*** $g(x)>0$***, то:***

логарифмическое неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ ***равносильно неравенству того же смысла*** $f(x)>g(x)$ ***при*** $a>1$***;***

логарифмическое неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ ***равносильно неравенству противоположного смысла*** $f(x)<g(x)$ ***при*** $0<a<1$.

На практике эту теорему применяют так: переходят от неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ к равносильной ему системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Первые два неравенства каждой из этих систем определяют область допустимых значений переменной для неравенства (1), а знак последнего неравенства каждой из систем (обратите внимание!) либо совпадает со знаком неравенства (1) — в случае, когда $a > 1$, — либо противоположен знаку неравенства (1) — в случае, когда $0 < a < 1$.

Пример 1. Решить неравенства:

а) $\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) > \log_{\frac{1}{3}}(14-x)$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной для заданного неравенства определяется условиями: $2x-4>0$ и $14-x>0$. Поскольку основанием логарифмов служит число 3, а оно больше 1, то, «освобождаясь» от знаков логарифмов, мы получим неравенство того же смысла: $2x-4>14-x$.

В итоге получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x-4>0, \\ 14-x>0, \\ 2x-4>14-x. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим $x>2$, из второго — $x<14$, из третьего — $x>6$. Геометрическая модель (рис. 226) помогает найти решение системы неравенств: $6<x<14$.

б) Здесь основание логарифма, т.е. число $\frac{1}{3}$, меньше 1. Значит, соответствующая система неравенств имеет вид:

$$\begin{cases} 2x-4>0, \\ 14-x>0, \\ 2x-4<14-x \end{cases}$$

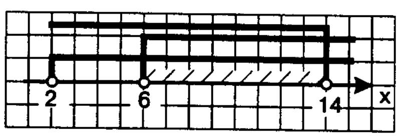


Рис. 226

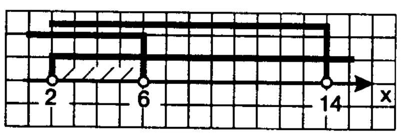


Рис. 227

(обратите внимание: знак последнего неравенства системы противоположен знаку исходного логарифмического неравенства).

Из первого неравенства системы находим $x>2$, из второго — $x<14$, из третьего — $x<6$. Геометрическая модель (рис. 227) помогает найти решение системы неравенств: $2<x<6$.

Ответ: а) $6<x<14$; б) $2<x<6$.

Замечание. Еще раз рассмотрим систему неравенств, которая получилась в примере 1а. Третье неравенство системы имеет вид $2x-4>14-x$, а второе — $14-x>0$. Но из этих двух неравенств автоматически (по свойству транзитивности неравенств) следует, что $2x-4>0$. Что это значит? Это значит, что первое неравенство системы с самого начала можно было отбросить без всякого ущерба для решения системы.

Рассуждая аналогично, в системе неравенств, которую мы получили в примере 1б, можно было с самого начала отбросить второе неравенство.

Получив систему неравенств, математики обычно смотрят, нет ли в ней неравенства, которое логически следует из других. Если такое неравенство есть, его можно отбросить. Советуем и вам так поступать, но, разумеется, только в том случае, если вы уверены в правильности своих выводов.

Пример 2. Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \leqslant -4$.

Решение. Представим -4 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{2}$:

$-4 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \log_{\frac{1}{2}} 16$. Это позволит переписать заданное неравенство в виде: $\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 16$.

Учитывая, что здесь основанием логарифмов служит число, меньше 1, составляем равносильную заданному неравенству систему неравенств:

$$\begin{cases} 16+4x-x^2>0, \\ 16+4x-x^2 \geqslant 16. \end{cases}$$

Обратите внимание: если выполняется второе неравенство системы, то автоматически выполняется и первое неравенство (если $A \geqslant 16$, то тем более $A>0$). Значит, первое неравенство системы можно отбросить. Решая второе неравенство, находим: $x^2-4x \leqslant 0$; $x(x-4) \leqslant 0$.

С помощью метода интервалов (рис. 228) получаем $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 4$.

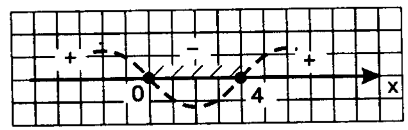


Рис. 228

Пример 3. Решить неравенство $\lg x + \lg(45-x) < 2 + \lg 2$.

Решение. Имеем последовательно:

$$\lg x + \lg(45-x) = \lg x(45-x) = \lg(45x-x^2),$$
$$2+\lg 2 = \lg 100 + \lg 2 = \lg 100 \cdot 2 = \lg 200.$$

Значит, заданное неравенство можно преобразовать к виду

$$\lg(45x-x^2) < \lg 200.$$

«Освобождаясь» от знаков десятичных логарифмов, получим неравенство того же смысла: $45x-x^2<200$. А условия, задающие область допустимых значений переменной, всегда определяют по исходному неравенству; в данном примере они таковы: $x>0$ и $45-x>0$. В итоге получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x>0, \\ 45-x>0, \\ 45x-x^2<200. \end{cases}$$

Первые два неравенства можно записать в виде двойного неравенства $0<x<45$. Решая третье неравенство системы, находим:

$$x^2-45x+200>0;$$
$$(x-40)(x-5)>0;$$
$$x<5; \quad x>40 \text{ (рис. 229).}$$

Отметив на числовой прямой эти решения совместно с полученным ранее интервалом $0<x<45$, находим их пересечение (рис. 230), т.е. решение составленной выше системы неравенств: $0<x<5$; $\quad 40<x<45$.

Ответ: $0<x<5$; $\quad 40<x<45$.

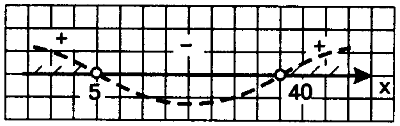


Рис. 229

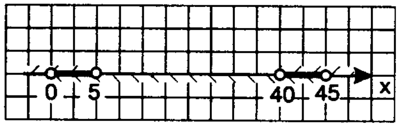


Рис. 230

Пример 4. Решить неравенство $\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x + 1 \leqslant 0$.

Решение. Здесь «напрашивается» введение новой переменной $y=\log_2 x$, но сначала надо разобраться с выражением $\log_2^2 x^2$.

Имеем: $\log_2^2 x^2 = (\log_2 x^2)^2 = (2\log_2 x)^2 = 4\log_2^2 x$. Итак, если $y=\log_2 x$, то $\log_2^2 x^2 = 4y^2$. Поняв это, перепишем заданное неравенство в виде

$$4y^2-5y+1\leqslant 0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена $4y^2-5y+1$: $y_1=1$, $\quad y_2=\frac{1}{4}$. Значит, $4y^2-5y+1=4(y-1)\left(y-\frac{1}{4}\right)$, а потому последнее неравенство можно переписать в виде $4(y-1)\left(y-\frac{1}{4}\right)\leqslant 0$.

Находим решение неравенства: $\frac{1}{4}\leqslant y\leqslant 1$.

Подставив вместо y выражение $\log_2 x$, получим: $\frac{1}{4}\leqslant \log_2 x \leqslant 1$ или, что то же самое, $\log_2 2^{\frac{1}{4}} \leqslant \log_2 x \leqslant \log_2 2$. Остается «освободиться» от знаков логарифмов, сохранив имеющиеся знаки неравенств: $2^{\frac{1}{4}} \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $2^{\frac{1}{4}} \leqslant x \leqslant 2$.

§ 53. ПЕРЕХОД К НОВОМУ ОСНОВАНИЮ ЛОГАРИФМА

Логарифмических функций бесконечно много: $y=\log_2 x$; $y=\log_3 x$; $\quad y=\log_{0,3} x$; $\quad y=\lg x$; $\quad y=\log_{\frac{8}{7}} x$ и т.д. Возникает вопрос,

как они связаны между собой? Есть ли, например, какая-то связь между функциями $y=\log_2 x$ и $y=\log_3 x$? На рис. 231 изображены графики функций $y=\log_2 x$ и $y=\log_3 x$. Не кажется ли вам, что график первой функции получается из графика второй функции растяжением от оси x с некоторым коэффициентом $k>1$? Если наше геометрическое наблюдение верно, то должно выполняться равенство:

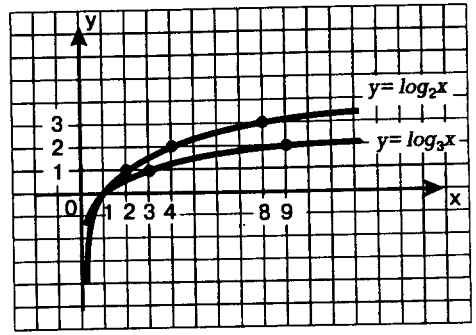


Рис. 231

$$\log_2 x = k\cdot\log_3 x.$$

Так ли это? На все поставленные вопросы мы ответим в этом параграфе. Теоретической основой для ответа является следующая теорема.

Теорема. ***Если a, b, c — положительные числа, причем a и c отличны от 1, то имеет место равенство:***

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \qquad (1)$$

(формула перехода к новому основанию логарифма).

Например, $\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$; $\quad \log_7 4 = \frac{\lg 4}{\lg 7}$ и т.д.

Доказательство теоремы.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\log_a b = x$ $\log_c b = y$ $\log_c a = z$	$a^x=b$ $c^y=b$ $c^z=a$	$\left.\right\} a^x=c^y$ $\Downarrow$ $\Rightarrow (c^z)^x=c^y$ $zx=y$ $x=\frac{y}{z}$
Доказать: $x=\frac{y}{z}$		

Теперь нетрудно ответить на поставленный выше вопрос: как связаны между собой различные логарифмические функции? Рассмотрим две логарифмические функции $y=\log_2 x$ и $y=\log_3 x$, графики которых изображены на рис. 231. Имеем:

$$\log_3 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 3}, \text{ откуда находим, что } \log_2 x=\log_2 3\cdot\log_3 x.$$

Таким образом, наша догадка подтвердилась: действительно, справедливо соотношение $\log_2 x=k\log_3 x$, где $k=\log_2 3$; подтвердилась и наша догадка о том, что в данном случае $k>1$, поскольку $\log_2 3>1$.

Аналогичные формулы связывают и другие логарифмические функции. Например, справедливы соотношения:

$$\log_5 x=k\log_7 x, \text{ где } k=\log_5 7;$$
$$\lg x=k\log_{0,5} x, \text{ где } k=\lg 0,5 \text{ и т.д.}$$

Рассмотрим два важных частных случая формулы перехода к новому основанию логарифма, два следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1. *Если a и b положительные и отличные от* 1 *числа, то справедливо равенство:*

$$\boxed{\log_a b=\frac{1}{\log_b a}.}$$

Например, $\log_2 3=\dfrac{1}{\log_3 2}$; $\quad \lg 5=\dfrac{1}{\log_5 10}$.

Доказательство. Положив в формуле (1) $c=b$, получим:

$$\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}. \quad \bullet$$

Следствие 2. *Если a и b — положительные числа, причем $a\neq 1$, то для любого числа $r\neq 0$ справедливо равенство*:

$$\boxed{\log_a b=\log_{a^r} b^r.}$$

Например, $\log_2 3=\log_{2^2} 3^2=\log_{2^{-1}} 3^{-1}=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}$ и т.д.

Доказательство. Перейдем в выражении $\log_{a^r} b^r$ к логарифмам по основанию a: $\log_{a^r} b^r=\dfrac{\log_a b^r}{\log_a a^r}=\dfrac{r\log_a b}{r}=\log_a b$. $\bullet$

Пример 1. Дано: $\lg 3=a$, $\lg 5=b$. Вычислить $\log_2 15$.

Решение.

$$\log_2 15=\frac{\lg 15}{\lg 2}=\frac{\lg(3\cdot 5)}{\lg(10:5)}=\frac{\lg 3+\lg 5}{\lg 10-\lg 5}=\frac{a+b}{1-b}.$$

Пример 2. Решить уравнение: $\log_2 x+\log_4 x=\log_{\sqrt[3]{4}} 3$.

Решение. Перейдем во всех логарифмах к одному основанию 4. Для этого дважды воспользуемся формулой, доказанной в следствии 2:

$$\log_2 x=\log_{2^2} x^2=\log_4 x^2;$$
$$\log_{\sqrt[3]{4}} 3=\log_{(\sqrt[3]{4})^3} 3^3=\log_4 27.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать в более простой форме:

$$\log_4 x^2+\log_4 x=\log_4 27.$$

Далее получаем:

$$\log_4(x^2\cdot x)=\log_4 27,$$
$$\log_4 x^3=\log_4 27,$$
$$x^3=27,$$
$$x=3.$$

Ответ: $x=3$.

§ 54. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

1. Число e. Функция $y=e^x$, ее свойства, график, дифференцирование

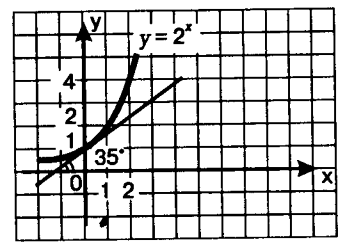


Рис. 232

Рассмотрим показательную функцию $y=a^x$, где $a>1$. Для различных оснований a получаем различные графики (рис. 232—234), но можно заметить, что все они проходят через точку (0; 1), все они имеют горизонтальную асимптоту $y=0$ при $x\to-\infty$, все они обращены выпуклостью вниз и, наконец, все они имеют касательные во всех своих точках. Проведем для примера касательную к графику функции $y=2^x$ в точке $x=0$ (рис. 232). Если сделать точные построения и измерения, то можно убедиться в том, что эта касательная образует с осью x угол 35° (примерно). Теперь проведем касательную к графику функции $y=3^x$ тоже в точ-

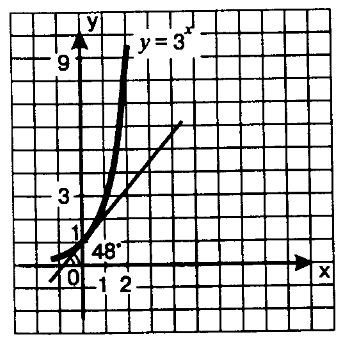


Рис. 233

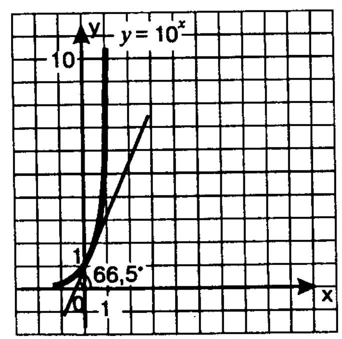


Рис. 234

ке $x=0$ (рис. 233). Здесь угол между касательной и осью x будет больше — 48°. А для показательной функции $y=10^x$ в аналогичной ситуации получаем угол 66,5° (рис. 234).

Итак, если основание a показательной функции $y=a^x$ постепенно увеличивается от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке $x=0$ и осью абсцисс постепенно увеличивается от 35° до 66,5°. Логично считать, что существует основание a, для которого соответствующий угол равен 45°. Это основание должно быть заключено между числами 2 и 3, поскольку для функции $y=2^x$ интересующий нас угол равен 35°, что меньше, чем 45°, а для функции $y=3^x$ он равен 48°, что уже немного больше, чем 45°. Интересующее нас основание принято обозначать буквой e. Установлено, что число e — иррациональное, т.е. представляет собой бесконечную десятичную непериодическую дробь:

$$e=2{,}7182818284590\ldots;$$

на практике обычно полагают, что $e\approx 2{,}7$.

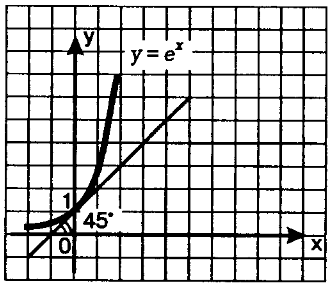


Рис. 235

Замечание (не очень серьезное). Ясно, что Л.Н. Толстой никакого отношения к числу e не имеет, тем не менее в записи числа e, обратите внимание, два раза подряд повторяется число 1828 — год рождения Л.Н. Толстого.

График функции $y=e^x$ изображен на рис. 235. Это — экспонента, отличающаяся от других экспонент (графиков показательных функций с другими основаниями) тем, что угол между касательной к графику в точке $x=0$ и осью абсцисс равен 45°.

Свойства функции $y=e^x$:

1) $D(f)=(-\infty,+\infty)$;
2) *не является ни четной, ни нечетной;*
3) *возрастает;*
4) *не ограничена сверху, ограничена снизу;*
5) *не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;*
6) *непрерывна;*
7) $E(f)=(0,+\infty)$;
8) *выпукла вниз;*
9) *дифференцируема.*

Вернитесь к § 45, взгляните на имеющийся там перечень свойств показательной функции $y=a^x$ при $a>1$. Вы обнаружите те же свойства 1—8 (что вполне естественно), а девятое свойство, связанное с

дифференцируемостью функции, мы тогда не упомянули. Обсудим его теперь.

Выведем формулу для отыскания производной $y=e^x$. При этом мы не будем пользоваться обычным алгоритмом, который выработали в § 32 и который не раз с успехом применяли. В этом алгоритме на заключительном этапе надо вычислить предел, а знания по теории пределов у нас с вами пока весьма и весьма ограниченные. Поэтому будем опираться на геометрические предпосылки, считая, в частности, сам факт существования касательной к графику показательной функции не подлежащим сомнению (поэтому мы так уверенно записали в приведенном выше перечне свойств девятое свойство — дифференцируемость функции $y=e^x$).

1. Отметим, что для функции $y=f(x)$, где $f(x)=e^x$, значение производной в точке $x=0$ нам уже известно: $f'(0)=\text{tg}\,45°=1$.

2. Введем в рассмотрение функцию $y=g(x)$, где $g(x)=f(x-a)$, т.е. $g(x)=e^{x-a}$. На рис. 236 изображен график функции $y=g(x)$: он получен из графика функции $y=f(x)$ сдвигом по оси x на $|a|$ единиц масштаба. Касательная к графику функции $y=g(x)$ в точке $x=a$ параллельна касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=0$ (см. рис. 236), значит, она образует с осью x угол 45°. Используя геометрический смысл производной, можем записать, что $g'(a)=\text{tg}\,45°=1$.

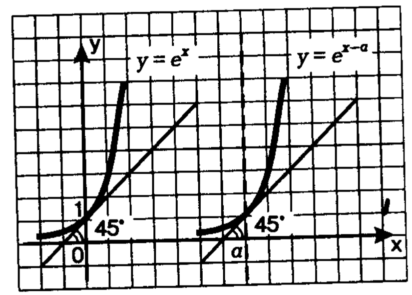


Рис. 236

3. Вернемся к функции $y=f(x)$. Имеем:

$f(x)=e^x=e^a\cdot e^{x-a}=e^a\cdot g(x)$. Значит, $f'(x)=e^a\cdot g'(x)$, в частности, $f'(a)=e^a\cdot g'(a)$. Но $g'(a)=1$, значит, $f'(a)=e^a$.

4. Мы установили, что для любого значения a справедливо соотношение $f'(a)=e^a$. Вместо буквы a можно, естественно, использовать и букву x; тогда получим $f'(x)=e^x$, т.е.

$$\boxed{(e^x)'=e^x.}$$

Из этой формулы получается соответствующая формула интегрирования:

$$\boxed{\int e^x\,dx=e^x+C.}$$

Пример 1. Провести касательную к графику функции $y=e^x$ в точке $x=1$.

Решение. Напомним, что уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ имеет вид

$$y=f(a)+f'(a)(x-a). \qquad (1)$$

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции (см. § 34), учитывая, что в данном примере $f(x)=e^x$.

1) $a=1$.

2) $f(a)=f(1)=e$.

3) $f'(x)=e^x$; $\quad f'(a)=f'(1)=e$.

4) Подставим найденные три числа: $a=1$, $\quad f(a)=e$, $\quad f'(a)=e$ в формулу (1). Получим:

$$y=e+e\cdot(x-1),$$
$$y=ex.$$

Ответ: $y=ex$.

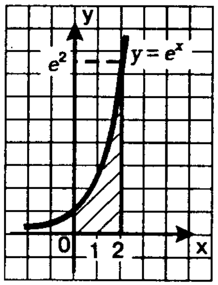


Рис. 237

Пример 2. Вычислить значение производной функции $y=e^{4x-12}$ в точке $x=3$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования функции $y=f(kx+m)$, согласно которому $y'=k\cdot f'(kx+m)$, и тем, что $(e^x)'=e^x$. Получим:

$$y'=(e^{4x-12})'=4\cdot e^{4x-12}.$$

Далее имеем:

$$y'(3)=4\cdot e^{12-12}=4\cdot e^0=4.$$

Ответ: 4.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $\quad x=0$, $\quad x=2$, $\quad y=e^x$.

Решение. Речь идет о вычислении площади криволинейной трапеции, изображенной на рис. 237.

Имеем: $S=\int\limits_0^2 e^x\,dx=e^x\Big|_0^2=e^2-e^0=e^2-1.$

Ответ: $S=e^2-1$.

Пример 4. Исследовать на экстремум и схематически изобразить график функции $y=x^2e^x$.

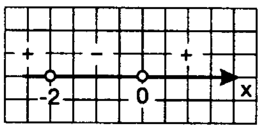


Рис. 238

Решение. Имеем:

$$y'=(x^2e^x)'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=$$
$$=2xe^x+x^2e^x=xe^x(x+2).$$

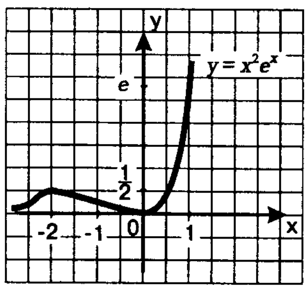


Рис. 239

Эта производная существует при всех значениях x, значит, критических точек у функции нет. Производная обращается в нуль в точках $x=0$ и $x=-2$ — это две стационарные точки. Отметим их на числовой прямой. Знаки производной на полученных промежутках меняются так, как показано на рис. 238. Значит, $x=-2$ — точка максимума функции, причем

$$y_{\max}=y(-2)=(-2)^2\cdot e^{-2}=\frac{4}{e^2}\approx 0{,}5;$$

$x=0$ — точка минимума, причем

$$y_{\min}=y(0)=0^2\cdot e^0=0.$$

Используя полученные точки экстремума, схематически изобразим график функции (рис. 239). Ось абсцисс — горизонтальная асимптота графика (при $x\to-\infty$).

2. Натуральные логарифмы. Функция $y=\ln x$, ее свойства, график, дифференцирование

Мы рассматривали логарифмы с различными основаниями: $\log_2 3$ — логарифм по основанию 2, $\log_5 7$ — логарифм по основанию 5, $\lg 2$ — логарифм по основанию 10 (десятичный логарифм) и т.д. Если основанием логарифма служит число e, то говорят, что задан **натуральный логарифм.**

Примеры натуральных логарифмов: $\log_e 2$, $\log_e 5$, $\log_e 0{,}2$ и т.д.

Подобно тому как для десятичных логарифмов введено специальное обозначение lg, введено специальное обозначение для натуральных логарифмов ln (l — логарифм, n — натуральный). Вместо $\log_e 2$ пишут $\ln 2$, вместо $\log_e 5$ пишут $\ln 5$ и т.д.

Используя известные соотношения для логарифмов (см. § 48, 50, 53), запишем ряд соотношений для натуральных логарифмов:

$$\ln 1=0; \ln e=1;$$
$$\ln e^r=r; \quad e^{\ln x}=x; \quad \log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}.$$

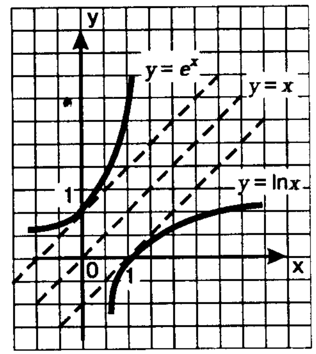


Рис. 240

Мы знаем, что график логарифмической функции $y=\log_a x$ симметричен графику показательной функции $y=a^x$ относительно прямой $y=x$. Значит, и график функции $y=\ln x$ симметричен графику функции $y=e^x$ относительно прямой $y=x$ (рис. 240). Это — экспонента, отличающаяся от других экспонент (графиков логарифмических функций с другими основаниями) тем, что угол между касательной к графику в точке $x=1$ и осью абсцисс равен 45°.

Свойства функции $y=\ln x$:

1) $D(f)=(0,+\infty)$;

2) *не является ни четной, ни нечетной;*

3) *возрастает на* $(0,+\infty)$;

4) *не ограничена ни сверху, ни снизу;*

5) *не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;*

6) *непрерывна;*

7) $E(f)=(-\infty,+\infty)$;

8) *выпукла вверх;*

9) *дифференцируема.*

Вернемся к § 49: взгляните на имеющийся там перечень свойств логарифмической функции $y=\log_a x$, при $a>1$. Вы обнаружите те же свойства, кроме девятого, — его мы тогда не упомянули.

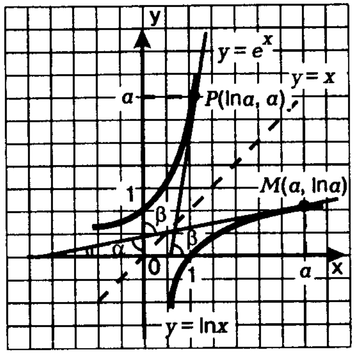


Рис. 241

Выведем формулу для отыскания производной функции $y=\ln x$. При этом, как и в случае показательной функции, не будем пользоваться обычным алгоритмом отыскания производной (по тем же причинам — наши недостаточные знания в теории пределов), а будем использовать геометрические соображения.

Возьмем на графике функции $y=\ln x$ точку $M(a,\ \ln a)$, проведем касательную к графику функции в этой точке. Касательная составляет с осью абсцисс угол α (рис. 241). Найдем на графике функции $y=e^x$ точку P, симметричную точке M относительно прямой $y=x$; это будет точка $P(\ln a;\ a)$. Проведем касательную к графику показательной функции в этой точке, которая составит с осью абсцисс угол β. Точно такой же угол β составляет первая из двух проведенных касательных с осью ординат, но тогда получаем, что $\alpha+\beta=90°$ (рис. 241).

Для функции $y=f(x)$, где $f(x)=\ln x$, имеем:

$$f'(a)=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(90°-\beta)=\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

С другой стороны, для функции $y=g(x)$, где $g(x)=e^x$, имеем:

$$g'(\ln a)=\operatorname{tg}\beta.$$

Но $g'(x)=(e^x)'=e^x$; в частности, $g'(\ln a)=e^{\ln a}=a$.

Итак, $\operatorname{tg}\beta=a$, значит, $f'(a)=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{1}{a}$. Проведя аналогичные рассуждения для любой точки x, а не только для точки $x=a$, как было сделано выше, получим, что

$$f'(x)=\frac{1}{x}.$$ ●

Таким образом, мы установили, что для любого значения $x>0$ справедлива формула дифференцирования

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}.}$$

Из этой формулы получается соответствующая формула интегрирования, справедливая при условии $x>0$:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C.$$

Заметим, что если условие $x>0$ не выполняется, то используют более общую формулу

$$\boxed{\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.}$$

Пример 5. Вычислить значение производной функции $y=\ln(3x+5)$ в точке $x=-1$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования функции $y=f(kx+m)$, согласно которому $y'=k\cdot f'(kx+m)$, и тем, что $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Получим:

$$y'=(\ln(3x+5))'=3\cdot\frac{1}{3x+5}=\frac{3}{3x+5}.$$

Далее имеем: $y'(-1)=\dfrac{3}{3\cdot(-1)+5}=1{,}5.$

Ответ: 1,5.

Пример 6. Провести касательную к графику функции $y=\ln x$ в точке $x=e$.

Решение. Напомним еще раз, как и в примере 1, что уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ имеет вид:

$$y=f(a)+f'(a)(x-a).\qquad (1)$$

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции (см. § 34), учитывая, что в данном примере $f(x)=\ln x$.

1) $a=e$;

2) $f(a)=f(e)=\ln e=1$;

3) $f'(x)=\frac{1}{x}$; $f'(a)=f'(e)=\frac{1}{e}$;

4) Подставим найденные три числа: $a=e$, $f(a)=1$, $f'(a)=\frac{1}{e}$ в формулу (1). Получим: $y=1+\frac{1}{e}\cdot(x-e)$, $y=\frac{x}{e}$.

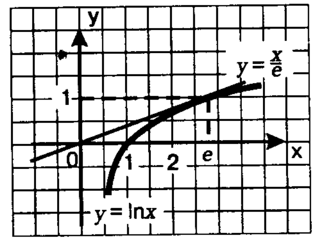


Рис. 242

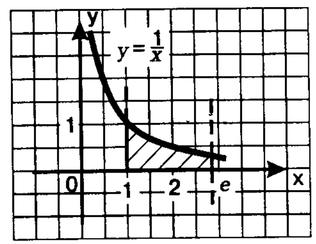


Рис. 243

На рис. 242 изображен график функции $y=\ln x$, построена прямая $y=\frac{x}{e}$, проходящая через начало координат. Чертеж подтверждает полученный результат: построенная прямая касается графика функции $y=\ln x$ в точке $(e\ ;\ 1)$.

Ответ: $y=\frac{x}{e}$.

Пример 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=0$, $x=1$, $x=e$ и гиперболой $y=\frac{1}{x}$.

Решение. Речь идет о вычислении площади криволинейной трапеции, изображенной на рис. 243. Имеем:

$$S=\int_1^e \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1-0=1.$$

Ответ: $S=1$.

Пример 8. Исследовать на экстремум функцию $y=\frac{\ln x}{x}$.

Решение. Имеем:

$$y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Эта производная существует при всех значениях $x>0$, т.е. при всех значениях x из области определения функции. Значит, критических точек у функции нет. Приравняв производную нулю, получим: $1-\ln x=0$, $\ln x=1$, $x=e$.

Это единственная стационарная точка. Если $x<e$, то $y'>0$; если $x>e$, то $y'<0$. Значит, $x=e$ — точка максимума функции, причем

$$y_{\max}=y(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}.$$

Ответ: $x=e$ — точка максимума; $y_{\max}=\frac{1}{e}$.

Завершая параграф, получим формулы дифференцирования любой показательной и любой логарифмической функций.

Пусть дана показательная функция $y=a^x$. Воспользуемся тем, что $a=e^{\ln a}$ и, следовательно, $a^x=e^{x\ln a}$. Тогда:

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=\ln a\cdot e^{x\ln a}=\ln a\cdot a^x.$$

Итак,

$$\boxed{(a^x)'=a^x\ln a.}$$

Например, $(2^x)'=2^x\ln 2$; $(5^x)'=5^x\ln 5$ и т.д.

Пусть теперь дана логарифмическая функция $y=\log_a x$. Имеем:

$$y'=(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}.$$

Итак,

$$\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.}$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы пополнили наш словарный запас математического языка новыми *терминами*:

степень с иррациональным показателем;

показательная функция, показательное уравнение, показательное неравенство;

логарифм числа, основание логарифма;

десятичный логарифм, характеристика и мантисса десятичного логарифма;

натуральный логарифм;

логарифмическая функция, логарифмическое уравнение, логарифмическое неравенство;

экспонента, логарифмическая кривая.

Мы ввели новые *обозначения*:

$\log_a b$ — для логарифма положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a;

$\lg a$ — для десятичного логарифма;

$\ln a$ — для натурального логарифма;

число e.

Мы изучили новые *функции* (определения, свойства, графики):

показательная функция $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, в частности, $y=e^x$;

логарифмическая функция $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, в частности, $y=\lg x$, $y=\ln x$.

Мы изучили новые *формулы*, связанные с понятием логарифма:

$$a^{\log_a b}=b;\quad \log_a a^r=r;$$

$$\log_a bc=\log_a b+\log_a c,\quad \log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c,$$

здесь $(b>0$ и $c>0)$;

$$\log_a b^r=r\log_a b\,(b>0),\quad \log_a x^{2n}=2n\log_a|x|,$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\quad \log_a b=\frac{1}{\log_b a},\quad \log_a b=\log_{a^r} b^r.$$

Мы получили *формулы*, связанные с дифференцированием и интегрированием показательной и логарифмической функций:

$$(a^x)'=a^x\ln a,\ \text{в частности, } (e^x)'=e^x;$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},\ \text{в частности, } (\ln x)'=\frac{1}{x};$$

$$\int e^x dx=e^x+C;\quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

Глава

8 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Изучая курс алгебры, мы постоянно решали уравнения и неравенства с одной переменной, системы уравнений с двумя переменными, системы неравенств с одной переменной. В этой главе, завершающей изучение школьного курса алгебры и начал математического анализа, мы снова обращаемся к уравнениям и неравенствам, чтобы рассмотреть их с самых общих позиций. Это будет, с одной стороны, своеобразное подведение итогов и, с другой стороны, некоторое расширение и углубление наших знаний.

§ 55. РАВНОСИЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе речь пойдет о принципиальных вопросах, связанных с решением уравнений с одной переменной: что такое равносильные уравнения; какие преобразования уравнений являются равносильными, а какие — нет; когда надо делать проверку найденных корней и как ее делать. Эти вопросы вы обсуждали в курсе алгебры, начиная с 8-го класса, да и в настоящем учебнике о них уже шла речь, например, при решении показательных и логарифмических уравнений. Почему мы снова к ним возвращаемся? Потому что, завершая изучение школьного курса алгебры, целесообразно как бы заново переосмыслить общие идеи и методы.

Определение 1. Два уравнения с одной переменной $f(x)=g(x)$ и $p(x)=h(x)$ называют **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Иными словами, два уравнения называют *равносильными*, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Например, уравнения $x^2-4=0$ и $(x+2)(2^x-4)=0$ равносильны, оба они имеют по два корня: 2 и −2. Равносильны и уравнения $x^2+1=0$ и $\sqrt{x}=-3$, поскольку оба они не имеют корней.

Определение 2. Если каждый корень уравнения

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

является в то же время корнем уравнения

$$p(x)=h(x), \qquad (2)$$

то уравнение (2) называют **следствием уравнения** (1).

Например, уравнение $x-2=3$ имеет корень $x=5$, а уравнение $(x-2)^2=9$ имеет два корня: $x_1=5$, $x_2=-1$. Корень уравнения $x-2=3$ является одним из корней уравнения $(x-2)^2=9$. Значит, уравнение $(x-2)^2=9$ — следствие уравнения $x-2=3$.

Достаточно очевидным является следующее утверждение:

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Схему решения любого уравнения можно описать так: заданное уравнение (1) преобразуют в уравнение (2), более простое, чем уравнение (1); уравнение (2) преобразуют в уравнение (3), более простое, чем уравнение (2), и т.д.:

$$(1)\to(2)\to(3)\to(4)\to\ldots$$

В конце концов получают достаточно простое уравнение и находят его корни. В этот момент и возникает главный вопрос: совпадает ли множество найденных корней последнего уравнения с множеством корней исходного уравнения (1)? Если все преобразования были равносильными, т.е. если были равносильны уравнения (1) и (2), (2) и (3), (3) и (4) и т.д., то ответ на поставленный вопрос положителен: да, совпадает. Это значит, что, решив последнее уравнение цепочки, мы тем самым решим и первое (исходное) уравнение цепочки. Если же некоторые преобразования были равносильными, а в некоторых мы не уверены, но точно знаем, что переходили с их помощью к уравнениям-следствиям, то однозначного ответа на поставленный вопрос мы не получим.

Чтобы ответ на вопрос был более определенным, нужно все найденные корни последнего уравнения цепочки *проверить*, подставив их поочередно в исходное уравнение (1). Если проверка показывает, что найденный корень последнего уравнения цепочки не удовлетворяет исходному уравнению, его называют *посторонним корнем*; естественно, что посторонние корни в ответ не включают.

Вы, конечно, понимаете, что термин «более простое уравнение» вообще говоря, не поддается, точному описанию. Обычно считают одно уравнение более простым, чем другое, по чисто внешним признакам. Например, решая уравнение $2^{\sqrt{2x+7}}=2^{x-3}$, получаем сначала $\sqrt{2x+7}=x-3$; это иррациональное уравнение проще заданного «показательно-иррационального» уравнения. Далее, возведя обе части иррационального уравнения в квадрат, получим $2x+7=(x-3)^2$; это рациональное уравнение проще, чем предыдущее иррациональное уравнение.

В итоге можно сказать, что решение уравнения, как правило, осуществляется в три этапа:

Первый этап — *технический*. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) $\to$ (2) $\to$ (3) $\to$ (4) $\to$... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка*. Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Реализация этого плана связана с поисками ответов на четыре вопроса.

1. *Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?*

2. *Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?*

3. *Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?*

4. *В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?*

Ответу на каждый из вопросов отведен отдельный пункт данного параграфа.

1. Теоремы о равносильности уравнений. Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе алгебры, основано на шести *теоремах о равносильности* (все они в той или иной мере вам известны). Первые три теоремы — «спокойные», они гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не причиняет решающему никаких неприятностей.

Теорема 1. ***Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.***

Теорема 2. ***Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.***

Теорема 3. ***Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \ne 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.***

Следующие три теоремы — «беспокойные», они работают лишь при определенных условиях, а значит, могут доставить некоторые неприятности при решении уравнений. Прежде чем формулировать теоремы 4—6, напомним еще об одном понятии, связанном с уравнениями.

Определение 3. Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ или **областью допустимых значений (ОДЗ)** переменной называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 4. ***Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:***

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x) = g(x)$;

б) нигде в этой области не обращается в 0 —

то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному.

Замечание 1. Следствием теоремы 4 является еще одно «спокойное» утверждение: *если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 5. ***Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение, равносильное данному: $f(x)^n = g(x)^n$.***

Теорема 6. ***Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \ne 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.***

2. Преобразование данного уравнения в уравнение-следствие. В этом пункте мы ответим на второй вопрос: какие преобразования переводят данное уравнение в уравнение-следствие?

Частично ответ на этот вопрос связан с тремя последними теоремами. Можно сказать так: если в процессе решения уравнения мы применили заключение одной из теорем 4, 5, 6, не проверив выполнения ограничительных условий, заложенных в формулировках теорем, то получится уравнение-следствие. Приведем примеры.

1) Уравнение $x - 1 = 3$ имеет один корень $x = 4$. Умножив обе части уравнения на $x - 2$, получим уравнение $(x-1)(x-2) = 3(x-2)$, имеющее два корня: $x_1 = 4$ и $x_2 = 2$. Второй корень является посторонним для заданного уравнения. Причина его появления состоит в том, что мы умножили обе части уравнения на одно и то же выражение, нарушив при этом условия теоремы 4. В этой теореме содержится требование: выражение, на которое мы умножаем обе части уравнения, нигде не должно обращаться в 0. Мы же умножили обе

части уравнения на выражение $x-2$, которое обращается в 0 при $x=2$; именно это значение оказалось посторонним корнем.

2) Возьмем то же самое уравнение $x-1=3$ и возведем обе его части в квадрат. Получим уравнение $(x-1)^2=9$, имеющее два корня: $x_1=4$, $x_2=-2$. Второй корень является посторонним для уравнения $x-1=3$. Причина его появления состоит в том, что мы возвели обе части уравнения в одну и ту же четную степень, нарушив при этом условие теоремы 5. В этой теореме содержится требование: обе части уравнения должны быть неотрицательны. Про выражение $x-1$ этого утверждать мы не можем.

3) Рассмотрим уравнение $\ln(2x-4)=\ln(3x-5)$. Потенцируя, получим уравнение $2x-4=3x-5$ с единственным корнем $x=1$. Но этот корень является посторонним для заданного логарифмического уравнения, поскольку оба выражения под знаками логарифмов при $x=1$ принимают отрицательные значения. Причина появления постороннего корня состоит в том, что мы, потенцируя (т.е. «освобождаясь» от знаков логарифмов), нарушили условия теоремы 6. В этой теореме содержится требование: выражения под знаками логарифмов должны быть положительными; о выражениях $2x-4$ и $3x-5$ этого утверждать мы не можем, так как они при одних значениях x положительны, при других — отрицательны.

В последнем примере переход от логарифмического уравнения к уравнению $2x-4=3x-5$ привел к *расширению области определения уравнения*. Область определения логарифмического уравнения задается системой неравенств:

$$\begin{cases} 2x-4>0, \\ 3x-5>0, \end{cases}$$

решив которую находим: $x>2$. Область же определения уравнения $2x-4=3x-5$ есть множество всех действительных чисел. По сравнению с логарифмическим уравнением она расширилась: добавился луч $(-\infty, 2]$. Именно в эту добавленную часть и «проник» посторонний корень $x=1$.

Перечислим возможные *причины расширения области определения уравнения*:

1. Освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину.

2. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней четной степени.

3. Освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.

Подведем итоги. Исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, а значит, *обязательна проверка всех найденных корней, если:*

1) *произошло расширение области определения уравнения;*

2) *осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;*

3) *выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).*

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5$.

Решение. Первый этап — *технический*. На этом этапе, как мы отмечали выше, осуществляют преобразования заданного уравнения по схеме $(1)\to(2)\to(3)\to(4)\to\ldots$ и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Последовательно имеем:

$$\sqrt{5x-6}=5-\sqrt{2x+5};$$
$$(\sqrt{5x-6})^2=(5-\sqrt{2x+5})^2;$$
$$5x-6=25-10\sqrt{2x+5}+2x+5;$$
$$10\sqrt{2x+5}=36-3x;$$
$$(10\sqrt{2x+5})^2=(36-3x)^2;$$
$$100(2x+5)=1296-216x+9x^2;$$
$$9x^2-416x+796=0;$$
$$x_1=2,\quad x_2=\frac{398}{9}.$$

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными. Замечаем, что в процессе решения уравнения дважды применялось неравносильное преобразование — возведение в квадрат, кроме того, расширилась область определения уравнения (были квадратные корни — были ограничения на переменную, не стало квадратных корней — не стало ограничений). Значит, решенное на последнем шаге первого этапа квадратное уравнение является уравнением-следствием для заданного уравнения. Проверка обязательна.

Третий этап — *проверка*. Подставим поочередно каждое из найденных значений переменной в исходное уравнение.

Если $x=2$, то получаем: $\sqrt{2\cdot 2+5}+\sqrt{5\cdot 2-6}=5$; $3+2=5$ — верное равенство.

Если $x=\frac{398}{9}$, то получаем: $\sqrt{2\cdot\frac{398}{9}+5}+\sqrt{5\cdot\frac{398}{9}-6}=5$. Это неверное равенство, поскольку уже первое подкоренное выражение явно больше, чем 25, и потому корень из него больше, чем 5, т.е. уже больше правой части равенства. Таким образом, $x=\frac{398}{9}$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

3. О проверке корней. В этом пункте мы ответим на третий вопрос: как сделать проверку, если проверка корней с помощью их подстановки в исходное уравнение сопряжена со значительными вычислительными трудностями? Видимо, в таких случаях надо искать обходные пути проверки.

Вернемся к примеру 1. Подстановка значения $x_1 = 2$ в заданное уравнение трудностей не представляла. Подстановку же второго значения $x_2 = \frac{398}{9}$ мы фактически заменили прикидкой. Мы прикинули, что $x_2 \approx 44$, значит, $\sqrt{2x_2+5} > 5$, и сразу стало ясно, что $x_2 = \frac{398}{9}$ — посторонний корень. Такая прикидка — один из обходных путей проверки.

Еще раз вернемся к примеру 1. Значение $x_2 = \frac{398}{9}$ можно было проверить не по исходному уравнению, а по полученному в процессе преобразований уравнению: $10\sqrt{2x+5} = 36-3x$. По смыслу этого уравнения должно выполняться неравенство $36-3x \geqslant 0$, т.е. $x \leqslant 12$.

Поскольку значение $x_2 = \frac{398}{9}$ этому условию не удовлетворяет, то x_2 — посторонний корень.

Как правило, самый легкий обходной путь проверки — по области определения (ОДЗ) заданного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение: $\ln(x+4)+\ln(2x+3)=\ln(1-2x)$.

Решение. Первый этап. Воспользуемся правилом «сумма логарифмов равна логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\ln(x+4)+\ln(2x+3)$ выражением $\ln(x+4)(2x+3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде: $\ln(x+4)(2x+3)=\ln(1-2x)$.

Потенцируя, получаем: $(x+4)(2x+3)=(1-2x)$ и далее:

$$2x^2+8x+3x+12=1-2x,$$
$$2x^2+13x+11=0,$$
$$x_1=-1, \quad x_2=-5{,}5.$$

Второй этап. В процессе решения произошло расширение области определения уравнения, значит, обязательна проверка.

Третий этап. Поскольку кроме расширения области определения уравнения никаких других неравносильных преобразований в процессе решения уравнения не было, проверку можно выполнить по области определения исходного уравнения. Она задается системой неравенств:

$$\begin{cases} x+4>0, \\ 2x+3>0, \\ 1-2x>0. \end{cases}$$

Значение $x=-1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x=-5{,}5$ не удовлетворяет уже первому неравенству; это — посторонний корень.

Ответ: -1.

Замечание 2. Каждый раз выделять при решении уравнения три этапа — технический, анализ, проверку — конечно, необязательно. Но все это нужно «держать в голове» и уж во всяком случае понимать следующее: если анализ показал, что проверка обязательна, а вы ее не сделали, то уравнение не может считаться решенным верно; тем более оно не может считаться решенным верно, если вы не сделали сам анализ.

Пример 3. Решить уравнение $\log_{x+4}(x^2-1)=\log_{x+4}(5-x)$.

Решение. Потенцируя, получаем $x^2-1=5-x$ и далее

$$x^2+x-6=0,$$
$$x_1=2, \quad x_2=-3.$$

Для проверки корней выпишем условия, задающие ОДЗ:

$$\begin{cases} x+4>0, \\ x+4\neq 1, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0. \end{cases}$$

Значение $x=2$ удовлетворяет всем условиям этой системы, а значение $x=-3$ не удовлетворяет второму условию; следовательно, $x=-3$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

Замечание 3. Не переоценивайте способ проверки по ОДЗ: он является полноценным только в том случае, когда при решении уравнения других причин нарушения равносильности, кроме расширения области определения, не было (это чаще всего бывает в логарифмических уравнениях). При решении же иррациональных уравнений, где используется метод возведения в квадрат, способ проверки найденных корней по ОДЗ не выручит; лучше, если это возможно, делать проверку подстановкой.

4. О потере корней. В этом пункте мы ответим на четвертый вопрос: в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Укажем две *причины потери корней при решении уравнений*:

1) деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x)\neq 0$);

2) сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

С первой причиной бороться нетрудно: приучайте себя переходить от уравнения $f(x)h(x)=g(x)h(x)$ к уравнению $h(x)(f(x)-g(x))=0$ (а не к уравнению $f(x)=g(x)$). Может быть, даже есть смысл вообще запретить себе деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение. В связи с этим советуем вам вернуться к п. 3 § 20.

Со второй причиной бороться сложнее. Рассмотрим, например, уравнение $\lg x^2=4$ и решим его двумя способами.

Первый способ. Воспользовавшись определением логарифма, находим: $x^2=10^4$; $x_1=100$, $x_2=-100$.

Второй способ. Имеем: $2\lg x=4$; $\lg x=2$; $x=100$.

Обратите внимание: при втором способе произошла потеря корня — «потерялся» корень $x=-100$. Причина в том, что вместо правильной формулы $\lg x^2 = 2\lg|x|$ мы воспользовались неправильной формулой $\lg x^2 = 2\lg x$, сужающей область определения выражения: область определения выражения $\lg x^2$ задается условием $x \neq 0$ (т.е. $x<0$ и $x>0$), тогда как область определения выражения $2\lg x$ задается условием $x>0$. Область определения сузилась, из нее «выпал» открытый луч $(-\infty, 0)$, где как раз и находится «потерявшийся» при втором способе решения корень уравнения.

Вывод: применяя при решении уравнения какую-либо формулу, следите за тем, чтобы области определения правой и левой частей формулы были одинаковыми.

Есть еще одна причина, по которой может произойти потеря корней, ее мы упомянем в начале § 56.

§ 56. ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе мы поговорим об общих идеях, на которых основано решение уравнений, о наиболее общих методах, используемых при решении уравнений любых видов.

1. Замена уравнения $h(f(x))=h(g(x))$ уравнением $f(x)=g(x)$

Этот метод мы применяли:

при решении показательных уравнений, когда переходили от уравнения $a^{f(x)}=a^{g(x)} (a>0,\ a\neq 1)$ к уравнению $f(x)=g(x)$;

при решении логарифмических уравнений, когда переходили от уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ к уравнению $f(x)=g(x)$;

при решении иррациональных уравнений, когда переходили от уравнения $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$ к уравнению $f(x)=g(x)$.

Этот метод можно применять только в том случае, когда $y=h(x)$ — монотонная функция, которая каждое свое значение принимает по одному разу. Например, $y=x^7$ — возрастающая функция, поэтому от уравнения $(2x+2)^7=(5x-9)^7$ можно перейти к уравнению $2x+2=5x-9$, откуда находим $x=\frac{11}{3}$. Расширения ОДЗ здесь не произошло, значит, это — равносильное преобразование уравнения.

Если $y=h(x)$ — немонотонная функция, то указанный метод применять нельзя, поскольку возможна потеря корней. Нельзя, например, заменить уравнение $(2x+2)^4=(5x-9)^4$ уравнением

$2x+2=5x-9$, корнем которого, как мы видели выше, является $\frac{11}{3}$.

При этом переходе «потерялся» корень $x=1$; проверьте: значение $x=1$ удовлетворяет уравнению $(2x+2)^4=(5x-9)^4$. Причина в том, что $y=x^4$ — немонотонная функция. По той же причине нельзя переходить от уравнения $\sin 17x=\sin 7x$ к уравнению $17x=7x$ с единственным корнем $x=0$. На самом деле, указанное тригонометрическое уравнение имеет бесконечное множество корней: $x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{12}$; $x=\frac{\pi n}{5}$ (см. пример 1 в § 26).

2. Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в следующем: уравнение $f(x)g(x)h(x)=0$ можно заменить совокупностью уравнений:

$$f(x)=0;\quad g(x)=0;\quad h(x)=0.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние. Многочисленные примеры применения метода разложения на множители при решении тригонометрических уравнений были даны в главах 2 и 3. Приведем еще два примера.

Пример 1. Решить уравнение $(\sqrt{x+2}-3)(2^{x^2+6x+5}-1)\ln(x-8)=0$.

Решение. Задача сводится к решению совокупности трех уравнений:

$$\sqrt{x+2}=3;\quad 2^{x^2+6x+5}=1;\quad \ln(x-8)=0.$$

Из первого уравнения находим: $x+2=9$; $x_1=7$.

Из второго уравнения находим: $x^2+6x+5=0$; $x_2=-1$, $x_3=-5$.

Из третьего уравнения находим: $x-8=1$; $x_4=9$.

Сделаем проверку. ОДЗ исходного уравнения задается системой неравенств:

$$\begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ x-8>0. \end{cases}$$

Из найденных четырех корней системе неравенств удовлетворяет лишь $x_4=9$; остальные корни являются посторонними для данного уравнения.

Ответ: 9.

Пример 2. Решить уравнение $x^3-7x+6=0$.

Решение. Представив слагаемое $7x$ в виде $x+6x$, получим последовательно:

$$x^3-x-6x+6=0;$$
$$x(x^2-1)-6(x-1)=0;$$
$$x(x-1)(x+1)-6(x-1)=0;$$
$$(x-1)(x(x+1)-6)=0;$$
$$(x-1)(x^2+x-6)=0.$$

Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$x-1=0;\quad x^2+x-6=0.$$

Из первого уравнения находим $x_1=1$, из второго — $x_2=2$, $x_3=-3$.

Поскольку все преобразования были равносильными, найденные три значения являются корнями заданного уравнения.

Ответ: 1, 2, −3.

3. Метод введения новой переменной

Этим методом мы с вами часто пользовались при решении уравнений. Суть метода проста: если уравнение $f(x)=0$ удалось преобразовать к виду $p(g(x))=0$, то нужно ввести новую переменную $u=g(x)$, решить уравнение $p(u)=0$, а затем решить совокупность уравнений:

$$g(x)=u_1;\ g(x)=u_2;\ \ldots;\ g(x)=u_n,$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни уравнения $p(u)=0$.

Умение удачно ввести новую переменную приходит с опытом. Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной. Новая переменная иногда очевидна, иногда несколько завуалирована, но «ощущается», а иногда «проявляется» лишь в процессе преобразований. Примите совет: решая уравнение, не торопитесь начинать преобразования, сначала подумайте, нельзя ли записать уравнение проще, введя новую переменную. И еще: если вы ввели новую переменную, то решите полученное уравнение относительно новой переменной до конца, т.е. до проверки корней (если это необходимо), и только потом возвращайтесь к исходной переменной.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-x+7}=\sqrt{2x^2-2x+21}$.

Решение. Положив $u=x^2-x$, получим существенно более простое иррациональное уравнение $\sqrt{u+2}+\sqrt{u+7}=\sqrt{2u+21}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(\sqrt{u+2}+\sqrt{u+7})^2=(\sqrt{2u+21})^2.$$

Далее последовательно получаем:

$$u+2+2\sqrt{u+2}\sqrt{u+7}+u+7=2u+21;$$
$$\sqrt{(u+2)(u+7)}=6;$$
$$u^2+9u+14=36;$$
$$u^2+9u-22=0;$$
$$u_1=2,\ u_2=-11.$$

Проверка найденных значений их подстановкой в уравнение $\sqrt{u+2}+\sqrt{u+7}=\sqrt{2u+21}$ показывает, что $u_1=2$ — корень уравнения, а $u_2=-11$ — посторонний корень.

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем уравнение $x^2-x=2$, т.е. квадратное уравнение $x^2-x-2=0$, решив которое находим два корня: $x_1=2$, $x_2=-1$.

Ответ: 2, −1.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{3^{x+1}+1}{7}=\frac{4}{3^{x-2}}$.

Решение. Так как $3^{x+1}=3\cdot 3^x$, а $3^{x-2}=3^x:3^2$, то заданное уравнение можно переписать в виде: $\frac{3\cdot 3^x+1}{7}=\frac{4\cdot 9}{3^x}$. Введем новую переменную $u=3^x$; получим: $\frac{3u+1}{7}=\frac{36}{u}$ и далее:

$$3u^2+u=252;$$
$$3u^2+u-252=0;$$
$$u_1=9,\ u_2=-\frac{28}{3}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$3^x=9;\ 3^x=-\frac{28}{3}.$$

Из первого уравнения находим $x=2$, второе уравнение не имеет корней.

Ответ: 2.

Пример 5. Решить уравнение $\cos 2x-5\sin x-3=0$.

Решение. Есть смысл ввести новую переменную $u=\sin x$, понимая, что от $\cos 2x$ «добраться» до $\sin x$ сравнительно несложно:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x=1-2u^2.$$

Подставив в заданное тригонометрическое уравнение u вместо $\sin x$ и $1-2u^2$ вместо $\cos 2x$, получим рациональное уравнение $(1-2u^2)-5u-3=0$ и далее: $2u^2+5u+2=0$; $u_1=-\frac{1}{2}$, $u_2=-2$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\sin x=-\frac{1}{2};\ \sin x=-2.$$

Из первого уравнения находим $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Пример 6. Решить уравнение $\lg^2 x^3+\log_{0,1}10x-7=0$.

Решение. Здесь новая переменная как бы «ощущается»: $u=\lg x$. Подготовимся к ее введению, для чего используем свойства логарифмов:

$$\lg^2 x^3=(\lg x^3)^2=(3\lg x)^2=9\lg^2 x;$$
$$\log_{0,1}10x=\log_{(0,1)^{-1}}(10x)^{-1}=-\log_{10}10x=-(\lg 10+\lg x)=-(1+\lg x).$$

Перепишем заданное уравнение в виде: $9\lg^2 x-(1+\lg x)-7=0$ и введем новую переменную $u=\lg x$; получим:

$$9u^2-(1+u)-7=0;$$
$$9u^2-u-8=0;$$
$$u_1=1,\ u_2=-\frac{8}{9}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\lg x = 1;\ \ \lg x = -\frac{8}{9}.$$

Из первого уравнения находим $x_1 = 10$, из второго $x_2 = 10^{-\frac{8}{9}}$.

Ответ: $10,\ 10^{-\frac{8}{9}}$.

Мы рассмотрели различные уравнения: иррациональное, показательное, тригонометрическое и логарифмическое. Как видите, тип уравнения не так уж важен, идея решения по сути одна и та же.

В заключение рассмотрим более сложный пример, где новая переменная «проявляется» только в процессе преобразований.

Пример 7. Решить уравнение $x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} = 40.$

Решение. Заметив, что левая часть уравнения имеет структуру $A^2 + B^2$, где $A = x$, $B = \frac{9x}{9+x}$, дополним ее до полного квадрата, прибавив и отняв $2AB$, т.е. $2x\frac{9x}{9+x}$. Получим:

$$\left(x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} - 2x\frac{9x}{9+x}\right) + 2x\frac{9x}{9+x} = 40;$$

$$\left(x - \frac{9x}{9+x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9+x} = 40;$$

$$\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9+x} - 40 = 0.$$

Новая переменная «проявилась»: $u = \frac{x^2}{9+x}$. Относительно этой новой переменной мы получили квадратное уравнение $u^2 + 18u - 40 = 0$. Находим его корни: $u_1 = 2$, $u_2 = -20$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\frac{x^2}{9+x} = 2;\ \ \frac{x^2}{9+x} = -20.$$

Из первого уравнения находим: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$; второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $1 \pm \sqrt{19}$.

4. Функционально-графический метод

Идея графического метода решения уравнения $f(x) = g(x)$ проста и понятна: нужно построить графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и найти точки их пересечения — корнями уравнения служат абсциссы этих точек. Графическим методом вы не раз пользовались, начиная с курса алгебры 7-го класса. Этот метод позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближенные, а иногда и точные значения корней.

В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить опорой на какие-либо свойства функций (потому-то мы говорим не о графическом, а о *функционально-графическом методе* решения уравнений). Если, например, *одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень* (который иногда можно угадать). Этим приемом мы уже пользовались в главах 6 и 7 при решении иррациональных, показательных и логарифмических уравнений.

Упомянем еще одну довольно красивую разновидность функционально-графического метода: *если на промежутке X наибольшее значение одной из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ равно A и наименьшее значение другой функции тоже равно A, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений* $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Решение. Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = |x - 2|$ изображены на рис. 244. Они пересекаются в двух точках A(1; 1) и B(4; 2). Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Ответ: 1, 4.

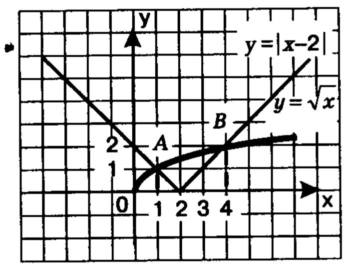


Рис. 244

Пример 9. Решить уравнение

$$x^5 + 5x - 42 = 0.$$

Решение. Достаточно очевидно, что $x = 2$ — корень уравнения. Докажем, что это единственный корень.

Преобразуем уравнение к виду: $x^5 = 42 - 5x$. Замечаем, что функция $y = x^5$ возрастает, а функция $y = 42 - 5x$ убывает. Значит, уравнение имеет только один корень.

Ответ: 2 .

Пример 10. Решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Достаточно очевидно, что $x = 2$ — корень уравнения. Докажем, что это единственный корень.

Разделив обе части уравнения на 4^x, преобразуем уравнение к виду: $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Замечаем, что функция $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ убывает, а функция $y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ возрастает. Значит, уравнение имеет только один корень.

Ответ: 2.

Пример 11. Решить уравнение $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$. Ее графиком служит парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, в вершине параболы функция достигает своего наименьшего значения. Абсциссу вершины параболы найдем из уравнения $y' = 0$. Имеем:

$$y' = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2;$$
$$2x - 2 = 0;$$
$$x = 1, \quad y(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1.$$

Итак, для функции $y = x^2 - 2x + 2$ получили $y_{\text{наим.}} = 1$. В то же время функция $y = \cos 2\pi x$ обладает свойством: $y_{\text{наиб.}} = 1$. Значит, задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем: $x = 1$. Поскольку это значение удовлетворяет и первому уравнению системы, то оно является единственным решением системы и, следовательно, единственным корнем заданного уравнения.

Ответ: 1.

§ 57. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В этом параграфе речь пойдет о принципиальных вопросах, связанных с решением неравенств с одной переменной: что такое равносильные неравенства; какие преобразования неравенств являются равносильными, а какие — нет. Эти вопросы мы обсуждали в курсе алгебры, начиная с 8-го класса, да и в настоящем учебнике о них уже шла речь, например, при решении показательных и логарифмических неравенств. Мы снова возвращаемся к этим вопросам потому, что завершая изучение школьного курса алгебры, целесообразно как бы заново переосмыслить общие идеи и методы.

1. Равносильность неравенств

Напомним, что **решением неравенства** $f(x) > g(x)$ называют всякое значение переменной x, которое обращает заданное неравенство с переменной в верное числовое неравенство. Иногда используют термин *частное решение*. Множество всех частных решений неравенства называют *общим решением*, но чаще употребляют термин *решение*. Таким образом, термин *решение* используют в трех смыслах: и как общее решение, и как частное решение, и как процесс, но обычно по смыслу бывает ясно, о чем идет речь.

Определение 1. Два неравенства с одной переменной $f(x) > g(x)$ и $p(x) > h(x)$ называют **равносильными**, если их решения (т.е. множества частных решений) совпадают.

Вы, конечно, понимаете, что использование в определении знака > непринципиально. Можно и в этом определении, и во всех утверждениях, имеющихся в данном параграфе, использовать любой другой знак неравенства, как строгого, так и нестрогого.

Определение 2. Если решение неравенства

$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$

содержится в решении неравенства

$$p(x) > h(x), \qquad (2)$$

то неравенство (2) называют **следствием неравенства** (1)

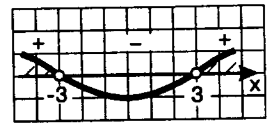


Рис. 245

Например, неравенство $x^2 > 9$ является следствием неравенства $2x > 6$. В самом деле, преобразовав первое неравенство к виду $x^2 - 9 > 0$ и далее к виду $(x-3)(x+3) > 0$ и применив метод интервалов (рис. 245), получаем, что решением неравенства служит объединение двух открытых лучей: $(-\infty, -3)$ и $(3, +\infty)$. Решение второго неравенства $2x > 6$ имеет вид $x > 3$, т.е. представляет собой открытый луч $(3, +\infty)$. Решение второго неравенства является частью решения первого неравенства, а потому первое неравенство — следствие второго.

Любопытно, что ситуация изменится радикальным образом, если в обоих неравенствах изменить знак неравенства. Неравенство $2x < 6$ будет следствием неравенства $x^2 < 9$. В самом деле, решением первого неравенства служит открытый луч $(-\infty, 3)$. Преобразовав второе неравенство к виду $x^2 - 9 < 0$ и далее к виду $(x-3)(x+3) < 0$ и применив метод интервалов (см. рис. 245), получаем, что решением неравенства служит интервал $(-3, 3)$. Решение второго неравенства является частью решения первого неравенства, а потому первое неравенство — следствие второго.

При решении уравнений мы не очень опасались того, что в результате некоторых преобразований можем получить уравнение-следствие, поскольку посторонние корни мы всегда могли отсеять с помощью проверки. В неравенствах, где решение чаще всего представляет собой бесконечное множество чисел, доводить дело до проверки нецелесообразно. Поэтому в неравенствах стараются выполнять только равносильные преобразования.

Решение неравенств, встречающихся в школьном курсе алгебры, основано на шести теоремах о равносильности, в определенном смысле аналогичных соответствующим теоремам о равносильности уравнений (см. § 55).

Теорема 1. ***Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.***

Теорема 2. ***Если обе части неравенства возвести в одну и ту же нечетную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.***

Теорема 3. *Показательное неравенство* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ *равносильно:*

а) неравенству $f(x) > g(x)$ *того же смысла, если* $a > 1$;

б) неравенству $f(x) < g(x)$ *противоположного смысла, если* $0 < a < 1$.

Теорема 4. *а) Если обе части неравенства* $f(x) > g(x)$ *умножить на одно и то же выражение* $h(x)$, *положительное при всех* x *из области определения (области допустимых значений) неравенства* $f(x) > g(x)$, *оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство* $f(x)h(x) > g(x)h(x)$, *равносильное данному.*

б) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ *умножить на одно и то же выражение* $h(x)$, *отрицательное при всех* x *из области определения неравенства* $f(x) > g(x)$, *изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство* $f(x)h(x) < g(x)h(x)$, *равносильное данному.*

Теорема 5. *Если обе части неравенства* $f(x) > g(x)$ *неотрицательны в области его определения, то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же четную степень* n *получится неравенство того же смысла:* $f(x)^n > g(x)^n$, *равносильное данному.*

Теорема 6. *Если* $f(x) > 0$ *и* $g(x) > 0$, *то логарифмическое неравенство* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ *равносильно:*

а) неравенству $f(x) > g(x)$ *того же смысла, если* $a > 1$;

б) неравенству $f(x) < g(x)$ *противоположного смысла, если* $0 < a < 1$.

Теоремами 1 и 4 вы активно пользовались в курсе алгебры 9-го класса, когда решали рациональные неравенства и их системы. Теорему 3 мы использовали выше, в § 47, для решения показательных неравенств. Теорему 6 мы использовали в § 52 для решения логарифмических неравенств.

2. Системы и совокупности неравенств

Определение 3. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти все *общие решения* заданных неравенств. Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют **частным решением системы неравенств**. Множество всех частных решений системы неравенств

представляет собой **общее решение системы неравенств** (чаще говорят просто **решение системы нерввенств**).

Решить систему неравенств — *значит найти все ее частные решения.* Решение системы неравенств представляет собой *пересечение* решений неравенств, образующих систему.

Определение 4. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из заданных неравенств. Каждое такое значение переменной называют **частным решением совокупности неравенств**. Множество всех частных решений совокупности неравенств представляет собой **решение совокупности неравенств**.

Решение *совокупности неравенств* представляет собой *объединение решений* неравенств, образующих совокупность.

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой, а неравенства, образующие совокупность, — квадратной скобкой. Впрочем, для неравенств, образующих совокупность, вполне допустима запись в строчку через точку с запятой. Например, решение неравенства $\sin^2 x > \frac{1}{4}$ сводится к решению совокупности неравенств: $\sin x > \frac{1}{2}$; $\sin x < -\frac{1}{2}$.

Пример 1. Решить систему и совокупность неравенств:

$$\text{а)}\begin{cases} 2x-1>3, \\ 3x-2 \geqslant 11; \end{cases} \qquad \text{б)}\left[\begin{array}{l} 2x-1>3, \\ 3x-2 \geqslant 11. \end{array}\right.$$

Решение. а) Решая первое неравенство системы, находим $2x > 4$, $x > 2$. Решая второе неравенство системы, находим $3x \geqslant 13$, $x \geqslant \frac{13}{3}$. Отметим эти промежутки на одной координатной прямой, использовав для первого промежутка верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю штриховку (рис. 246). Решением системы неравенств будет пересечение решенний неравенств системы, т.е. промежуток, на котором обе штриховки совпали. В рассматриваемом примере получаем луч $\left[\frac{13}{3}, +\infty\right)$.

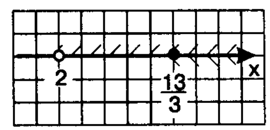


Рис. 246

б) Решением совокупности неравенств будет объединение решений неравенств совокупности. В рассматриваемом примере получаем (см. рис. 246) открытый луч $(2, +\infty)$ — промежуток, на котором имеется хотя бы одна штриховка.

Ответ: а) $x \geqslant \frac{13}{3}$; б) $x > 2$.

Если в системе из нескольких неравенств одно является следствием другого (или других), то неравенство-следствие можно отбросить. Мы этим уже фактически пользовались. Рассмотрим еще раз пример решения логарифмического неравенства из § 52.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2)\leqslant -4$.

Решение. Представим число -4 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{2}$: $-4=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=\log_{\frac{1}{2}}16$. Это позволит переписать заданное неравенство в виде:

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2)\leqslant\log_{\frac{1}{2}}16.$$

Учитывая, что здесь основанием логарифмов служит число меньше 1, составляем, пользуясь теоремой 6, систему неравенств, равносильную заданному логарифмическому неравенству:

$$\begin{cases}16+4x-x^2>0,\\16+4x-x^2\geqslant 16.\end{cases}$$

Если выполняется второе неравенство системы, то автоматически выполняется и первое неравенство (если $A\geqslant 16$, то тем более $A>0$). Значит, первое неравенство — следствие второго и его можно отбросить. Решая второе неравенство, находим:

$$x^2-4x\leqslant 0;$$
$$x(x-4)\leqslant 0;$$
$$0\leqslant x\leqslant 4.$$

Ответ: $0\leqslant x\leqslant 4$.

Снова вернемся к § 52. Мы говорили, что при решении логарифмических неравенств переходят от неравенства

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \qquad (1)$$

при $a>1$ к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)>g(x),\end{cases} \qquad (2)$$

а при $0<a<1$ к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)<g(x).\end{cases} \qquad (3)$$

Первые два неравенства каждой из этих систем определяют ОДЗ переменной для неравенства (1), а знак последнего неравенства каждой из систем либо совпадает со знаком неравенства (1) — в случае, когда $a>1$, — либо противоположен знаку неравенства (1) — в случае, когда $0<a<1$.

А теперь обратим внимание на одно обстоятельство, которое мы в общем виде не обсуждали в § 52. В каждой из составленных систем есть по одному «лишнему» неравенству. В системе (2) имеем $f(x)>g(x)$, $g(x)>0$; отсюда, по свойству *транзитивности* неравенств, можно сделать вывод, что $f(x)>0$. Это значит, что первое неравенство системы (2) является следствием второго и третьего неравенств, а неравенство-следствие можно отбросить. Таким образом, систему (2) можно заменить более простой системой:

$$\begin{cases}g(x)>0,\\f(x)>g(x).\end{cases}$$

Аналогично можно установить, что систему (3) можно заменить более простой системой неравенств:

$$\begin{cases}f(x)>0,\\f(x)<g(x).\end{cases}$$

В примере 2 нам встретился типичный случай, когда решение заданного неравенства сводится к решению системы неравенств. Бывают и более сложные неравенства, сводящиеся к модели «совокупность систем неравенств». Это значит, что надо найти решения всех составленных систем неравенств, а затем эти решения объединить.

Пример 3. Решить неравенство $\log_{x-2}(2x-3)>\log_{x-2}(24-6x)$.

Решение. Рассмотрим два случая: 1) $x-2>1$; 2) $0<x-2<1$.

В первом случае, записав условия, определяющие ОДЗ: $2x-3>0$ и $24-6x>0$, — мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, сохранив, согласно теореме 6 знак исходного неравенства: $2x-3>24-6x$.

Во втором случае, записав условия, определяющие ОДЗ: $2x-3>0$ и $24-6x>0$, — мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, изменив, согласно теореме 6 знак исходного неравенства: $2x-3<24-6x$.

Это значит, что заданное логарифмическое неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases}x-2>1,\\2x-3>0,\\24-6x>0,\\2x-3>24-6x;\end{cases} \qquad \begin{cases}0<x-2<1,\\2x-3>0,\\24-6x>0,\\2x-3<24-6x.\end{cases}$$

Из первой системы неравенств находим $\frac{27}{8}<x<4$, из второй — $2<x<3$.

Ответ: $2<x<3$; $\frac{27}{8}<x<4$.

Замечание. В первой из составленных систем при решении примера 3 можно отбросить второе неравенство, а во второй — третье. Подумайте, почему это так.

3. Иррациональные неравенства

Обсудим решение неравенства вида:

$$\sqrt{f(x)}<g(x). \qquad (4)$$

Во-первых, запишем условие, определяющее ОДЗ: $f(x)\geqslant 0$.

Во-вторых, замечаем, что при $g(x) \leqslant 0$ неравенство (4) не имеет решений, значит, можно сразу потребовать выполнения условия $g(x) > 0$.

В-третьих, замечаем, что при указанных условиях ($f(x) \geqslant 0$ и $g(x) > 0$) обе части неравенства (4) неотрицательны, значит, по теореме 5, возведя их в квадрат, получим неравенство $f(x) < (g(x))^2$, равносильное данному.

Таким образом, иррациональное неравенство (4) равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Обсудим решение неравенства вида

$$\sqrt{f(x)} > g(x). \qquad (5)$$

Во-первых, запишем условие, определяющее ОДЗ: $f(x) \geqslant 0$.

Во-вторых, замечаем, что при $g(x) < 0$ справедливость неравенства (5) не вызывает сомнений (поскольку $f(x) \geqslant 0$). Это значит, что решения системы неравенств $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) < 0$ являются одновременно и решениями неравенства (5).

В-третьих, замечаем, что, если $g(x) \geqslant 0$, то обе части неравенства (5) неотрицательны (мы, естественно, учитываем, что $f(x) \geqslant 0$). Значит, по теореме 5, возведя их в квадрат, получим неравенство $f(x) > (g(x))^2$, равносильное данному.

Таким образом, иррациональное неравенство (5) равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

Первое неравенство второй системы можно опустить (подумайте, почему).

Пример 4. Решить неравенства:

$$\text{а) } \sqrt{x^2 - x - 12} < x; \quad \text{б) } \sqrt{x^2 - x - 12} > x.$$

Решение. а) Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2. \end{cases}$$

Для решения квадратного неравенства $x^2 - x - 12 \geqslant 0$ найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - x - 12$; получим $x_1 = 4$, $x_2 = -3$. Геометрическая модель, представленная на рис. 247, помогает найти решение неравенства:

$$x \leqslant -3; \quad x \geqslant 4.$$

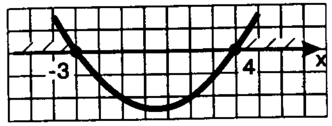


Рис. 247

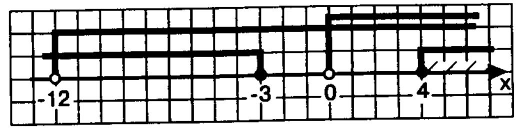


Рис. 248

Второе неравенство системы уже решено: $x > 0$. Из третьего неравенства находим: $x > -12$.

Геометрическая модель, представленная на рис. 248, помогает найти решение системы неравенств: $x \geqslant 4$.

б) Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 12 > x^2. \end{cases}$$

Геометрическая модель, представленная на рис. 249, помогает найти решение первой системы: $x \leqslant -3$.

Во второй системе можно опустить первое неравенство, поскольку оно является следствием третьего неравенства системы. Это позволяет переписать вторую систему в более простом виде:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < -12. \end{cases}$$

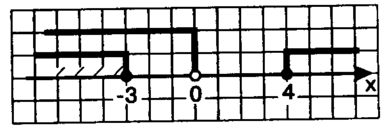


Рис. 249

Эта система не имеет решений. Значит, решение совокупности систем неравенств совпадает с решением первой системы и имеет вид $x \leqslant -3$.

Ответ: а) $x \geqslant 4$; б) $x \leqslant -3$.

4. Неравенства с модулями

Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля, решаются различными способами; мы покажем их на достаточно простом примере.

Пример 5. Решить неравенство $|2x - 5| > 4$.

Решение проведем тремя способами.

Первый способ. Имеем:

$$|2(x - 2{,}5)| > 4,$$
$$2|x - 2{,}5| > 4,$$
$$|x - 2{,}5| > 2.$$

Геометрически выражение $|x - 2{,}5|$ означает расстояние $\rho(x,\ 2{,}5)$ на координатной прямой между точками x и 2,5. Значит, нам нужно найти все такие точки x, которые удалены от точки 2,5 более, чем на 2, — это точки из промежутков $(-\infty,\ 0{,}5)$ и $(4{,}5,\ +\infty)$ (рис. 250).

Итак, получили следующие решения неравенства:

$$x < 0{,}5; \quad x > 4{,}5.$$

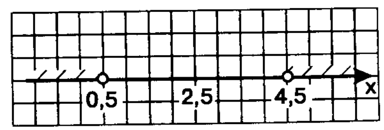


Рис. 250

Второй способ. Поскольку обе части заданного неравенства неотрицательны, то по теореме 5 возведение их в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. Получим: $|2x - 5|^2 > 4^2$.

Воспользовавшись тем, что $|a|^2=a^2$, получим:

$$(2x-5)^2>4^2,$$
$$(2x-5)^2-4^2>0,$$
$$(2x-5-4)(2x-5+4)>0,$$
$$(2x-9)(2x-1)>0,$$
$$2(x-4{,}5)\cdot 2(x-0{,}5)>0,$$
$$(x-4{,}5)(x-0{,}5)>0.$$

Применив метод интервалов (рис. 251), получим: $x<0{,}5$; $x>4{,}5$.

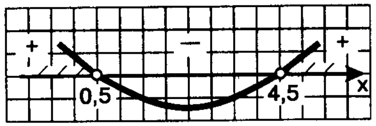


Рис. 251

Третий способ. Выражение $2x-5$ может быть неотрицательным или отрицательным. Если $2x-5\geqslant 0$, то $|2x-5|=2x-5$ и заданное неравенство принимает вид $2x-5>4$.

Если $2x-5<0$, то $|2x-5|=-(2x-5)$ и заданное неравенство принимает вид: $-(2x-5)>4$.

Таким образом, получаем совокупность двух систем неравенств:

$$\begin{cases}2x-5\geqslant 0,\\ 2x-5>4;\end{cases}\quad \begin{cases}2x-5<0,\\ -(2x-5)>4.\end{cases}$$

Решая первую систему, получаем:

$$\begin{cases}x\geqslant 2{,}5,\\ x>4{,}5,\end{cases}$$

т.е. $x>4{,}5$.

Решая вторую систему, получаем:

$$\begin{cases}x<2{,}5,\\ x<0{,}5,\end{cases}$$

т.е. $x<0{,}5$.

Объединяя найденные решения двух систем, получаем: $x<0{,}5$; $x>4{,}5$.

Ответ: $x<0{,}5$; $x>4{,}5$.

Из указанных трех способов наиболее универсальным является третий. Но поскольку он представляется достаточно сложным с технической точки зрения, то, где возможно, стараются использовать второй и первый способы.

Пример 6. Решить неравенство $|x^2-3x+2|\leqslant 2x-x^2$.

Решение. Здесь можно применить два из указанных в предыдущем примере способов решения: 1) рассмотрение двух случаев знака выражения, содержащегося под знаком модуля, и сведение заданного неравенства к совокупности систем неравенств; 2) возведение обеих частей неравенства в квадрат.

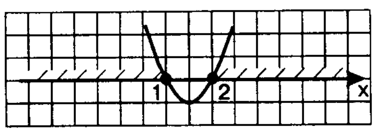


Рис. 252

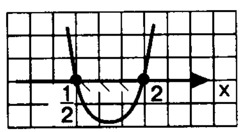


Рис. 253

Первый способ. Если $x^2-3x+2\geqslant 0$, то $|x^2-3x+2|=x^2-3x+2$, и заданное неравенство принимает вид: $x^2-3x+2\leqslant 2x-x^2$.

Если $x^2-3x+2<0$, то $|x^2-3x+2|=-(x^2-3x+2)$, и заданное неравенство принимает вид: $-(x^2-3x+2)\leqslant 2x-x^2$.

Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant 0,\\ x^2-3x+2\leqslant 2x-x^2;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-3x+2<0,\\ -(x^2-3x+2)\leqslant 2x-x^2.\end{cases}$$

1) Решим первое неравенство первой системы. Найдем корни уравнения $x^2-3x+2=0$; получим $x_1=1$, $x_2=2$. Схематически изобразив параболу $y=x^2-3x+2$ (ее ветви направлены вверх), получаем с помощью геометрической модели, представленной на рис. 252, решение неравенства:

$$x\leqslant 1,\quad x\geqslant 2.$$

2) Решим второе неравенство первой системы, но сначала преобразуем его к более простому виду: $2x^2-5x+2\leqslant 0$. Найдем корни уравнения $2x^2-5x+2=0$; $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$. Схематически изобразив параболу $y=2x^2-3x+2$ (ее ветви направлены вверх), получаем с помощью геометрической модели, представленной на рис. 253, решение неравенства:

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2.$$

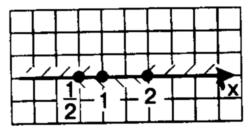


Рис. 254

3) Отметив найденные решения первого и второго неравенств на координатной прямой, находим пересечение решений (рис. 254): $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$; $x=2$. Это — решение первой системы неравенств.

4) Решим первое неравенство второй системы. С помощью геометрической модели, представленной на рис. 252, получаем решение неравенства: $1<x<2$.

5) Решим второе неравенство второй системы, но сначала преобразуем его к более простому виду:

$$-(x^2-3x+2)\leqslant 2x-x^2,$$
$$-x^2+3x-2-2x+x^2\leqslant 0,$$
$$x\leqslant 2.$$

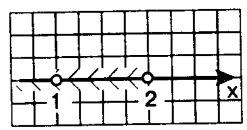


Рис. 255

6) Отметив найденные решения первого и второго неравенств на координатной прямой, находим пересечение решений (рис. 255): $1<x<2$. Это — решение второй системы неравенств.

7) Объединяя найденные решения систем неравенств

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1;\quad x=2;\quad 1<x<2,$$

получаем: $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$.

Второй способ. Перепишем данное неравенство в виде:

$$2x-x^2\geqslant |x^2-3x+2|\geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $2x-x^2\geqslant 0$. Значит, обе части заданного неравенства неотрицательны, и мы имеем право возвести их в квадрат. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - x^2 \geq 0, \\ |x^2 - 3x + 2|^2 \leq (2x - x^2)^2. \end{cases}$$

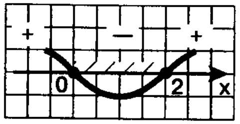


Рис. 256

Решим первое неравенство этой системы:

$$2x - x^2 \geq 0,$$
$$x^2 - 2x \leq 0,$$
$$x(x-2) \leq 0,$$

откуда находим (рис. 256): $0 \leq x \leq 2$.

Решим второе неравенство системы:

$$|x^2 - 3x + 2|^2 \leq (2x - x^2)^2,$$
$$(x^2 - 3x + 2)^2 \leq (2x - x^2)^2,$$
$$(x^2 - 3x + 2)^2 - (2x - x^2)^2 \leq 0,$$
$$((x^2 - 3x + 2) - (2x - x^2))((x^2 - 3x + 2) + (2x - x^2)) \leq 0,$$
$$(2x^2 - 5x + 2)(-x + 2) \leq 0,$$
$$(2x^2 - 5x + 2)(x - 2) \geq 0.$$

Корни квадратного трехчлена $2x^2 - 5x + 2$ найдены выше: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. С их помощью составим разложение трехчлена на множители:

$$2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Это позволяет переписать последнее неравенство в виде

$$2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \geq 0$$

и далее: $(x-2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0.$

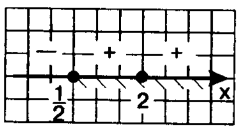


Рис. 257

Отметим точки $x = \frac{1}{2}$ и $x = 2$ на координатной прямой и расставим знаки функции $y = (x-2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ на полученных промежутках (рис. 257). Эта геометрическая модель позволяет сделать вывод о решении неравенства $(x-2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0$; получаем: $x \geq \frac{1}{2}$.

Итак, для первого неравенства системы получили: $0 \leq x \leq 2$, для второго — $x \geq \frac{1}{2}$. Значит, решение системы таково: $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

Ответ: $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

§ 58. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В курсе алгебры 7—9-го классов мы неоднократно встречались с системами двух рациональных уравнений с двумя переменными. Для их решения мы использовали метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных, графический метод. В главе 7 нам встречались системы показательных и

логарифмических уравнений, и мы убедились, что используются те же методы. В этом параграфе мы на ряде примеров несколько расширим представления о решении систем уравнений: познакомимся с новыми методами, рассмотрим ранее не встречавшиеся классы систем уравнений, например, иррациональных и тригонометрических, рассмотрим системы уравнений не только с двумя переменными.

Определение 1. Если поставлена задача — найти такие пары значений $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x, y) = 0$ и уравнению $q(x, y) = 0$, то говорят, что данные уравнения образуют **систему уравнений:**

$$\begin{cases} p(x, y) = 0, \\ q(x, y) = 0. \end{cases}$$

Пару значений $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого, и второго уравнения системы, называют *решением системы уравнений*. *Решить систему уравнений* — это значит найти все ее решения или установить, что решений нет.

Можно говорить и о системе из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} p(x, y, z) = 0, \\ q(x, y, z) = 0, \\ r(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

В этом случае речь идет об отыскании троек чисел (x, y, z), удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы. Вообще можно говорить о системе, содержащей любое число уравнений с любым числом переменных.

Вы знаете, что основная идея решения уравнения состоит в постепенном переходе от одного уравнения к другому, более простому, но равносильному заданному. Если же осуществляется переход к уравнению-следствию, то обязательна проверка найденных корней, поскольку среди них могут оказаться посторонние для заданного уравнения. Так же обстоит дело и при решении систем уравнений.

Определение 2. Две системы уравнений называют **равносильными**, если они имеют одни и те же решения или если обе системы не имеют решений.

Метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных, которые вы изучили ранее, абсолютно корректны с точки зрения равносильности. Иными словами, используя эти методы, мы заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе. Если же в процессе решения системы мы применяли неравносильные преобразования (возведение в квадрат обеих частей уравнения, умножение уравнений системы или преобразования, которые привели к расширению области определения какого-либо уравнения системы), то все найденные решения следует проверить подстановкой в исходную систему.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy-6=\dfrac{y^3}{x}, \\ xy+24=\dfrac{x^3}{y}. \end{cases}$$

Решение. Перемножив уравнения системы, получим:

$$(xy-6)(xy+24)=\frac{y^3}{x}\cdot\frac{x^3}{y},$$

$$(xy-6)(xy+24)=x^2y^2.$$

Положим, ради удобства, $z = xy$. Получим: $(z-6)(z+24)=z^2$ и далее: $z^2-6z+24z-144=z^2$, $18z=144$, $z=8$.

Итак, перемножив оба уравнения системы, мы получили довольно простую зависимость между переменными: $xy = 8$. Это уравнение рассмотрим совместно с одним из уравнений исходной системы, например, с первым:

$$\begin{cases} xy-6=\dfrac{y^3}{x}, \\ xy=8. \end{cases}$$

Теперь можно воспользоваться методом подстановки. Выразим из второго уравнения x через y и подставим полученное выражение вместо x в первое уравнение системы. Имеем:

$$\begin{cases} x=\dfrac{8}{y}, \\ 8-6=y^3:\left(\dfrac{8}{y}\right). \end{cases}$$

После упрощений второе уравнение принимает вид $y^4=16$, откуда получаем: $y_1=2$, $y_2=-2$. Используя соотношение $x=\dfrac{8}{y}$, находим соответственно $x_1=4$, $x_2=-4$.

Итак, получили два решения: (4; 2), (−4; −2). Но, поскольку в процессе решения системы использовался «ненадежный» (с точки зрения равносильности) метод умножения уравнений системы, найденные пары значений надо проверить подстановкой в заданную систему.

Подставив $x=4$, $y=2$ в уравнения заданной системы, получим:

$$\begin{cases} 8-6=\dfrac{2^3}{4}, \\ 8+24=\dfrac{4^3}{2}; \end{cases}$$

это — два верных числовых равенства.

Подставив $x=-4$; $y=-2$ в уравнения заданной системы, получим:

$$\begin{cases} 8-6=\dfrac{(-2)^3}{(-4)}, \\ 8+24=\dfrac{(-4)^3}{(-2)}; \end{cases}$$

это тоже два верных числовых равенства.

Значит, обе найденные пары удовлетворяют заданной системе уравнений.

Ответ: (4; 2), (−4; −2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2, \\ 4y^2-1=3y(x-1). \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся методом введения новой переменной: положим $z=\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}$. Тогда первое уравнение системы примет вид: $z+\dfrac{1}{z}=2$.

Имеем: $z^2+1=2z$, $z^2-2z+1=0$, $(z-1)^2=0$, $z=1$.

Возвращаясь к переменным x, y, получаем уравнение: $\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}=1$.

Далее находим: $\dfrac{3x-2y}{2x}=1^2$, $3x-2y=2x$, $x=2y$.

Итак, первое уравнение системы нам удалось заменить более простым уравнением $x=2y$. Рассмотрев его совместно со вторым уравнением заданной системы, получим более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} x=2y, \\ 4y^2-1=3y(x-1), \end{cases}$$

для решения которой «напрашивается» метод подстановки, поскольку уже имеется готовое выражение переменной x через переменную y. Получаем:

$$4y^2-1=3y(2y-1),$$
$$4y^2-1=6y^2-3y,$$
$$2y^2-3y+1=0,$$
$$y_1=1,\quad y_2=\frac{1}{2}.$$

Поскольку $x=2y$, то получаем соответственно $x_1=2, x_2=1$.

Итак, получили два решения: (2; 1), $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$. Но, поскольку в процессе решения системы использовался «ненадежный» (с точки зрения равносильности) метод — возведение в квадрат обеих частей одного из уравнений, — найденные пары значений надо проверить подстановкой в заданную систему. Эта проверка показывает, что посторонних решений нет.

Ответ: (2; 1), $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x\ \sin y = 0{,}75, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}75, \\ \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 3. \end{cases}$$

Применим метод деления: разделим левую часть первого уравнения системы на левую часть второго уравнения, а правую — на правую. Получим: $\cos x \cos y = \frac{1}{4}$. Сразу заметим, что при этом делении потери решений не произойдет, поскольку обе части второго уравнения системы, которое мы использовали как бы в качестве делителя, не могут одновременно обратиться в нуль. Мы получаем более простую (хотя бы по внешнему виду) систему тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}75, \\ \cos x \cos y = 0{,}25. \end{cases}$$

Теперь воспользуемся методом алгебраического сложения. Сложив оба уравнения системы, получим:

$$\sin x \sin y + \cos x \cos y = 1,$$

т.е. $\cos(x - y) = 1$. Вычитая первое уравнение системы из второго, получаем:

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = 0{,}25 - 0{,}75,$$

т.е. $\cos(x + y) = -\frac{1}{2}$.

Получили более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим: $x - y = 2\pi k$, из второго — $x + y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ (где, напомним, как обычно это бывает в тригонометрических уравнениях, параметры k и n принимают любые целые значения: $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$).

Удобнее записать полученный результат в виде двух систем уравнений относительно переменных x и y:

$$\begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{cases}$$

Сложив уравнения первой системы, получим: $2x = 2\pi k + \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, откуда находим: $x = \frac{\pi}{3} + \pi(n + k)$.

Вычтя в первой системе первое уравнение из второго, получим:

$$2y = -2\pi k + \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

откуда находим: $y = \frac{\pi}{3} + \pi(n - k)$.

Сделав то же самое со второй системой уравнений, получим:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi(n + k),$$

$$y = -\frac{\pi}{3} + \pi(n - k).$$

Ответ: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \pi(n - k); \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + \pi(n - k), \end{cases}$

где $k \in Z$, $n \in Z$.

Пример 4. Составить уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что она проходит через точки (1; 1), (2; 2) и (–1; 11).

Решение. Речь идет об отыскании коэффициентов a, b, c.

По условию парабола проходит через точку (1; 1). Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = 1$, $y = 1$, получим: $1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$, т.е.

$$a + b + c = 1.$$

По условию парабола проходит через точку (2; 2). Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = 2$, $y = 2$, получим: $2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$, т.е.

$$4a + 2b + c = 2.$$

По условию парабола проходит через точку (–1; 11). Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = -1$, $y = 11$, получим:

$$11 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c,$$

$$a - b + c = 11.$$

В итоге получаем систему из трех уравнений с тремя переменными a, b, c:

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ 4a + 2b + c = 2, \\ a - b + c = 11. \end{cases}$$

Выразим c из первого уравнения: $c = 1 - a - b$. Подставим полученное выражение вместо c во второе и третье уравнения системы:

$$4a + 2b + (1 - a - b) = 2,$$

$$3a + b = 1,$$

и соответственно

$$a - b + (1 - a - b) = 11,$$

$$-2b = 10,$$

$$b = -5.$$

Фактически мы получили более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} b = -5, \\ 3a + b = 1, \\ c = 1 - a - b. \end{cases}$$

Подставив значение $b = -5$ во второе уравнение, найдем: $a = 2$. Подставив найденные значения $a = 2$, $b = -5$ в третье уравнение, получим $c = 4$.

Ответ: $y = 2x^2 - 5x + 4$.

Пример 5. Три трактора вспахивают поле. Чтобы вспахать все поле, первому трактору требуется времени на 1 ч больше, чем второму, и на 2 ч меньше, чем третьему. Первый и третий тракторы при совместной работе вспашут все поле за 2 ч 24 мин. Сколько времени уйдет на вспашку поля при совместной работе трех тракторов?

Решение. <u>Первый этап.</u> *Составление математической модели.*

Напомним, что если речь идет о выполнении некоторой работы, не охарактеризованной в количественном плане, т.е. не сказано, сколько деталей надо сделать, сколько гектаров земли вспахать и т.д., то объем работы считают равным 1, а части работы выражают в долях единицы.

Пусть x ч — время, необходимое первому трактору, чтобы вспахать поле в одиночку;

y ч — время, необходимое второму трактору, чтобы вспахать поле в одиночку;

z ч — время, необходимое третьему трактору, чтобы вспахать поле в одиночку.

Тогда согласно условиям задачи: $x-y=1$, $z-x=2$.

Если все поле (т.е. 1) первый трактор может вспахать за x ч, то за 1 ч он вспашет часть поля, выражаемую дробью $\frac{1}{x}$:

$\frac{1}{x}$ — часть поля, которую вспашет 1-й трактор за 1 ч.

Аналогично

$\frac{1}{y}$ — часть поля, которую вспашет 2-й трактор за 1 ч;

$\frac{1}{z}$ — часть поля, которую вспашет 3-й трактор за 1 ч.

По условию, работая вместе, первый и третий тракторы вспахали все поле за 2 ч 24 мин, т.е. за $\frac{12}{5}$ ч. Это значит, что $\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=1$, т.е. $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{5}{12}$.

В итоге получаем систему из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ z-x=2, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{5}{12}. \end{cases}$$

Математическая модель рассматриваемой ситуации составлена.

<u>Второй этап.</u> *Работа с составленной моделью.*

Воспользуемся методом подстановки. Выразим z через x из второго уравнения системы: $z=x+2$. Подставим выражение $x+2$ вместо z в третье уравнение системы: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{5}{12}$. Решая это рациональное уравнение, последовательно получаем:

$$\frac{1^{12(x+2)}}{x}+\frac{1^{12x}}{x+2}=\frac{5^{x(x+2)}}{12};$$

$$12x+24+12x=5x^2+10x;$$

$$5x^2-14x-24=0;$$

$$x_1=4;\ \ x_2=-\frac{6}{5}.$$

Оба найденных значения удовлетворяют условиям: $x+2\neq0$, $x\neq0$, т.е. являются корнями рационального уравнения.

Осталось найти соответствующие значения y и z. Для этого воспользуемся уравнениями $x-y=1$ и $z-x=2$.

Если $x=4$, то из этих уравнений находим: $y=3$, $z=6$; если $x=-\frac{6}{5}$, то из тех же уравнений находим: $y=-\frac{11}{5}$, $z=\frac{4}{5}$.

Итак, составленная система уравнений имеет два решения: (4; 3; 6) и $\left(-\frac{6}{5};\ -\frac{11}{5};\ \frac{4}{5}\right)$.

<u>Третий этап.</u> *Ответ на вопрос задачи.*

Во-первых, по смыслу задачи отрицательные значения переменных нас не устраивают, следовательно, оставляем только одну тройку значений (4; 3; 6).

Во-вторых, нас спрашивают, сколько времени уйдет на вспашку поля при совместной работе трех тракторов? Будем рассуждать так:

За 1 ч первый трактор вспашет $\frac{1}{4}$ часть поля, второй — $\frac{1}{3}$, третий — $\frac{1}{6}$. Значит, при совместной работе они вспашут за 1 ч часть поля, выражаемую суммой трех дробей, т.е. $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, а за t ч соответственно $t\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$, т.е. $\frac{3t}{4}$. Если они вспашут все поле, то $\frac{3t}{4}=1$, т.е. $t=\frac{4}{3}$.

Осталось лишь уточнить, что $\frac{4}{3}$ ч = 1 ч 20 мин.

Ответ: 1 ч 20 мин.

Пример 6. Найти четыре числа, удовлетворяющие следующим условиям: первые три из них образуют конечную геометрическую прогрессию, последние три образуют конечную арифметическую прогрессию, сумма всех чисел равна 28, четвертое число больше первого на 14.

Решение. <u>Первый этап.</u> *Составление математической модели.*

Обозначим искомые числа буквами x, y, z, t.

По условию, числа x, y, z образуют конечную геометрическую прогрессию. Согласно характеристическому свойству геометрической прогрессии это означает, что

$$y^2=xz.$$

По условию, числа y, z, t образуют конечную арифметическую прогрессию. Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии это означает, что

$$2z=y+t.$$

Кроме того, из условия следует, что

$$x+y+z+t=28,$$
$$t-x=14.$$

Таким образом, мы составили систему из четырех уравнений с четырьмя переменными:

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ 2z = y + t, \\ x + y + z + t = 28, \\ t - x = 14. \end{cases}$$

<u>Второй этап.</u> *Работа с составленной моделью.*

Воспользуемся методом подстановки. Выразим t через x из четвертого уравнения системы: $t = x + 14$. Подставим выражение $x + 14$ вместо t во второе и третье уравнения системы. Получим:

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ 2z = y + (x + 14), \\ x + y + z + (x + 14) = 28, \end{cases} \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ 2z = y + x + 14, \\ 2x + y + z = 14. \end{cases}$$

Снова воспользуемся методом подстановки. Выразим z через x и y из третьего уравнения системы: $z = 14 - 2x - y$. Подставим выражение $14 - 2x - y$ вместо z в первое и второе уравнения системы. Получим:

$$\begin{cases} y^2 = x(14 - 2x - y), \\ 2(14 - 2x - y) = y + x + 14, \end{cases} \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} y^2 = x(14 - 2x - y), \\ 5x + 3y = 14. \end{cases}$$

В третий раз воспользуемся методом подстановки. Выразим y через x из второго уравнения системы: $y = \dfrac{14 - 5x}{3}$ и подставим это выражение вместо y в первое уравнение системы.

Получим: $\left(\dfrac{14 - 5x}{3}\right)^2 = x\left(14 - 2x - \dfrac{14 - 5x}{3}\right)$.

Далее последовательно имеем:

$$\left(\frac{14 - 5x}{3}\right)^2 = 14x - 2x^2 - x \cdot \frac{14 - 5x}{3},$$

$$(14 - 5x)^2 = 9(14x - 2x^2) - 3(14x - 5x^2),$$

$$196 - 140x + 25x^2 = 126x - 18x^2 - 42x + 15x^2,$$

$$28x^2 - 224x + 196 = 0,$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0,$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 7.$$

Если $x = 1$, то последовательно находим значения остальных переменных:

$$y = \frac{14 - 5x}{3} = \frac{14 - 5}{3} = 3;$$

$$z = 14 - 2x - y = 14 - 2 - 3 = 9;$$

$$t = x + 14 = 1 + 14 = 15.$$

Если $x = 7$, то:

$$y = \frac{14 - 5x}{3} = \frac{14 - 35}{3} = -7;$$

$$z = 14 - 2x - y = 14 - 14 + 7 = 7;$$

$$t = x + 14 = 7 + 14 = 21.$$

<u>Третий этап.</u> *Ответ на вопрос задачи.*

Мы нашли две четверки чисел: 1, 3, 9, 15 и 7, −7, 7, 21. Обе удовлетворяют всем четырем условиям задачи.

Ответ: 1, 3, 9, 15 или 7, −7, 7, 21.

§ 59. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

Если дано уравнение $f(x, a) = 0$, которое надо решить относительно переменной x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то его называют **уравнением с параметром** a. Основная трудность, связанная с решением уравнений (и тем более неравенств) с параметром, состоит в следующем. При одних значениях параметра уравнение не имеет решений, при других имеет бесконечно много решений, при третьих оно решается по одним формулам, при четвертых — по другим. Как все это учесть? Сразу скажем, что решению уравнений и неравенств с параметрами посвящена масса учебно-методической литературы. Наша задача весьма скромна: завершая изучение курса алгебры в школе, дать вам некоторое представление о том, как рассуждают при решении уравнений и неравенств с параметрами. Для этого мы рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Решить относительно x:

а) уравнение $2a(a - 2)x = a - 2$;

б) неравенство $2a(a - 2)x > a - 2$.

Решение. а) Обычно корень уравнения вида $bx = c$ мы находим без труда: $x = \dfrac{c}{b}$, поскольку в конкретном уравнении коэффициент b отличен от нуля. В заданном уравнении коэффициент при x равен $2a(a - 2)$, и поскольку значение параметра a нам неизвестно и в принципе оно может быть любым, следует подстраховаться, т.е. сначала предусмотреть возможность обращения указанного коэффициента в нуль.

Рассмотрим следующие случаи:

$$1)\ a = 0; \quad 2)\ a = 2; \quad 3)\ a \neq 0, \quad a \neq 2.$$

В первом случае (при $a = 0$) заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = -2$; это уравнение не имеет корней.

Во втором случае (при $a = 2$) заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$; этому уравнению удовлетворяют любые значения переменной x.

В третьем случае (при $a \neq 0$, $a \neq 2$) коэффициент при x отличен от нуля и, следовательно, на этот коэффициент можно разделить обе части уравнения. Получим: $x = \frac{a-2}{2a(a-2)}$, т.е. $x = \frac{1}{2a}$.

б) Решая неравенство, нужно учитывать знак коэффициента при x. Поэтому для решения заданного неравенства нужно рассмотреть не три случая, как это было в п. а), а пять:

$$1)\ a=0;\quad 2)\ a=2;\quad 3)\ a<0;\quad 4)\ 0<a<2;\quad 5)\ a>2.$$

В первом случае (при $a=0$) заданное неравенство принимает вид $0 \cdot x > -2$; этому неравенству удовлетворяют любые значения переменной x.

Во втором случае (при $a = 2$) заданное неравенство принимает вид $0 \cdot x > 0$; это неравенство не имеет решений.

В третьем случае (при $a<0$) коэффициент $2a(a-2)$ положителен, значит, деля на него обе части заданного неравенства, знак неравенства следует оставить таким, каким он был:

$$x > \frac{a-2}{2a(a-2)},\ \text{т.е.}\ x > \frac{1}{2a}.$$

Сразу заметим, что так же будет обстоять дело и в пятом случае (при $a>2$). В этом случае, как и в третьем, коэффициент $2a(a-2)$ положителен и, решая заданное неравенство, получаем: $x > \frac{1}{2a}$.

Осталось рассмотреть четвертый случай, когда $0<a<2$. В этом случае коэффициент $2a(a-2)$ отрицателен, значит, деля на него обе части заданного неравенства, знак неравенства следует изменить на противоположный:

$$x < \frac{a-2}{2a(a-2)},\ \text{т.е.}\ x < \frac{1}{2a}.$$

Ответ: а) Если $a=0$, то корней нет; если $a=2$, то x — любое действительное число; если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{2a}$.

б) Если $a=2$, то решений нет; если $a=0$, то x — любое действительное число; если $a<0$ или $a>2$, то $x > \frac{1}{2a}$; если $0<a<2$, то $x < \frac{1}{2a}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) = 0.$$

Решение. По виду это уравнение представляется квадратным. Но (внимание!) значение параметра a нам неизвестно, и оно вполне может оказаться равным 1; в этом случае коэффициент при x^2 обращается в нуль и уравнение квадратным не является, оно будет линейным. Квадратные и линейные уравнения решаются по различным алгоритмам.

Итак, нам следует рассмотреть два случая: $a=1$ и $a \neq 1$.

В первом случае (при $a = 1$) уравнение принимает следующий вид: $0 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x + 7 = 0$, т.е. $6x+7=0$. Решив это линейное уравнение, получаем $x = -\frac{7}{6}$.

Во втором случае (при $a \neq 1$) мы имеем квадратное уравнение

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) = 0.$$

Найдем его дискриминант:

$$D = (2(2a+1))^2 - 4(a-1)(4a+3) = 4(4a^2+4a+1) - 4(4a^2-a-3) =$$
$$= 20a + 16 = 4(5a+4).$$

Итак, $D = 4(5a+4)$.

Дальнейшие рассуждения зависят от знака дискриминанта. Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет корней; если $D=0$, то уравнение имеет один корень; если $D>0$, то уравнение имеет два корня. Дискриминант обращается в нуль при $a = -\frac{4}{5}$, положителен при $a > -\frac{4}{5}$, отрицателен при $a < -\frac{4}{5}$. Именно эти три случая нам и предстоит теперь рассмотреть.

Начнем со случая, когда $a < -\frac{4}{5}$. В этом случае $D<0$ и, следовательно, квадратное уравнение не имеет корней.

Пусть теперь $a > -\frac{4}{5}$ (но, напомним, $a \neq 1$). В этом случае $D>0$ и, следовательно, квадратное уравнение имеет два корня, которые мы найдем по известной формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-2(2a+1) \pm \sqrt{4(5a+4)}}{2(a-1)}.$$

Полученное выражение можно упростить, если вынести из-под знака квадратного корня множитель 2 и сократить дробь на 2. Получим:

$$x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $a = -\frac{4}{5}$. Используя написанную формулу для корней квадратного уравнения, получаем:

$$x_1 = x_2 = \frac{-\left(2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 1\right) \pm \sqrt{0}}{-\frac{4}{5} - 1} = \frac{-\left(-\frac{8}{5} + 1\right)}{-\frac{9}{5}} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: если $a=1$, то $x = -\frac{7}{6}$;

если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$;

если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет;

если $a > -\frac{4}{5}$ (но $a \neq 1$), то уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x-a} = 2a - x$.

Решение. Сначала будем действовать по стандартной схеме — возведем обе части заданного иррационального уравнения в квадрат и решим полученное квадратное уравнение:

$$(\sqrt{x-a})^2 = (2a-x)^2,$$
$$x - a = 4a^2 - 4ax + x^2,$$

$$x^2-(4a+1)x+4a^2+a=0.$$

Найдем дискриминант: $D=(4a+1)^2-4(4a^2+a)=4a+1$. Далее:

$$x_{1,2}=\frac{4a+1\pm\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Теперь надо выполнить проверку, подставляя поочередно каждый из найденных корней в исходное уравнение. Эта проверка, как нетрудно догадаться, будет весьма и весьма сложной. Мы выберем другой путь — графический: построим графики функций: $y=\sqrt{x-a}$ и $y=2a-x$ и найдем точки их пересечения. При этом целесообразно рассмотреть три случая:

$$a=0,\ a<0,\ a>0.$$

В первом случае (при $a=0$) заданное уравнение принимает вид $\sqrt{x}=-x$. Построив графики функций $y=\sqrt{x}$, $y=-x$ (рис. 258), убеждаемся, что они имеют одну общую точку (0; 0), а потому уравнение имеет только один корень $x=0$.

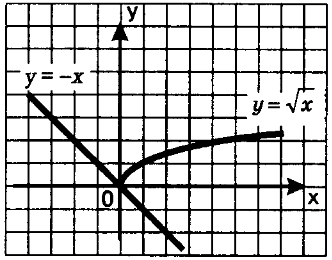


Рис. 258

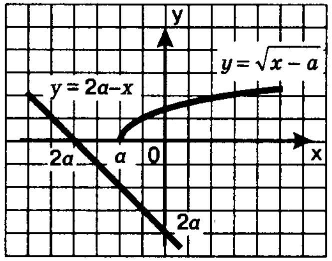


Рис. 259

Во втором случае (при $a<0$) графики функций $y=2a-x$ и $y=\sqrt{x-a}$ не пересекаются (рис. 259); значит, заданное уравнение не имеет корней.

В третьем случае (при $a>0$) графики функций $y=2a-x$ и $y=\sqrt{x-a}$ пересекаются в одной точке (рис. 260); значит, заданное уравнение имеет один корень. Следовательно, из двух полученных выше корней один окажется посторонним. Какой? Ответ можно почерпнуть из графической иллюстрации, представленной на рис. 260. Абсцисса точки пересечения графиков меньше, чем $2a$ (это — абсцисса точки пересечения прямой $y=2a-x$ с осью x). Из двух найденных корней: $x_1=\dfrac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$ и $x_2=\dfrac{4a+1+\sqrt{4a+1}}{2}$ второй явно больше, чем $2a$; чтобы в этом убедиться, достаточно переписать второй корень в виде: $x_2=2a+\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

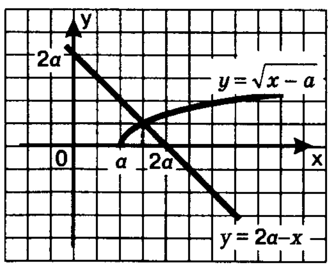


Рис. 260

Итак, если $a>0$, то заданное уравнение имеет один корень

$$x=\frac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Ответ: если $a<0$, то корней нет;
если $a=0$, то $x=0$;
если $a>0$, то $x=\dfrac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

З а м е ч а н и е. В только что решенном примере ответ можно записать компактнее. Дело в том, что записанная для случая $a>0$ формула для корня уравнения пригодна и для случая $a=0$: если $a=0$, то по указанной формуле получаем $x=0$. Поэтому ответ можно было записать так: если $a<0$, то корней нет; если $a\geqslant 0$, то:

$$x=\frac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Пример 4. При каких значениях параметра a корни уравнения $2ax^2-2x-3a-2=0$ меньше 1.

Решение. Если $a=0$, то уравнение принимает вид $-2x-2=0$; корень этого уравнения $x=-1$ удовлетворяет заданному условию, он меньше 1.

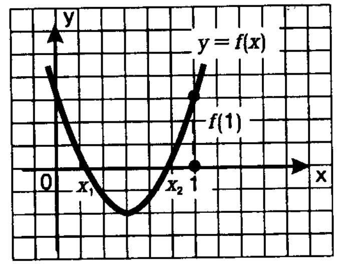


Рис. 261

Если $a\neq 0$, то заданное уравнение является квадратным. Графиком функции $y=f(x)$, где $f(x)=2ax^2-2x-3a-2$, является парабола с ветвями вверх, если $2a>0$, и ветвями вниз, если $2a<0$. Поскольку корни уравнения по условию должны быть меньше 1, упомянутая выше парабола должна располагаться в координатной плоскости так, как изображено на рис. 261 (для случая $2a>0$) и на рис. 262 (для случая $2a<0$).

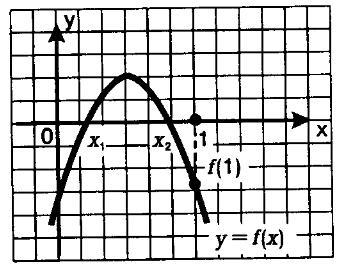


Рис. 262

Дадим аналитическое описание геометрической модели, представленной на рис. 261. Во-первых, напомним, при $2a>0$ ветви параболы направлены вверх. Во-вторых, парабола обязательно пересекается с осью абсцисс (в крайнем случае касается ее), иначе у квадратного уравнения не будет корней. Корни есть, значит, дискриминант D неотрицателен, т.е. $D\geqslant 0$. В-третьих, в точке $x=1$ имеем $f(1)>0$. В-четвертых, $f'(1)>0$, поскольку в окрестности точки $x=1$ функция возрастает.

Итак, получаем систему неравенств — аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рис. 261:

$$\begin{cases}2a>0,\\ D\geqslant 0,\\ f(1)>0,\\ f'(1)>0.\end{cases}$$

Аналогичные рассуждения позволяют составить вторую систему неравенств — аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рис. 262:

$$\begin{cases} 2a<0, \\ D\geqslant 0, \\ f(1)<0, \\ f'(1)<0. \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств. Составим выражение для дискриминанта D квадратного трехчлена $2ax^2-2x-3a-2$:

$$D=4-4\cdot 2a\cdot(-3a-2)=24a^2+16a+4.$$

Составим выражение для $f(1)$:

$$f(1)=2a\cdot 1^2-2\cdot 1-3a-2=-a-4.$$

Составим выражение для $f'(1)$:

$$f'(x)=2a\cdot 2x-2=4ax-2;$$

$$f'(1)=4a-2.$$

Таким образом, первая система неравенств принимает вид:

$$\begin{cases} 2a>0, \\ 24a^2+16a+4\geqslant 0, \\ -a-4>0, \\ 4a-2>0. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений, поскольку из первого ее неравенства получаем $a>0$, а из третьего получаем $a<-4$, что одновременно выполняться не может ни при каких значениях a.

Вторая система неравенств принимает вид:

$$\begin{cases} 2a<0, \\ 24a^2+16a+4\geqslant 0, \\ -a-4<0, \\ 4a-2<0. \end{cases}$$

Сразу обратим внимание на то, что квадратный трехчлен $24a^2+16a+4$ имеет отрицательный дискриминант ($D=16^2-4\cdot 4\cdot 24<0$) и положительный старший коэффициент. Значит, при всех значениях a выполняется неравенство $24a^2+16a+4>0$, а потому квадратное неравенство в данной системе неравенств можно отбросить. Далее имеем

$$\begin{cases} a<0, \\ a>-4, \\ a<\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение этой системы достаточно очевидно: $-4<a<0$.

Итак, мы нашли все интересующие нас значения параметра a:

$$a=0; \quad -4<a<0.$$

Ответ: $-4<a\leqslant 0$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой главе мы подвели итоги изучения в школе уравнений, неравенств, систем уравнений. Мы достаточно аккуратно ввели следующие *термины*:

равносильность уравнений, равносильность неравенств, равносильность систем уравнений;

следствие уравнения, следствие неравенства;

равносильное преобразование уравнения, неравенства;

посторонние корни (для уравнений);

проверка корней (для уравнений), проверка решений (для систем уравнений);

система уравнений, система неравенств, совокупность неравенств;

решение системы неравенств, решение совокупности неравенств.

Мы сформулировали *теоремы*:

о равносильности уравнений;

о равносильности неравенств.

Мы ответили на *четыре главных вопроса*, связанных с решением уравнений:

как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?

какие преобразования переводят данное уравнение в уравнение-следствие?

как сделать проверку, если она сопряжена со значительными трудностями в вычислениях?

в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Мы выделили *четыре общих метода* решения уравнений:

замена уравнения $h(f(x))=h(g(x))$ уравнением $f(x)=g(x)$;

метод разложения на множители;

метод введения новых переменных;

функционально-графический метод.

Мы расширили представления о методах решения *систем уравнений* (метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных, графический метод, метод умножения, метод деления), познакомились с новыми классами систем уравнений (иррациональных, тригонометрических), рассмотрели системы уравнений с различным числом переменных.

Мы познакомились с тем, как решаются уравнения и неравенства *с параметрами*.

ОГЛАВЛЕНИЕ